PMT3306 - Módulo “Concentradores de tensão” - Material de apoio

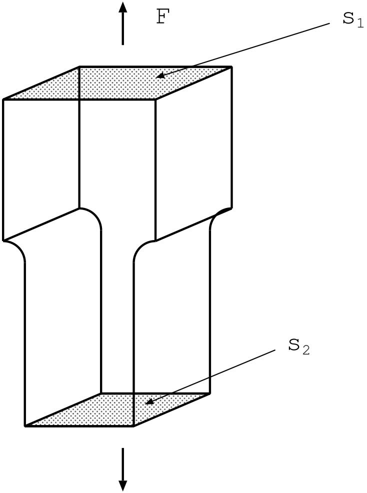
Cláudio Geraldo Schön

Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

30 de agosto de 2020

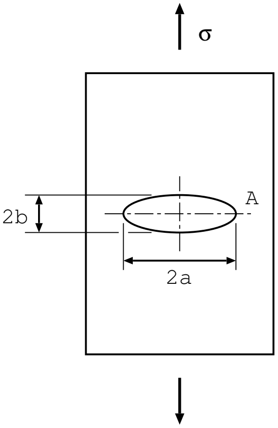
Origem dos concentradores de tensão

Fator de concentração de tensão



$$K_t \equiv \frac{\sigma_{max}}{\sigma} \qquad (1)$$

Furo elíptico passante



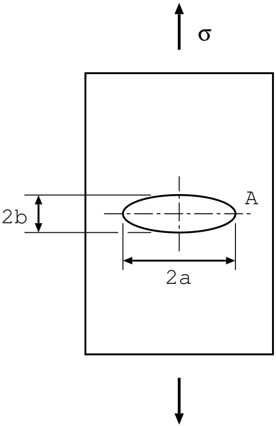
Da solução de Inglis (1911)

$$\sigma_{\beta\beta}\big|_{\alpha=\alpha_0,\beta=0} = \sigma\left[1 + 2\frac{a}{b}\right]$$

Ou seja,

$$K_t = 1 + 2\frac{a}{b}$$

Furo elíptico passante



Definindo o raio de curvatura da superfície da elipse no ponto A, ρ_{A} como:

$$\rho_{\mathrm{A}} = \frac{b^2}{a}$$

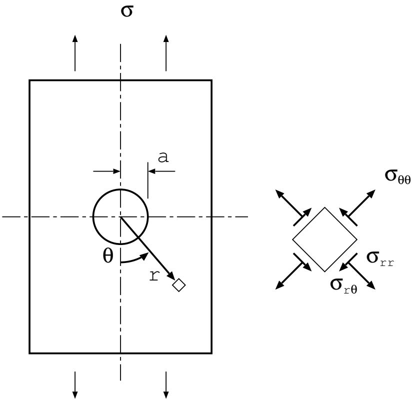
teremos:

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho_{\mathrm{A}}}} \simeq 2\sqrt{\frac{a}{\rho_{\mathrm{A}}}} \quad (\rho_{\mathrm{A}} \ll a)$$

Analisando a equação anterior, vemos que:

$$\lim_{\rho_{\mathrm{A}} \to 0} K_t = \infty$$

Furo circular passante



Tensão normal radial:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

Tensão normal tangencial:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

Tensão de cisalhamento:

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\left(1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

Cavidades esféricas

Solução de Goodier (1933), $\theta = \frac{\pi}{2}, \forall\psi$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[1 + \frac{4 - 5\nu}{2\,(7 - 5\nu)}\frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2\,(7 - 5\nu)}\frac{a^5}{r^5}\right]\sigma$$

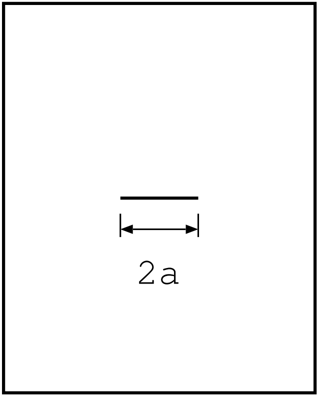
Em ($r = a$) e, assumindo-se $\nu \sim 0,3$:

$$\sigma_{max} \sim \frac{45}{22}\sigma \Rightarrow K_t \simeq 2$$

Em ($r = a, \theta = 0$) (polo da esfera)

$$\left(\sigma_{\theta\theta}\right)_{r=a,\theta=0} = -\frac{3 + 15\nu}{2\,(7 - 5\nu)}\sigma$$

