→ Exemplo de teste de comparação (problemas 3 e 2 - Lista 2)

3) Seja $(a_n)$ uma seq. qualquer dos dígitos $0,1,2,\dots,9$. Mostre que a série $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\dots+\frac{a_n}{10^n}+\dots$ é convergente.

Solução: $\forall\, i\geq 1$, $0\leq \frac{a_i}{10^i}\leq \frac{9}{10^i}$, a série $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{9}{10^i}$ converge

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{10^i} \text{ converge } //.$$

2) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros: $1,\overline{29}$ e $0,3\overline{117}$

Solução: Contexto geral.

Todo número positivo $x$ tem uma representação decimal como $x = a_0.a_1a_2a_3\dots$, com $0\leq a_k\leq 9$, $\Rightarrow$

$$\overbrace{a_0+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_n}{10^n}}^{=S_n} \underset{\uparrow \text{"óbvio"}}{\leq} x < a_0+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n}$$

pois
$$\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\dots \leq \frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}\underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{10}+\frac{a_{n+2}}{10^2}+\dots\right)}_{<1} < \frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow x < a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n} \; //$$

Então
$$0\leq x-S_n < \frac{1}{10^n} \Rightarrow x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}.$$

* $x=1,\overline{29}=1,2929\dots$ : Sabemos que $x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$, onde $a_0=1, a_1=2, a_2=9, a_3=2$

$=\lim_{n\to\infty}S_n$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k}$

- Vamos escalar as somas parciais pares $S_{2n}$, $(n\geq 1)$ logo $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = X$.

Agora: $S_2 = 1 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{9}{10^2} = 1 + \frac{29}{10^2}$

$$S_4 = 1 + \frac{29}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{9}{10^4} = 1 + \frac{29}{10^2} + \frac{29}{10^4}$$

$\vdots$

$$S_{2n} = 1 + 29\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{2k}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1 + 29\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}} = 1 + 29\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right)$$

$$= 1 + 29\left(\frac{100}{99} - 1\right) = 1 + \frac{29}{99} = \frac{128}{99} = X$$

* $X = 0,\overline{3117} = 0,3117\,3117\ldots$ : Segundo o ~~ex~~ exemplo anterior $X = \frac{3117}{9999}$ //.

---

## Convergência Absoluta e condicional.

Sabemos pelo criterio de Leibniz que $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, mas $\sum_{n=1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1} \frac{1}{n}$ é divergente, logo em geral a convergência de $\sum a_n$ $\boxed{\text{não}}$ implica a convergência de $\sum |a_n|$.

Mais temos sim o seguente teorema:

Teorema: se $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$ e temos $\left|\sum^{\infty} a_n\right| \leq \sum^{\infty} |a_n|$ //.

Prova: Usaremos comparação: Sabemos $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

$\Rightarrow$ Como $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n + |a_n| < \infty$. ~~Como~~ Assim,

$$\sum a_n = \sum[(a_n + |a_n|) - |a_n|] = \sum(a_n + |a_n|) - \sum |a_n| < \infty$$

• Agora, sabemos $0 \leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \Rightarrow$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \blacksquare.$$

**Definição**: Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se $\sum |a_n|$ é convergente.

Exemplos: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} < \infty, \ \forall p > 1$ (obvio)

2) $\sum \frac{\cos(n)}{n^p} < \infty, \ \forall p > 1$: $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^p} \leq \sum \frac{1}{n^p} < \infty$ $p>1$ !!

**Definição**: Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente (cc) convergente se ela for convergente, $\boxed{\text{mas não}}$ fore absolutamente convergente.

Exemplos: Determinaremos em caso de convergência se a série converge absolutamente ou condicionalmente.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: condicionalmente convergente (obvio)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$: é CC pois por Leibinz ela converge e $\sum_{n=1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ diverge ( $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+100}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+100} = 1 \Rightarrow$ pelo teste de comparação no limite segue-se que como $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente $\Rightarrow \sum \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ é divergente ).

③ $\sum (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ é c.c. De fato, ④

1) por leibniz para $a_n = \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ temos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ ($f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ tem $f'(x) < 0$ !!)

2) $\sum \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ diverge: considere $b_n \equiv \frac{1}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

com $\sum b_n$ diverge

$\Rightarrow$ pelo teorema de comparação no limite

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

④ $\sum \frac{(-1)^n}{\log(e^n + e^{-n})}$ é c.c: De fato,

1) por leibniz para $a_n = \frac{1}{\log(e^n + e^{-n})}$ temos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ (considere $f(x) = \frac{1}{\log(e^x + e^{-x})}$ com $f'(x) < 0$)

2) $\sum \frac{1}{\log(e^n + e^{-n})}$ diverge: Note $\log(e^n + e^{-n}) \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ grande}}}{\approx} \log(e^n) = n$

$\Rightarrow$ usamos comparação no limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\log(e^n + e^{-n})]^{-1}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(e^n + e^{-n})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log(e^x + e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 \,/\!/$$

$\Rightarrow$ Como $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{1}{\log(e^n + e^{-n})}$ diverge.

