EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS - INTRODUÇÃO

1. Introdução

Uma equação da forma

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1}$$

na qual F é uma função real de $n+2$ variáveis, x uma variável real e $y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ denotam uma função real da variável x e suas derivadas até ordem n. é denominada **equação diferencial ordinária de ordem** n.

Dizemos que a equação está na **forma normal** se a derivada de ordem mais alta $y^{(n)}$, estiver escrita em função das demais ou seja, se a equação estiver na forma:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Exemplo 1.1. *A equação* $x^2y'''-\cos(2xy'')+e^{yy'}-x^3e^{2x}=0$ *é uma EDO de* 3^a *ordem que pode ser escrita na forma normal:*
$y'''=\frac{\cos(2xy'')}{x^2}-\frac{e^{yy'}}{x^2}+xe^{2x}$.
Observemos, para futura referência que, na forma normal, a equação não está definida para $x=0$.

Definição 1.2. *Uma função* φ *definida em um intervalo* I *é uma* solução da E.D.O. (1) no intervalo I, *se* φ *é derivável até ordem* n *em* I *e* $F(x,\varphi,\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$, *para todo* $x\in I$.

Observação 1.3. *As soluções de* (1) *devem estar definidas sempre* em intervalos.

Date: August 27, 2020.

Exemplo 1.4. *A função* $y = \frac{1}{16}x^4$ *é uma solução da equação* $y' = xy^{1/2}$. *no intervalo* $I = (-\infty, +\infty)$.

Exemplo 1.5. *A função* $y = \frac{1}{x}$, *definida em* $I = (-\infty, 0)$ *é uma solução da equação* $xy' + y = 0$ *neste intervalo.*
$y = \frac{1}{x}$, *é também uma solução da equação no intervalo* $J = (0, \infty)$, mas não é solução em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Duas questões centrais sobre a equação (2) são a existência de soluções e a unicidade de soluções . Para estudar essa questão devemos considerar o **Problema de Valor Inicial (PVI)** associado à equação (2)

$$
\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n \end{cases} \tag{3}
$$

Um resultado fundamental na teoria de Equações Diferenciais Ordinárias é que, se f satisfaz algumas condições de "regularidade" então o P.V.I. (3) tem solução única. Vamos enunciar esse resultado de maneira mais precisa em uma próxima seção.

2. Queda de corpos

A figura (1)ilustra a queda de um corpo de massa m (medida em kg) sob a ação da gravidade, perto do nível do mar. Denotamos por $v(t)$ a velocidade do corpo (em $\frac{m}{s^2}$) no instante t (medido em segundos). A lei que governa o movimento é a *segunda lei de Newton* segundo a qual a variação da *quantidade de movimento* mv é proporcional á força total aplicada F (medida em Newtons-N), ou seja :

$$
\frac{d}{dt} mv = F. \tag{4}
$$

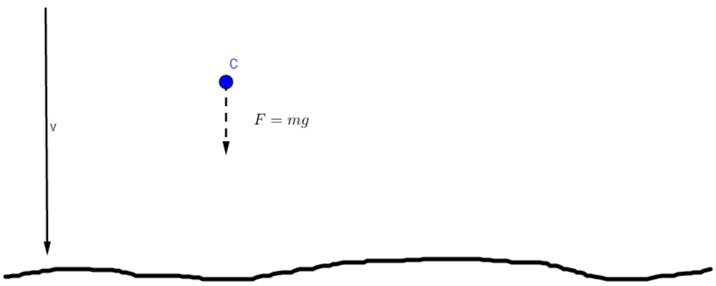

FIGURE 1. Corpo em queda sob ação da gravidade.

Vamos supor inicialmente que $F = mg$, onde $g(em\frac{m}{s^2})$ é a aceleração devida à gravidade (ou seja, a única força atuando sobre o corpo é devida àtração da Terra).

A equação (4), fica então:

$$\frac{d}{dt}mv = mg. \tag{5}$$

Supondo que m e g não variam com o tempo, teremos a equação para v:

$$\frac{d}{dt}v = g, \tag{6}$$

cuja *solução geral* pode ser obtida imediatamente por integração: $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} g\, d\, s = v_0 + g(t - t_0)$, sendo t_0 o *instante inicial* e $v_0 = v(t_0)$ a *velocidade inicial.*

Um modelo um pouco mais realístico (verf figura (**??**)) deve incorporar a força exercida pela resistência do ar, que pode assumir formas bem complicadas. Por simplicidade, vamos supor que esta força é proporcional à velocidade e age na direção oposta ao movimento. Obtemos então a equação: $\frac{d}{dt}mv = mg - \gamma v$. ou, denotando por $k = \frac{\gamma}{m}$,

$$\frac{d}{dt}v = g - kv. \tag{7}$$

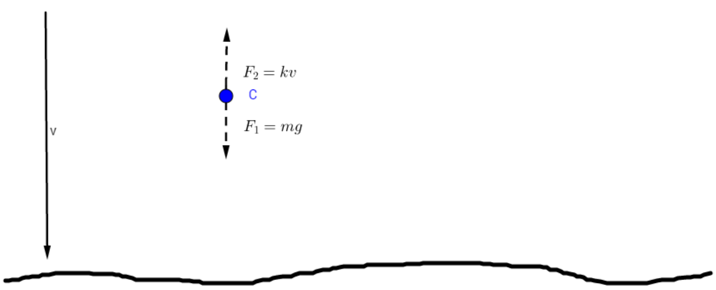

FIGURE 2. Corpo em queda sob ação da gravidade.

A determinação das soluções da equação (7) não é agora tão imediata, mas pode ser obtida por manipulações algébricas simples;

$$\frac{d}{dt}v = g - kv \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}v\right) = e^{kt}g \Leftrightarrow$$

$$e^{kt}v = e^{kt_0}v_0 + \int_{t_0}^{t} e^{ks}g\,d\,s \Leftrightarrow$$

$$e^{kt}v = e^{kt_0}v_0 + g/k\left(e^{kt} - e^{kt_0}\right) \Leftrightarrow$$

$$v(t) = e^{-k(t-t_0)}v_0 + g/k\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$$

$$v(t) = e^{-k(t-t_0)}v_0 + g/k\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$$

$$v(t) = e^{-k(t-t_0)}v_0 + g/k\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$$

$$v(t) = g/k + (v_0 - g/k)\,e^{-k(t-t_0)}.$$

Agumas observações sobre a solução:

- Se $v_0 = g/k$ então $v(t) = g/k$, para todo t, ou seja, g/k é uma solução constante ou *solução de equilíbrio* da equação.
- Para qualquer condição inicial v_0, temos que $v(t) \to g/k$ quando $t \to \infty$. Ou seja, todas as soluções convergem assintoticamente para a única solução de equilíbrio.
- A equação é do tipo linear e as funções $w(t) = (v_0 - g/k)\,e^{-k(t-t_0)}$ são soluções da equação $\frac{d}{dt}v + kv = 0$, que é a *equação homogênea associada à equação* (7). Assim toda solução é a soma da solução de equilíbrio com uma solução da equação homogênea associada.