MAE 224 - PROBABILIDADE II
Segunda Lista de Exercícios Extra Classe
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$.

Considere, para cada número natural m, o evento

$$A_k = \{w : |X_k - X| > \frac{1}{m}\}$$

Prove que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$.

Ache o limite X. Mostre que $E[X_n^k]$ não converge para $E[X^k]$ para $k = 1, 2, 3, ...$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Prove que $\max\{X_1, ..., X_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\max\{X_1, ..., X_n\} - \theta| > \varepsilon) = 0, \forall\varepsilon\varepsilon > 0.$$

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com segundo momento finito. Defina

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i.$$

Calcule $E[X_1]$ e prove que

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - E[X_1]| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com segundo momento finito. Defina

$$Z_n = (\pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Use a Lei dos Grandes Números e prove que

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - c| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Descubra o valor de c.