(5) $\sum_{n=1} \left[\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{3/2}$ é absolutamente convergente: De fato (3)

$$\left|\text{sen}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\text{sen}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right|^{3/2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ por comparação como $\sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \Rightarrow$ a série converge

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \text{sen}\left(n\pi + \frac{1}{\log n}\right)$ é C.C: De fato,

1) Note $\text{sen}\left(n\pi + \frac{1}{\log n}\right) = \cancel{\text{sen}(n\pi)} \cos\left(\frac{1}{\log n}\right) + \cos(n\pi)\,\text{sen}\left(\frac{1}{\log n}\right)$

$$= (-1)^n\, \text{sen}\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

$\Rightarrow$ por Leibniz temos

a) $a_n \equiv \text{sen}\left(\frac{1}{\log(n)}\right) \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $a_n \geq a_{n+1}$, pois para $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{\log x}\right)$

$$f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{\log x}\right)\frac{1}{(\log x)^2}\,\frac{1}{x} < 0$$

" pois para x grande $\frac{1}{\log x} \approx 0$ e $\cos\left(\frac{1}{\log x}\right) \approx 1$"

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, \text{sen}\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$ converge.

2) Como $\log n < n \Rightarrow \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{1}{\log n}\right) > \text{sen}\,\frac{1}{n}$

pois para $n$ grande $\frac{1}{\log n} \approx 0$ e em $[0, \pi/2]$

o seno é crescente. Agora veamos que $\sum \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

é divergente. De fato, usando comparação no limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n} = 1 \Rightarrow \text{como } \sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \Rightarrow$$

$\sum \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge //

A seguir veremos dois muito úteis critérios para séries: Critério de la raíz e da razão (Devidos a Cauchy)

**Teorema:** (O teste da Razão) Considere a Série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n \in \mathbb{R}-\{0\}$

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1 \Rightarrow \sum |a_n| < \infty$ (logo $\sum a_n < \infty$)

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o teste não é conclusivo.

**Exemplos:** 1) $\cancel{\sum_{n=3} \frac{1}{(\log n)^n}}$ ~~é convergente~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ diverge: De fato,

Seja $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(1+n)!\; n^n} = \frac{1}{(1+n)} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e > 1$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ diverge: De fato, para $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{3}{e} > 1$$

3) Uma série $\sum a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}}\, a_n .$$

Determinar se $\sum a_n$ converge ou diverge.

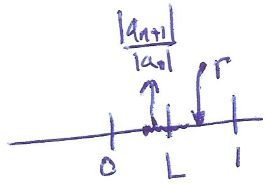
Solução: Ela converge.

$$0 \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

4) $\sum \underbrace{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n!}}_{a_n}$ diverge: De fato,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot 2(n+1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1 \;\; !!.$$

Prova do teorema: (i) Como $L<1 \Rightarrow$  Existe $r$ tal que $L<r<1 \Rightarrow \forall n \ge N$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \Rightarrow$

$|a_{n+1}| < r|a_n| \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{r^{n+1}} < \frac{|a_n|}{r^n} \Rightarrow \left\{\frac{|a_n|}{r^n}\right\}_{n\ge N}$ é uma seq decrescente. Logo $\frac{|a_n|}{r^n} \le \frac{|a_N|}{r^N}$ $\forall n \ge N$

$\Rightarrow |a_n| \le \beta r^n$, onde $\beta \equiv \frac{|a_N|}{r^N}$. Como $\sum_{n\ge N} r^n < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n\ge N} |a_n| < \infty \underset{\text{"óbvio"}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ //.

ii) Sja $L > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq N \quad \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n|$

$\dots \geq |a_{N+2}| \geq |a_{N+1}| \geq |a_N|$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

iii) Sabemos $\sum \frac{1}{n}$ é diverge: para $a_n = \frac{1}{n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Sabemos $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ //

logo o Criterio não é conclusivo para $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

Teorema (o Teste da Raiz) Considere a série $\sum a_n$, com $a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ //

(i) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1 \Rightarrow \sum |a_n| < \infty$ ($\sum a_n < \infty$)

ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

iii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow$ o teste não é conclusivo.

