



# PME3100 Mecânica I

## Notas de aula

## **Estática – Sistemas de Forças (parte 3)**

Prof. Ronaldo de Breyne Salvagni  
Agosto de 2020

## 2 – Estática

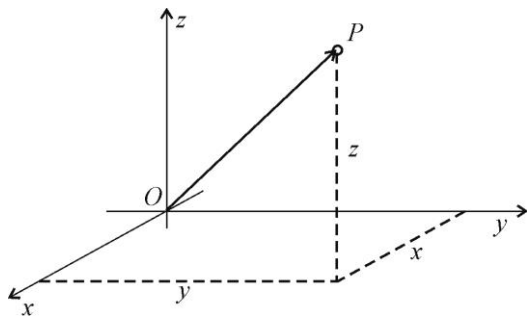
## 2.2 – VÍNCULOS

## 2.2.1 – Graus de liberdade

Vamos definir o “número de graus de liberdade de um sistema” como sendo o número de parâmetros independentes necessários para definir a posição ou configuração desse sistema.

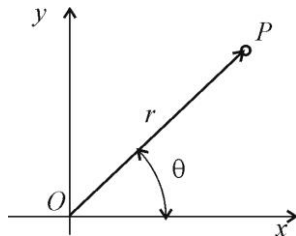
Por exemplo, se o sistema for constituído por um ponto, teremos:

NO ESPAÇO:



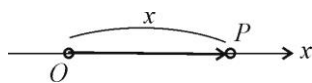
$$P(x, y, z) \rightarrow 3 \text{ G. L.}$$

NO PLANO:



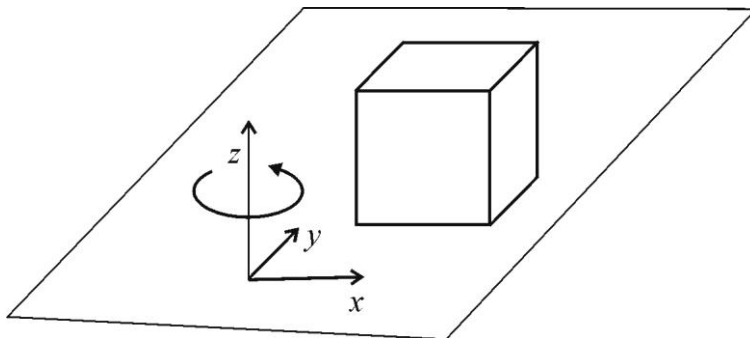
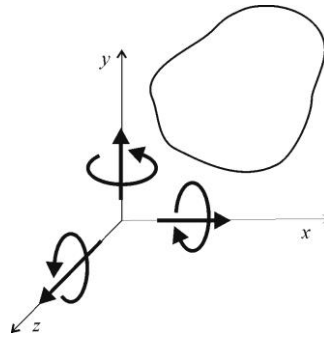
$$P(x, y) \text{ ou } P(r, \theta) \rightarrow 2 \text{ G. L.}$$

NA RETA:



$$P(x) \rightarrow 1 \text{ G. L.}$$

Para um corpo rígido, temos 6 graus de liberdade no espaço: 3 deslocamentos lineares e 3 rotações.



Para um cubo com uma face apoiada num plano, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{deslocamento } x \\ \text{deslocamento } y \\ \text{rotação } z \end{array} \right\} 3 \text{ G.L.}$$

### 2.2.2 – Vínculos – tipos de vínculos

Chamaremos de vínculos as restrições aos graus de liberdade. Por exemplo, o plano em que o cubo do exemplo anterior está apoiado é um vínculo daquele cubo, impedindo o deslocamento em  $z$  e rotações em torno de  $x$  e  $y$ , restringindo a 3 o número de graus de liberdade do cubo.

Em Estática, aos vínculos corresponderão forças que, conjuntamente com aquelas aplicadas, formarão um sistema equivalente a zero. As forças correspondentes aos vínculos são chamadas *forças reativas* ou *reações*; as demais, *forças ativas*.

