<u>Séries Alternadas</u>: é uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos: $\sum (-1)^n a_n$ com $a_n > 0$

(teste de Leibniz)

→ Teste da série Alternada: A série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad b_n > 0$$

Com os b_n satisfazendo

(i) $b_{n+1} \leq b_n$, para n grande (decrescente)

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

Então a série é convergente.

<u>Prova</u>: 1) vejamos que a seq. $\{S_{2n}\}$ de somas parciais é crescente e limitada:

$S_2 = b_1 - b_2 \geq 0$ (por (i))

$S_4 = S_2 + (b_3 - b_4) \geq S_2$ (por (i))

$\vdots$

$S_{2n} = S_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geq S_{2n-2}$ (por (i))

$\Rightarrow 0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots$

Agora $S_{2n} = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(b_{2n-2} - b_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{b_{2n}}_{\geq 0}$

$\leq b_1$

2) Logo $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$.

3) Limite das somas parciais ímpares: ⑦

$$S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L + 0 \equiv L$$

4) Como $\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} \equiv L \Rightarrow \lim S_n \equiv L$ //

Exemplos: a) para $b_n = \frac{1}{n}$ temos $b_{n+1} \leq b_n$ e $\lim b_n = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots \text{ converge}$$

b) Mostraremos a seguir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$ ⊛

- Considere a seq. $\{a_n\}$ ~~tal~~ definida por:

$$\underbrace{a_{2n-1}}_{\text{impar}} = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \underbrace{a_{2n}}_{\text{par}} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \quad , n = 1, 2, 3, \ldots$$

~~então~~ Como $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

temos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ainda mais, $a_n \geq a_{n+1}$, pois

$$a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n} \int_n^{n+1} dx \equiv \frac{1}{n} = a_{2n-1} \quad //$$

- pelo teste de Leibniz $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} a_n \equiv C$

- $$S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} a_k = \underset{\smile}{1} - \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \underset{\smile}{\frac{1}{2}} - \int_2^3 \frac{1}{x}dx + \ldots + \underset{\smile}{\frac{1}{n-1}} - \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}dx + \underset{\smile}{\frac{1}{n}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

- Como $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)\right) = C$

- "C" é chamada a Constante de Euler ($\approx 0{,}577215\ldots$)

• Seja $S_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ e veamos $\lim_{m\to\infty} S_m = \log(2)$:

1) Seja m par, $m = 2n$, então separando termos positivos e negativos

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \log(2n)\right] - \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log(n)\right] + \overbrace{\log(2n) - \log(n)}^{e}$$

$$\log(2n) - \log(n) = \log(2)$$

2) $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = C - C + \log(2) = \log(2)$ //.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \log(n)$ converge: para $b_n = \frac{\log n}{n}$

1) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

2) Para $f(x) = \frac{\log x}{x}$, temos $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0$, para $x > e$

$\Rightarrow$ para $n \geq 3$ $b_n \geq b_{n+1}$.

Logo a série converge por Leibniz //.

(*) Note que $\sum \frac{\log(n)}{n}$ diverge !!

~~Defina $b_n = 1 - n\,\text{sen}(\frac{1}{n})$~~

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ é convergente:

(9)

Considere $b_n = \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

1) $b_n \geq 0$

2) $\int_n^{n+1} \frac{1}{e^x x}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim b_n = 0$

$\frac{1}{e^x x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

3) $b_n \geq b_{n+1}$: Defina $f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$, então

$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x-1}}{x+1} \overset{?}{<} 0 \Leftarrow \frac{e^{-1}}{x+1} < \frac{1}{x}$ certo

4) por Leibniz a série converge!!.