Exemplos: 1) $\sum\limits_{n=3} \frac{1}{(\log n)^n}$ é convergente: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\log n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0 < 1$!

2) $\sum \underbrace{\left[\frac{n}{n+1}\right]}_{a_n}^{n^2}$ é convergente: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+1}\right]^n = \frac{1}{e} < 1$ !!

$\sum \underbrace{(n^{1/n} - 1)^n}_{a_n}$ Converge: $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n^{1/n} - 1) = 0$ // (4)

$\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg} n)^n}}_{a_n}$ é convergente: $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} < 1$ !!

$\sum \underbrace{(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}_{a_n}$ é convergente:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1 \text{ //.}$$

) $\sum \underbrace{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n^{100}}{2^n}\right)}_{a_n}$ é convergente:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100/n}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ //.}$$

7) $\boxed{\text{Determine os valores de } x \text{ tais que}}$: a) $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$ Converge.

Solução: Usaremos o critério da raiz para $a_n = n^n x^n$,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n|x| = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\to$ logo só para $x = 0$ a série converge

) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$. Seja $a_n = \frac{x^n}{3^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3} < 1$

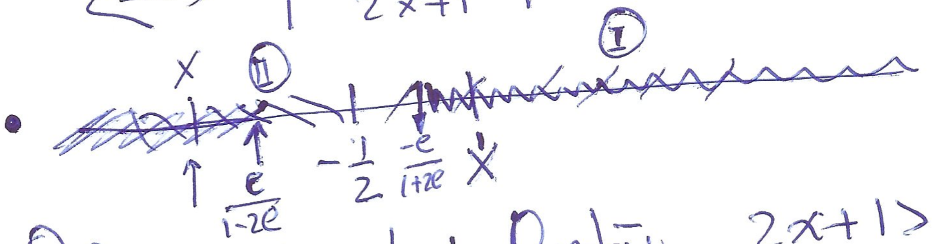
$\Leftrightarrow |x| < 3$.

logo a série converge para $|x| < 3$.

$\sum \frac{n}{n+1}\underbrace{\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n}_{a_n}$ : primeiro temos $x \neq -\frac{1}{2}$. (5)

$$\lim |a_n|^{1/n} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{1/n}} \left|\frac{x}{2x+1}\right| \Longrightarrow \frac{1}{e}\,\frac{|x|}{|2x+1|} < 1$$

$$\iff \left|\frac{x}{2x+1}\right| < e \iff -e < \frac{x}{2x+1} < e$$




(I) Sp. $x > -\frac{1}{2}$ : Então $2x+1>0$, assim

$$-e(2x+1) < x < e(2x+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{-e}{1+2e} < x} \qquad \boxed{x > \frac{-e}{2e-1}}$$

(*) Como só $\frac{-e}{1+2e} > -\frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{-e}{1+2e}$ //

(II) Sp. $x < -\frac{1}{2}$ : então $2x+1<0$, assim

$$-e(2x+1) > x > e(2x+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x < \frac{-e}{1+2e}} \qquad \boxed{x < \frac{e}{1-2e}}$$

(*) Como só $\frac{e}{1-2e} < -\frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{e}{1-2e}$

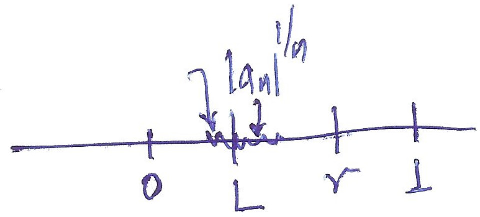
Conclusão: Temos convergência para:

$$\cancel{\frac{e}{1+2e} < x < \frac{e}{1-2e}}$$

$$x > \frac{-e}{1+2e} \quad e \quad x < \frac{e}{1-2e}$$

## Prova do critério da Raiz:

(i) Seja $r$ t.q. $L<r<1$ :




$\Rightarrow \forall n \geq N \quad |a_n|^{1/n} < r \Rightarrow |a_n| < r^n$.

Como $\sum_{n\geq N} r^n < \infty$ "$r<1$" $\Rightarrow \sum_{n\geq N} |a_n| < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$.

(ii) Seja ~~[illegible]~~ $L>r>1$ $\Rightarrow \forall n \geq N \quad |a_n|^{1/n} > r \Rightarrow$

$|a_n| > r^n \Rightarrow$ Como $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \nRightarrow \lim a_n \neq 0$

• pelo "critério de divergência" $\sum a_n$ diverge.

iii) • Sabemos $\sum \frac{1}{n}$ diverge: para $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$.

→ Sabemos $\sum \frac{1}{n^2}$ converge: para $a_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = 1$ //.