**Tipos de vínculos:** (são modelos físicos; sem atrito)

#### - ARTICULAÇÃO

Exemplos:

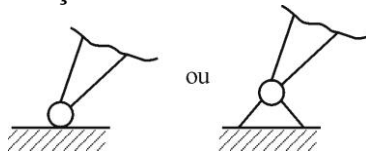


suporte de caneta

pêndulo de relógio (no plano)

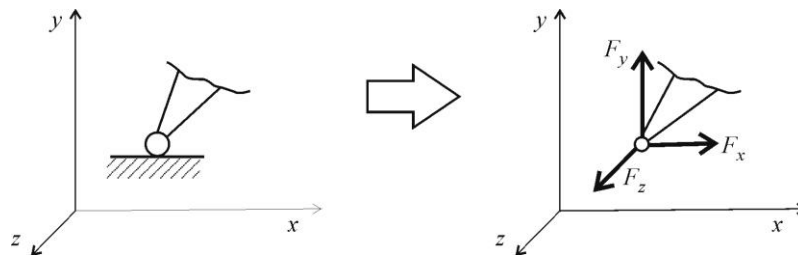
antena de roteador

Representação:



Este tipo de vínculo, aplicado a um ponto, impede qualquer movimento deste, e apenas dele; o restante do corpo pode se mover.

Fornece reação de qualquer intensidade, direção e sentido, correspondendo, portanto, a 3 incógnitas no espaço:

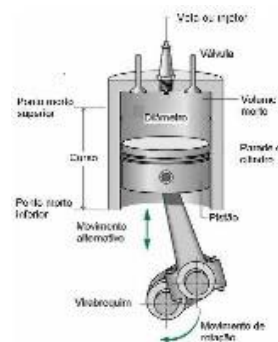


- ANEL

Exemplos:

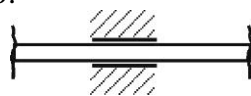


- corpo de bomba para pneu de bicicleta



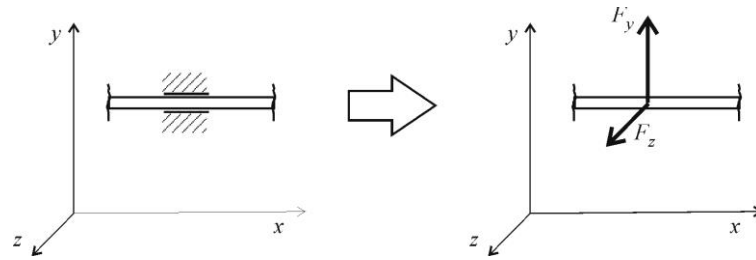
- cilindro de motor a combustão interna

Representação:



Impede movimento do ponto em qualquer direção ortogonal ao eixo.

Fornece reação de qualquer intensidade e sentido em qualquer direção ortogonal ao eixo, correspondendo, portanto, a 2 incógnitas no espaço:

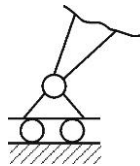


- APOIO SIMPLES (bilateral)

Exemplo: Pés de uma cadeira de escritório com rodinhas:

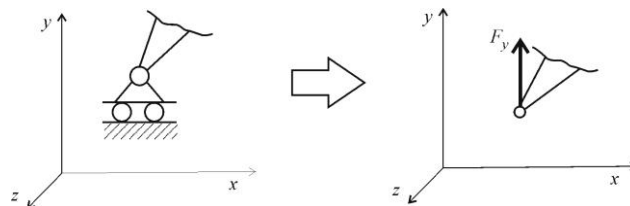


Representação:



Permite ao ponto mover-se apenas em um plano.

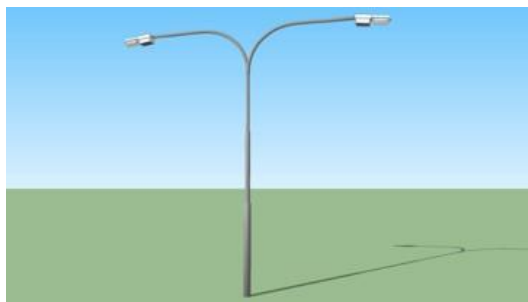
Fornece reação de qualquer intensidade e sentido na direção ortogonal ao plano, correspondendo, portanto, a 1 incógnita:



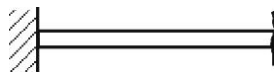
Observação: este apoio (bilateral) impede também que o ponto se “descole” do plano; existe o “apoio simples unilateral” que não tem esse efeito, ou seja, fornece reação de apenas um sentido, e tem a mesma representação gráfica que o bilateral. Assim, quando o apoio for unilateral, isso deverá ser expressamente mencionado no enunciado do problema; se nada for dito, será considerado sempre bilateral.