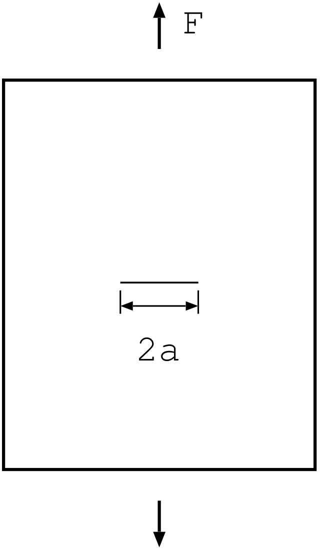
Modelo de Griffith (1921)



1. Sólido contendo trinca de tamanho *a*

$$U_1 = 0$$

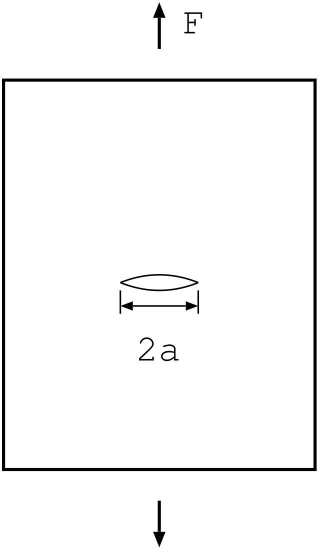
Modelo de Griffith (1921)



1. Sólido contendo trinca de tamanho a
2. Sólido é sujeito a uma tensão σ

$$U_2 = V\frac{\sigma^2}{2E}$$

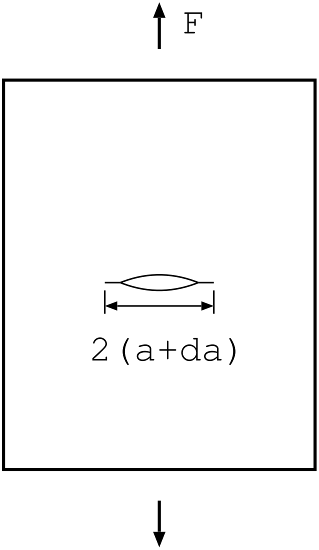
Modelo de Griffith (1921)



1. Sólido contendo trinca de tamanho a
2. Sólido é sujeito a uma tensão σ
3. A trinca relaxa (abre) liberando parte da energia elástica (δU_1^{el})

$$U_3 = V\frac{\sigma^2}{2E} - \delta U_1^{el}$$

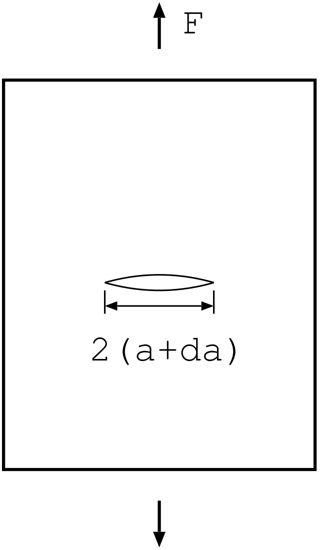
Modelo de Griffith (1921)



1. Sólido contendo trinca de tamanho a
2. Sólido é sujeito a uma tensão σ
3. A trinca relaxa (abre) liberando parte da energia elástica (δU_1^{el})
4. A trinca cresce simétrica por $\mathrm{d}a$ consumindo δU^{sup}

$$U_4 = V\frac{\sigma^2}{2E} - \delta U_1^{el} + \delta U^{sup}$$

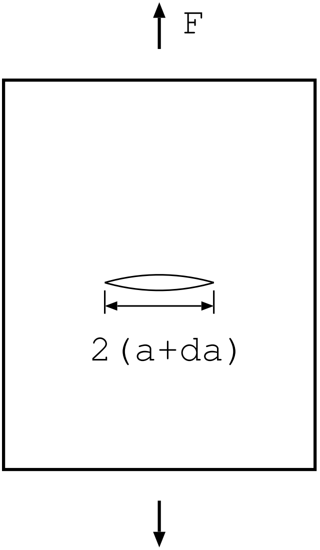
Modelo de Griffith (1921)



