MAE 224 - PROBABILIDADE II
Segunda Lista de Exercícios Classe
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \exp[-(x-\theta)], \quad se \quad x \geq \theta \quad 0 \quad se \quad x < \theta$$

e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a X.

(a) Prove que

$$\lim_{n\to\infty} P(|\min\{X_1, ..., X_n\} - \theta| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(b) Considere, para cada número natural m, o evento

$$A_k = \{w : |\min\{X_1, ..., X_k\} - \theta| > \frac{1}{m}\}$$

Prove que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$.

Solução

(a) Observe que

$$P(|\min\{X_1, ..., X_n\} - \theta| > \varepsilon) =$$

$$P(\min\{X_1, ..., X_n\} - \theta < -\varepsilon) + P(\min\{X_1, ..., X_n\} - \theta > \varepsilon) =$$

$$P(\min\{X_1, ..., X_n\} < \theta - \varepsilon) + P(\min\{X_1, ..., X_n\} > \theta + \varepsilon) =$$

$$P(\min\{X_1, ..., X_n\} > \theta + \varepsilon) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i > \theta + \varepsilon) =$$

$$(P(X_1 > \theta + \varepsilon))^n = (e^{-\varepsilon})^n.$$

Observe que a terceira igualdade ocorre pois os X_i são maiores do que θ, a quinta e sexta igualdades valem pois os X_i são iid.

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|\min\{X_1,...,X_n\}-\theta|>\varepsilon) = \lim_{n\to\infty}(e^{-\varepsilon})^n = 0.$$

(b) Da parte (a), considerando $\varepsilon = \frac{1}{m}$, temos $P(A_k) = (e^{-\frac{1}{m}})^k$ e portanto, a soma da série geométrica é

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(e^{-\frac{1}{m}})^k = \frac{e^{-\frac{1}{m}}}{(1-e^{-\frac{1}{m}})} < \infty,$$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $E[X_n]$ converge para a constante c e $Var(X_n)$ converge para 0 quando n converge para ∞. Prove que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para c.

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Solução

Pela desigualdade de Chebychev temos

$$P(|X_n - E[X_n]| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2}.$$

Pela continuidade da medida de probabilidade temos

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = P(\lim_{n\to\infty} |X_n - c| > \varepsilon) =$$

$$P(\lim_{n\to\infty} |X_n - E[X_n]| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n - E[X_n]| > \varepsilon) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2} = 0.$$

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Mostre que $(X_n)_{n\geq 1}$é tal que

(a)

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

(b) Considere, para cada número natural m, o evento

$$A_k = \{w : |X_k| > \frac{1}{m}\}$$

Prove que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$.

Solução

(a) Calculemos

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_k = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

pois a série harmnica divergente.