- ENGASTAMENTO ou ENGASTE

Exemplo: poste

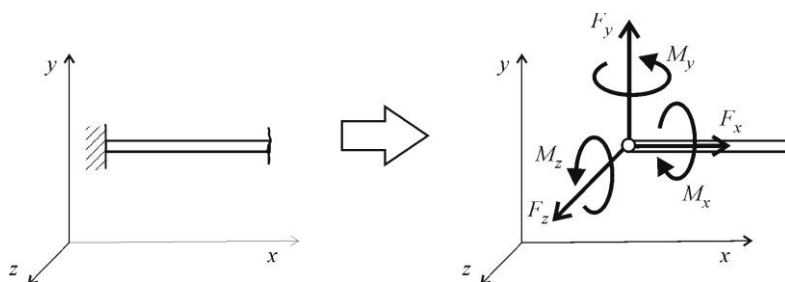


Representação:



Impede o movimento do ponto e do sistema adjacente.

Fornecer um binário de momento não nulo e uma força, correspondendo a 6 incógnitas no espaço:



### 2.3 – PROBLEMAS DE ESTÁTICA

Nos problemas de Estática, normalmente é dado um sistema de corpos rígidos submetido a forças ativas, e deseja-se determinar eventuais posições de equilíbrio e/ou certo número de forças de contato (reações).

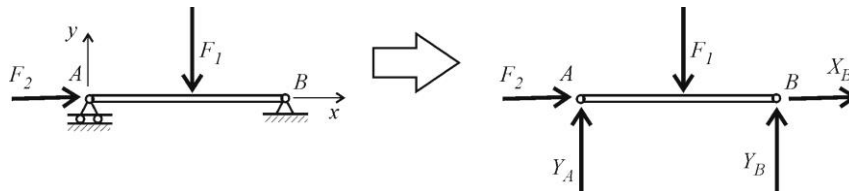
Isto é feito através da aplicação das equações universais de equilíbrio (modelo matemático):

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases}$$

Podemos classificar os problemas de Estática em três tipos:

1 – Quando as forças de contato (incógnitas) podem ser perfeitamente determinadas pelas equações de equilíbrio da Estática, diz-se que o sistema é estaticamente determinado ou isostático.

Exemplo 1:



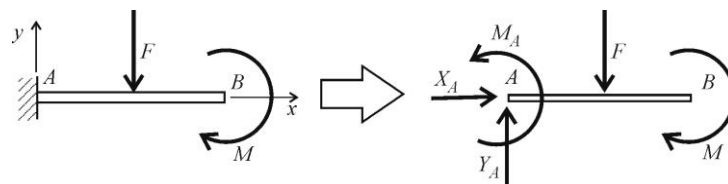
$$\text{Equações: } \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Como a estrutura e o carregamento são planos,  $\sum F_z = 0$ ,  $\sum M_x = 0$  e  $\sum M_y = 0$  são identicamente satisfeitos, e restam apenas 3 equações:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

O número de incógnitas também é 3:  $Y_A$ ,  $Y_B$  e  $X_B$ .

Exemplo 2:

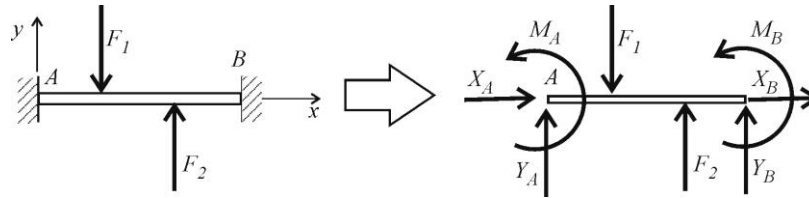


$$\text{Equações: } \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \xrightarrow[\text{problema plano}]{} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{3 equações}}$$

3 incógnitas:  $X_A$ ,  $Y_A$  e  $M_A$ .