1. Sólido contendo trinca de tamanho a
2. Sólido é sujeito a uma tensão σ
3. A trinca relaxa (abre) liberando parte da energia elástica (δU_1^{el})
4. A trinca cresce simétrica por $\mathrm{d}a$ consumindo δU^{sup}
5. A trinca relaxa, liberando mais energia elástica δU_2^{el}

$$U_5 = V\frac{\sigma^2}{2E} - \delta U_1^{el} + \delta U^{sup} - \delta U_2^{el}$$

Modelo de Griffith (1921)



1. Sólido contendo trinca de tamanho a
2. Sólido é sujeito a uma tensão σ
3. A trinca relaxa (abre) liberando parte da energia elástica (δU_1^{el})
4. A trinca cresce simétrica por $\mathrm{d}a$ consumindo δU^{sup}
5. A trinca relaxa, liberando mais energia elástica δU_2^{el}

$$U_5 - U_3 = \delta U^{sup}(\mathrm{d}a) - \mathrm{d}\left[\delta U^{el}(\sigma, a)\right]$$

Estimativa da parcela de relaxamento

Usando o modelo de Inglis (B é a espessura da placa), Griffith deduz que:

$$\delta U_1^{el} = \left(\frac{\sigma^2}{2E}\right) \times \left(2\pi a^2 B\right)$$

e

$$\delta U_2^{el} = \left(\frac{\sigma^2}{2E}\right) \times \left[2\pi (a + \mathrm{d}a)^2 B\right]$$

Cálculo do trabalho de crescimento da trinca

Definindo a tensão superficial do sólido (γ_S) e lembrando que para cada extensão da trinca, duas superfícies livres são criadas:

$$\delta U^{sup} = (2\mathrm{d}aB)\,(2\gamma_S)$$

Critério de Griffith

A expressão final pode ser calculada expandindo-se o quadrado em δU_2^{el} e desprezando o termo quadrático em $\mathrm{d}a$:

$$\Delta U = \left(4\gamma_S - \frac{2\pi\sigma^2 a}{E}\right) B\mathrm{d}a$$

Critério de Griffith

A expressão final pode ser calculada expandindo-se o quadrado em δU_2^{el} e desprezando o termo quadrático em $\mathrm{d}a$:

$$\Delta U = \left(4\gamma_S - \frac{2\pi\sigma^2 a}{E}\right) B\mathrm{d}a$$

Critério de estabilidade.

Critério de Griffith

A expressão final pode ser calculada expandindo-se o quadrado em δU_2^{el} e desprezando o termo quadrático em $\mathrm{d}a$:

$$\Delta U = \left(4\gamma_S - \frac{2\pi\sigma^2 a}{E}\right) B\mathrm{d}a$$

Critério de estabilidade.
No EPT:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a}} \tag{2}$$

No EPD:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a(1-\nu^2)}} \tag{3}$$

Solução para a trinca circular interna

Penny-shaped crack

Sack (1946):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\pi E \gamma_S}{2a\left(1-\nu^2\right)}}$$

Solução para a trinca circular interna

Penny-shaped crack

Sack (1946):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\pi E \gamma_S}{2a\left(1-\nu^2\right)}}$$

Griffith:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a(1-\nu^2)}}$$

Solução para a trinca circular interna

Penny-shaped crack

Sack (1946):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\pi E \gamma_S}{2a\left(1-\nu^2\right)}}$$

Griffith:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a(1-\nu^2)}}$$

Sneddon (1946):
coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{2\sigma}{\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{3}{4}\cos\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{4}\cos\frac{5}{2}\psi\right\} \\ \sigma_{zz} = \frac{2\sigma}{\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{5}{4}\cos\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\cos\frac{5}{2}\psi\right\} \\ \sigma_{rz} = \frac{\sigma}{\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sin\psi\cos\frac{3}{2}\psi\right\} \end{cases}$$

onde δ e ψ denotam a distância e o ângulo tomados com referência a um ponto arbitrário situado à borda da trinca.

Considerações filosóficas

$$\sqrt{E\gamma_S} = \sigma_c\sqrt{\pi a}$$

Força de extensão de trinca

G, G_c

Irwin (1957):

$$G \equiv \frac{1}{2B}\frac{\delta U}{\delta a} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$$

Crescimento instável ocorre quando:

