Gabarito do 2º Práticas de demonstrações

Ferramentas disponíveis

Propriedade 1: $\forall$ a e b $\in \mathbb{R}$, a.b = b.a

Propriedade 2: $\forall$ a e b $\in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$

Definição 1: O produto interno dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano é o número real $<\vec{u}, \vec{v}>$, definido da seguinte maneira:

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \begin{cases} 0, \text{ se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\theta), \text{ se } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ e } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

Propriedade 3: Sejam $\vec{u}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = (c, d) dois vetores no plano. Então, $<\vec{u}, \vec{v}>$ = a.c + b.d

1) Prove que $<\vec{u}, \vec{v}> = <\vec{v}, \vec{u}>$

Demonstração:

Seja $\vec{u}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = (c, d), então pela propriedade 3, $<\vec{u}, \vec{v}>$ = a.c + b.d. Mas pela propriedade 1, a.c + b.d = c.a + d.b, novamente pela propriedade 3, temos que a.c + b.d = $<\vec{v}, \vec{u}>$.

2) Prove que $<\vec{u}, \vec{u}> = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Demonstração:

Seja $\vec{u}$ = (a, b),

$\Rightarrow$) Pela propriedade 3, $<\vec{u}, \vec{u}> = a^2 + b^2$. Se $a^2 + b^2 = 0$, então pela propriedade 2, a = 0 = b. Logo, $\vec{u} = (0, 0) = \vec{0}$

$\Leftarrow$) $\vec{u}$ = (0, 0), pela propriedade 3 temos que $<\vec{u}, \vec{u}> = 0^2 + 0^2 = 0$.