2 – Quando o número de incógnitas é maior que o número de equações, o sistema é estaticamente indeterminado ou hiperestático (a abordagem deve ser feita pelo estudo das deformações, assunto da Resistência dos Materiais).

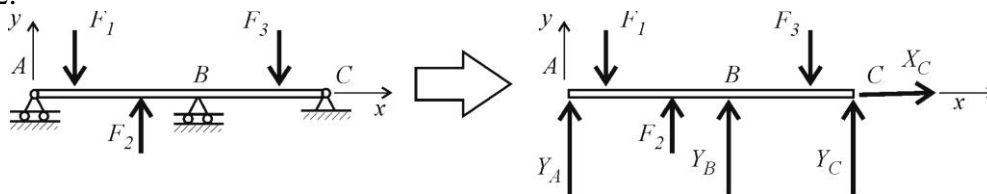
Exemplo 1:



Equações:  $\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \xrightarrow{\text{problema plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$  3 equações

6 incógnitas:  $X_A, Y_A, M_A, X_B, Y_B$  e  $M_B$ .

Exemplo 2:

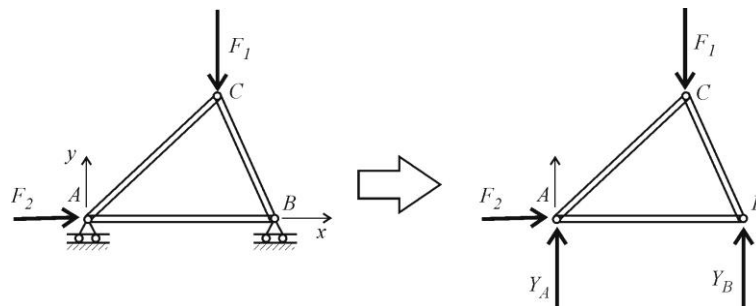


Equações:  $\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \xrightarrow{\text{problema plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$  3 equações

4 incógnitas:  $Y_A, Y_B, Y_C$  e  $X_C$ .

3 – Se o número de incógnitas é inferior ao de equações, o equilíbrio só é possível em determinados casos, e o sistema é hipostático.

Exemplo:



Equações:  $\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \xrightarrow{\text{problema plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$  3 equações

2 incógnitas:  $Y_A$  e  $Y_B$ .

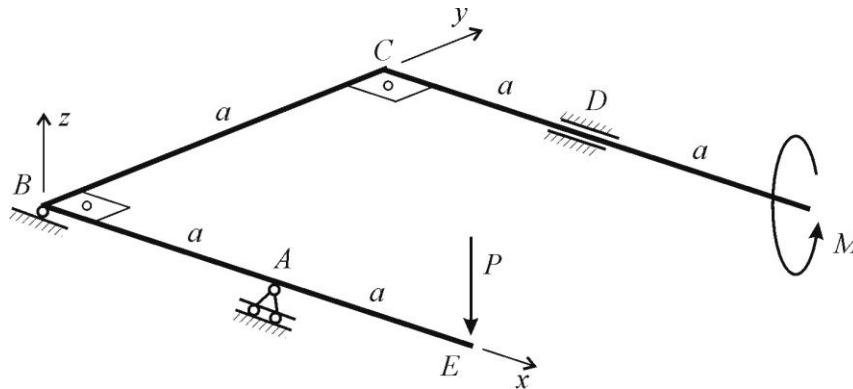
No caso, o equilíbrio só é possível se  $F_2 = 0$ .



## 2.4 – ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

Os diversos modos de resolução em vários tipos de estruturas isostáticas serão abordados através do estudo de uma série de problemas.