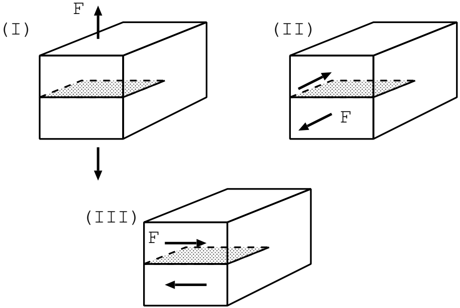
$$G \geq G_c$$

Hipóteses da Mecânica da Fratura Linear Elástica

- Defeitos semelhantes a trincas sempre existem nos materiais frágeis.
- Esses defeitos podem ser simulados por (ou seja, tornados similares a) uma trinca plana passante de tamanho $2a$ em uma placa infinita.
- Durante o carregamento do sólido com um estado de tensão remoto σ desenvolve-se um estado de tensão não homogêneo na placa, que será descrito por uma função $K(\sigma, a)$, denominada **fator de intensificação de tensão.**
- O material apresenta uma resistência intrínseca à propagação da trinca, que será denominada K_R, ou simplesmente R.

Modos de carregamento de trincas

I. Modo de abertura (*“opening”*).
II. Modo de deslizamento (*“sliding”*).
III. Modo de rasgamento (*“tearing”*).

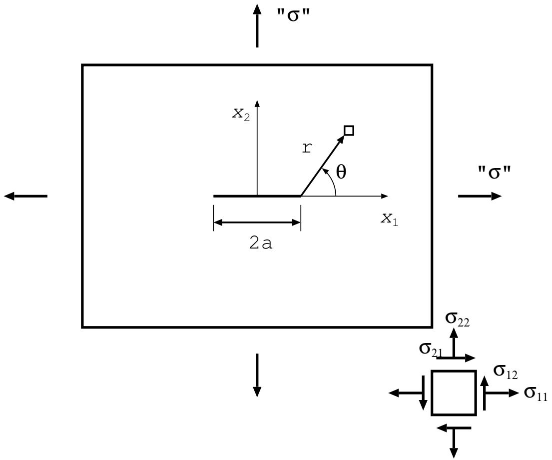


Solução de Irwin (1957)

$$\sigma_{ij}(\sigma, a) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \qquad (4)$$

onde

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \qquad (5)$$



Estados de tensão

Modo I:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} + \cdots \\ 1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} + \cdots \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \quad \sigma_{23} &= \quad 0 \\ \sigma_{33} &= \begin{cases} 0 & \text{EPT} \\ \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) & \text{EPD} \end{cases} \end{aligned}$$

Estados de tensão

Modo II:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots \\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \quad \sigma_{23} &= \quad 0 \\ \sigma_{33} &= \begin{cases} 0 & \text{EPT} \\ \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) & \text{EPD} \end{cases} \end{aligned}$$

Estados de tensão

Modo III:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} + \cdots \\ \cos\frac{\theta}{2} + \cdots \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$$

Fator de forma

Para uma placa **finita** de largura W teremos:

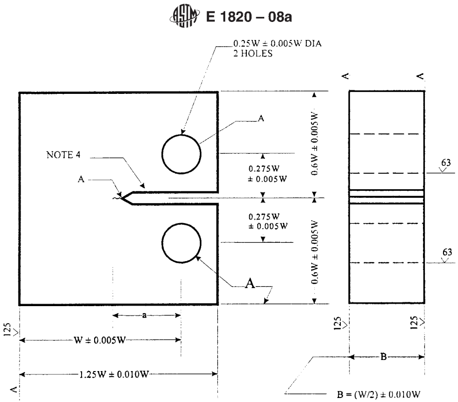
$$K = \sigma \left(W \tan \frac{\pi a}{W} \right)$$

expandindo a equação em série de potências:

$$\begin{aligned} K &= \sigma W^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi a}{W} + \frac{\pi^3 a^3}{3W^3} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma \sqrt{\pi a} \left(1 + \frac{\pi^2 a^2}{3W^2} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} = Y \sigma \sqrt{\pi a} \end{aligned}$$

Outras representações

Corpo de prova compacto em tração



$$K = \frac{P}{\sqrt{BB_N}\sqrt{W}} \times f\left(\frac{a}{W}\right)$$

- P : Carga medida durante o ensaio
- B_N: Largura nominal (= B se não há entalhes laterais)
- B, W e a definidos conforme a figura.

