MAP 2220 Fundamentos de Análise Numérica

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2012

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Exercício 1 Considere os pontos do intervalo $[-1,1]$ dados por $x_j = \cos(j\pi/n)$, $0 \leq j \leq n$ e defina o produto interno

$$< u, v >= \frac{1}{2}u(x_0)v(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} u(x_j)v(x_j) + \frac{1}{2}u(x_n)v(x_n).$$

Sejam T_k os polinômios de Chebyshev. Mostre que $< T_k, T_l >$ é igual a:

- n, se $\frac{k+l}{2n} \in Z$ e $\frac{k-l}{2n} \in Z$;
- $\frac{n}{2}$ se $\frac{k-l}{2n} \in Z$ e $\frac{k+l}{2n} \notin Z$ ou $\frac{k-l}{2n} \notin Z$ e $\frac{k+l}{2n} \in Z$;
- 0, se $\frac{k-l}{2n} \notin Z$ e $\frac{k+l}{2n} \notin Z$.

Exercício 2 Considere o problema de se aproximar uma função f definida em $[-1,1]$ por um polinômio g de grau menor ou igual a m, $m \leq n-1$, usando o método dos mínimos quadrados com o produto interno definido no exercício anterior. Mostre que a solução pode ser obtida por

$$g(x) = \frac{1}{2}c_0^* T_0(x) + \sum_{k=1}^{m} c_k^* T_k(x),$$

onde

$$c_k^* = \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=1}^{n-1} f\left[\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right]\cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}f(-1)\cos(k\pi)\right\},$$

para $0 \leq k \leq n-1$.

Exercício 3 Suponha que a função $f(x) = \sin(x)$ está tabelada de 10 em 10 graus, isto é, em pontos equidistantes com espaçamento $h = \pi/18$. Desejamos aproximar o valor do seno em outros pontos usando interpolação cúbica. Explique como fazer isso de forma a se obter a melhor estimativa de erro possível e apresente esta estimativa.

Exercício 4 Sejam $x_0, x_1, \cdots, x_n$ pontos igualmente espaçados, isto é, $x_k = x_0 + kh$ com $h > 0$. Mostre que

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{\Delta_k f(x_i)}{k!\,h^k}$$

onde as *diferenças simples* Δ_k de ordem k são definidas por:

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 f(x_i) = f(x_i),\\
&\Delta_{k+1} f(x_i) = \Delta_k f(x_{i+1}) - \Delta_k f(x_i), \quad k \geq 0.
\end{aligned}$$

Exercício 5 Conseguimos a seguinte tabela de uma certa função f

x	0	1	2	3	4
y	1	2.7	53.1441	387.420489	2824.295365

Queremos usar interpolação polinomial para aproximar o valor de $f(0.5)$ de forma a ter a menor avaliação de erro possível. Sabendo que f é de classe C^∞ e satisfaz $|f^{(k)}(x)| \leq 2^k e^8, \ \forall x \in [0,4]$, resolva nosso problema, e dê a melhor avaliação que puder para o erro cometido.

Exercício 6 Condidere o seguinte problema de interpolação de Hermite: dada a tabela

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
$f'(x)$		$f'(x_1)$	

onde $x_0 < x_1 < x_2$, determine um polinômio $p_3(x)$ de grau menor ou igual a 3 tal que $p_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$, e $p_3'(x_1) = f'(x_1)$.

a) Prove que o problema tem solução e que ela é única.

b) Prove que se $f \in C^4([x_0, x_2])$ então, dado $x \in [x_0, x_2]$, existe $\xi_x \in [x_0, x_2]$ talque
$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Exercício 7 A tabela abaixo descreve a evolução temporal de uma população:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
f	15	23	33	45	58	69	79	86

Sabe-se que a curva $f(t)$ tem um único ponto de inflexão $\bar{t}$, a partir do qual o crescimento desacelera. Uma aproximação para $\bar{t}$ pode ser calculada interpolando-se a função $f(t)$ por um polinômio cúbico em 4 pontos convenientes, e determinando a raiz da derivada segunda do polinômio.

a) Construa a tabela de diferenças (usando todos os pontos) até as diferenças de ordem 2, e use-a para mostrar que $\bar{t} \in [4, 5]$. (Justifique!)

b) Escolha 4 pontos convenientes para a interpolação cúbica, construa o polinômio interpolador em relação a estes pontos e determine a aproximação para $\bar{t}$.

Exercício 8 Seja $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ e considere a tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	-1	0

Construa o polinômio interpolador da tabela na forma de Newton com diferenças simples e use-o para aproximar $\cos \frac{3\pi}{4}$. Compare a estimativa de erro com o erro exato.

Exercício 9 Sabendo que $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ é o polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola uma função $f(x)$ nos pontos $x_i = i$, $i = 0, \ldots, 4$, determine o polinômio de grau menor ou igual a 3 que interpola esta mesma função f nos pontos 0, 1, 3 e 4.

Exercício 10 Considere a seguinte tabela para a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e a sua derivada $f'(x) = \cos(x)$:

x	0.5	1.0	1.5
$f(x)$	0.47943	0.84147	0.99749
$f'(x)$	0.87758	0.54030	0.070737

a) Usando a tabela para $(x, f(x))$, construa o polinômio interpolador na forma de Newton e use-o para aproximar sen(0.8). Delimite o erro e compare a estimativa com o erro exato.

b) Usando a tabela para $(x, f(x), f'(x))$, construa o polinômio interpolador de Hermite na forma de Newton e use-o para aproximar sen(0.8). Delimite o erro e compare a estimativa com o erro exato.

Exercício 11 Considere a tabela para a função $f(x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}x)$:

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Construa o spline cúbico natural interpolador e use-o para aproximar $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$.

Exercício 12 O spline cúbico *not a knot* S é definido de forma que nos intervalos $[x_0, x_2]$ e $[x_{n-2}, x_n]$ S seja um polinômio de grau menor ou igual a 3. Estas condições são equivalentes (com a notação usada em aula) a $s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1)$ e $s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1})$. Mostre que

$$m_0 = \frac{h_1 + h_2}{h_2} m_1 - \frac{h_1}{h_2} m_2 \quad \text{e} \quad m_n = \frac{h_{n-1} + h_n}{h_{n-1}} m_{n-1} - \frac{h_n}{h_{n-1}} m_{n-2},$$

e obtenha o sistema linear para $m_1, \ldots, m_{n-1}$.

Exercício 13 Dada uma partição $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$, podemos representar um spline cúbico S subordinado a Δ em termos dos valores $S(x_i) = y_i$ e $S'(x_i) = \gamma_i$, $0 \leq i \leq n$.

a) Usando o polinômio interpolador de Hermite na forma de Newton, mostre que a restrição s_i de S ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é dada por

$$\begin{aligned} s_i(x) = \;& y_{i-1} + \gamma_{i-1}(x - x_{i-1}) + \tfrac{1}{h_i}(\delta_i - \gamma_{i-1})(x - x_{i-1})^2 + \\ & \tfrac{1}{h_i^2}(\gamma_i - 2\delta_i + \gamma_{i-1})(x - x_{i-1})^2(x - x_i) \end{aligned}$$

onde $h_i = x_i - x_{i-1}$ e $\delta_i = (y_i - y_{i-1})/h_i$.

b) Mostre que os parâmetros γ_i satisfazem as equações

$$\alpha_i \gamma_{i-1} + 2\gamma_i + \beta_i \gamma_{i+1} = 3(\alpha_i \delta_i + \beta_i \delta_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

onde $\alpha_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$ e $\beta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \alpha_i$.