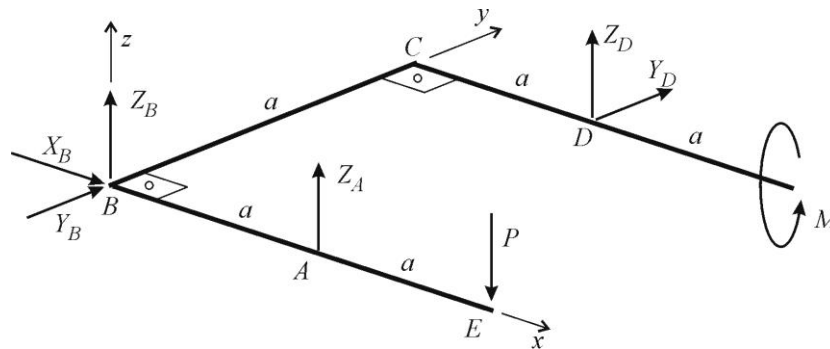
**Exemplo 2.4.1:** A barra da figura está vinculada por um anel no ponto  $D$ , uma articulação no ponto  $B$  e por um apoio simples no ponto  $A$ . Determine as reações externas em função do momento  $M$  e da força  $P$ .



(NÃO COLOCAR SETAS NEM SINAIS NOS NOMES DOS VETORES)

Resolução:

**1º PASSO:** substituir os vínculos pelos esforços correspondentes (fazer o *diagrama de corpo livre* ou *diagrama de forças*)



(DESENHAR NOVAMENTE **SEM** OS VÍNCULOS)

(SENTIDOS ARBITRÁRIOS)

6 incógnitas.

**2º PASSO:** montar as equações de equilíbrio (ver procedimento alternativo no final):

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O &= \vec{0}\end{aligned}$$

Cada uma das equações vetoriais acima fornece 3 equações escalares:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Montando as equações:

$$\sum F_x = 0: \quad \boxed{X_B = 0} \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad Y_B + Y_D = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum F_z = 0: \quad Z_B + Z_A + Z_D + P = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\sum M_x = 0: \quad Z_D \cdot a + M = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum M_y = 0: \quad P \cdot 2a - Z_A \cdot a - Z_D \cdot a = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\sum M_z = 0: \quad Y_D \cdot a = 0 \dots\dots\dots (6)$$

Temos, assim, 6 equações envolvendo as 6 incógnitas procuradas.

**3º PASSO:** resolver o sistema de equações:

De (1):  $\boxed{X_B = 0}$

De (2):  $\boxed{Y_D = 0}$

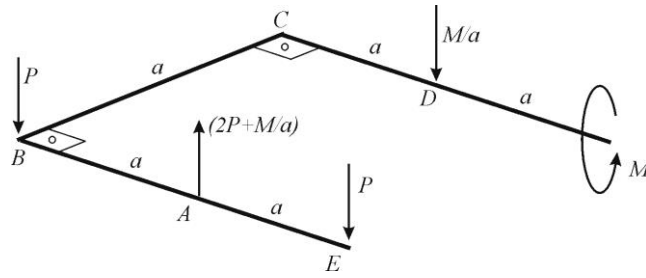
Substituindo  $Y_D$  em (2):  $\boxed{Y_B = 0}$

De (4):  $\boxed{Z_D = -\frac{M}{a}}$  (SENTIDO CONTRÁRIO AO MOSTRADO NA FIGURA)

Substituindo  $z_D$  em (5):  
 $2aP - aZ_A - \left(-\frac{M}{a}\right)a = 0 \Rightarrow \boxed{Z_A = 2P + \frac{M}{a}}$

Substituindo  $z_A$  e  $z_D$  em (3):  
 $Z_B + \left(2P + \frac{M}{a}\right) + \left(-\frac{M}{a}\right) - P = 0 \Rightarrow \boxed{Z_B = -P}$

**4º PASSO:** verificar e apresentar a solução do problema:



(NÃO COLOCAR SETAS NEM SINAIS NOS NOMES DOS VETORES)

ATENÇÃO: nos desenhos feitos durante a resolução, não mudar os sentidos das incógnitas adotados inicialmente.