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2+\frac{a}{W}\right)\left[0,886 + 4,64\frac{a}{W} - 13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right]}{\left(1-\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

A crítica de Barenblatt

Barenblatt (1962)

Mesmo no caso ideal (sólido contínuo) tensões não podem assumir valores infinitos $\rightarrow$ forma da ponta da trinca

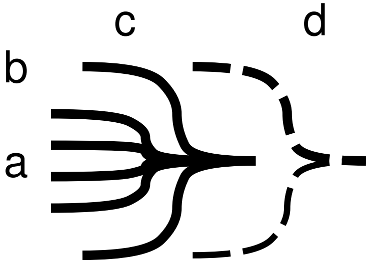
$$\sigma_{ij} = \frac{N(\psi)}{\delta^{\frac{1}{2}}} = \frac{0}{0}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{\pi\delta}\int_0^\infty \frac{g(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

e

$$u_2 = \mp\frac{4\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\sqrt{\delta}\int_0^\infty \frac{g(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

Evolução esquemática da forma da ponta da trinca



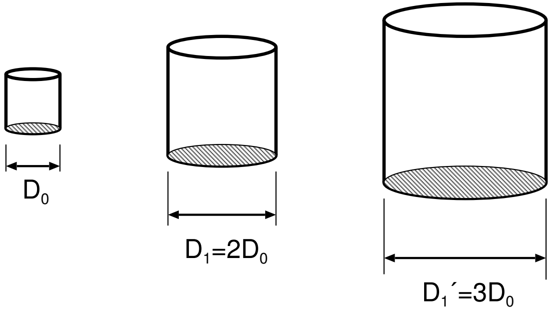
$$K_c = -\frac{1}{\pi}\int_0^d \frac{G(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

$G(t)$ corresponde à distribuição das forças de coesão moleculares em função da separação entre as duas faces e d é a espessura da borda da trinca.

Fator de Escala

Materiais pseudo-frágeis (Bažant)

Idealmente dúctil:

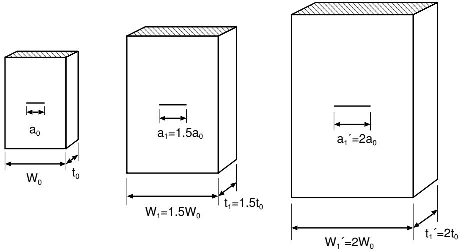


$$F_{max} = \sigma_N \times s_0\,(D)$$

Fator de Escala

Materiais pseudo-frágeis (Bažant)

Idelamente frágil:



$$\sigma_f^0 = \frac{K_{Ic}}{Y(a_0, W_0)\sqrt{\pi a_0}}$$

$$\sigma_f^1 = \frac{K_{Ic}}{Y(a_1, W_1)\sqrt{\pi a_1}} = \frac{K_{Ic}}{Y(a_1, W_1)\sqrt{1.5\pi a_0}}$$

Fator de Escala

Materiais pseudo-frágeis (Bažant)

$$P = P_0 f\left(D\right)$$

com

$$f\left(D\right) = \left(\frac{D}{c_1}\right)^s$$

Idealmente dúctil $\rightarrow s = 0$, idealmente frágil $\rightarrow s = -\frac{1}{2}$, casos pseudo-frágeis $\rightarrow 0 \geq s \geq -\frac{1}{2}$.

$$\ell_0 = \frac{1}{\pi}\frac{\left(K_{Ic}\right)^2}{\sigma_0}$$

Distribuição de Weibull

Hipóteses

Hipóteses básicas:

I - população homogênea de defeitos de tamanhos e orientações variáveis.

II - Os defeitos não interagem.

III - A fratura total da estrutura ocorrerá quando o defeito mais favoravelmente orientado atingir a condição de criticalidade (hipótese do elo mais fraco, ou *weakest-link*).

IV - Um sólido de volume unitário V_0, sujeito a uma tensão uniaxial σ apresentará uma certa probabilidade de falha, que será denotada por $P_1(\sigma, V_0)$.

Probabilidade acumulada de falha

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\int_V c\left[\sigma_{ij}(\mathbf{x})\right] \mathrm{d}(\mathbf{x})\right\}$$

materiais frágeis (*i* representam as direções principais):

$$c(\sigma_{ij}) \approx \sum_i \frac{P_1(\sigma_i)}{V_0}$$

com

$$P_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m$$

Probabilidade acumulada de falha

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m \frac{1}{V_0}\int_V \mathrm{d}\mathbf{x}\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m\right]^{\frac{V}{V_0}}$$

com

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_0 \Gamma\left(1 + m^{-1}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{1}{m}}$$

e

$$\omega = \sqrt{\langle\sigma^2\rangle - (\langle\sigma\rangle)^2} = \left[\frac{\Gamma\left(1 + 2m^{-1}\right)}{\Gamma^2\left(1 + m^{-1}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$