Procedimento alternativo para o **2º PASSO**: montagem das equações de equilíbrio

Forças:

$$\vec{R}_A = 0\vec{i} + 0\vec{j} + Z_A\vec{k}; (\vec{R}_A, A)$$

$$\vec{R}_B = X_B\vec{i} + Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}; (\vec{R}_B, B)$$

$$\vec{R}_D = 0\vec{i} + Y_D\vec{j} + Z_D\vec{k}; (\vec{R}_D, D)$$

$$\vec{P} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - P\vec{k}; (\vec{P}, E)$$

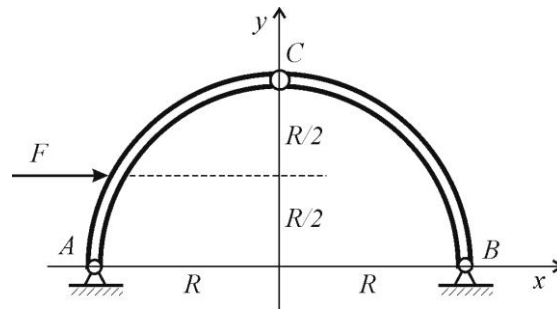
Binário:  $M\vec{i}$

Condições de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_D + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \\ X_B\vec{i} + (Y_B + Y_D)\vec{j} + (Z_A + Z_B + Z_D - P)\vec{k} &= \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} X_B = 0 \dots \dots \dots (1) \\ Y_B + Y_D = 0 \dots \dots \dots (2) \\ Z_A + Z_B + Z_D - P = 0 \dots \dots (3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_O = \vec{0} &\Rightarrow (A - B) \wedge \vec{R}_A + (B - B) \wedge \vec{R}_B + (D - B) \wedge \vec{R}_D + (E - B) \wedge \vec{P} + M\vec{i} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & Y_D & Z_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} + M\vec{i} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow (aZ_D + M)\vec{i} + (-aZ_A - aZ_D + 2aP)\vec{j} + (aY_D)\vec{k} &= \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} aZ_D + M = 0 \dots \dots \dots (4) \\ -aZ_A - aZ_D + 2aP = 0 \dots \dots \dots (5) \\ aY_D = 0 \dots \dots \dots (6) \end{cases} \end{aligned}$$

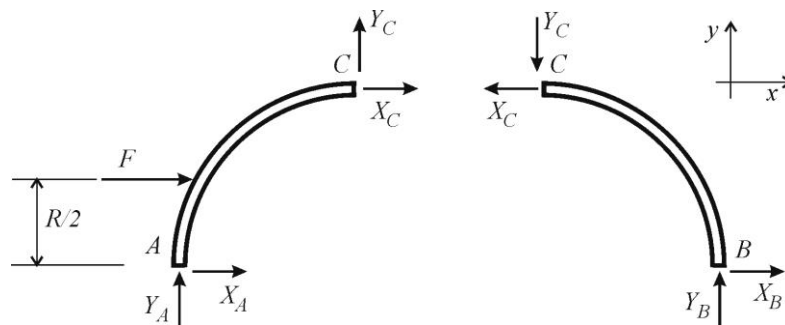
**Exemplo 2.4.2:** Determine as reações externas e as forças que atuam em cada barra do sistema de barras da figura, admitindo que as barras tenham peso desprezível.



Resolução:

- Isolando cada barra (substituindo os vínculos de cada barra pelos esforços correspondentes):

**ATENÇÃO AO PRINCÍPIO DA AÇÃO E REAÇÃO!**



Temos, assim, 6 incógnitas.

- Montando as equações de equilíbrio de cada barra:

Barra AC:

$$\sum F_x = 0: F + X_A + X_C = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum F_y = 0: Y_A + Y_C = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum M_A = 0: -F \cdot \frac{R}{2} - X_C \cdot R + Y_C \cdot R = 0 \dots\dots\dots (3)$$

Barra BC:

$$\sum F_x = 0: -X_C + X_B = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum F_y = 0: -Y_C + Y_B = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\sum M_B = 0: X_C \cdot R + Y_C \cdot R = 0 \dots\dots\dots (6)$$

Temos 6 equações envolvendo as 6 incógnitas.

- Resolução das equações:

De (6):  $X_C = -Y_C$

Substituindo em (3):  $Y_C = F/4$

Substituindo  $Y_C$  em (6):  $X_C = -F/4$

Substituindo  $X_C$  em (4):  $X_B = -F/4$

Substituindo  $Y_C$  em (5):  $Y_B = F/4$

Substituindo  $X_C$  em (1):  $X_A = -3F/4$

Substituindo  $Y_C$  em (2):  $Y_A = -F/4$

- Solução:

