

AULA 2 - Convergência e continuidade de medidas de probabilidades. Lema de Borel Cantelli

MAE0224 - PROBABILIDADE II

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Setembro de 2020

Convergência e continuidade de probabilidades

1. Definição. Uma função $f(x)$ definida no conjunto dos números reais a valores reais, é contínua em um número real a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{se } |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Uma condição equivalente em termos de sequência de números reais é:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a), \forall (a_n)_{n \geq 1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid \text{se } n \geq n_0 \rightarrow |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Convergência e continuidade de probabilidades

Exemplo 1 Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ . Defina os eventos

$A_n = \{X \in [0, \frac{n}{n+1}]\}$. Note que $(A_n)_{n \geq 1}$ é crescente e que $\lim A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \{X \in [0, 1)\}$. Portanto

$$P(\lim A_n) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda}.$$

Por outro lado,

$$P(A_n) = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}} = 1 - e^{-\lambda} = P(\lim A_n).$$

e podemos pensar que a medida de probabilidade é uma função de conjuntos, que é contínua. Este fato é verdadeiro.

Teorema 1 Seja $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de eventos em \mathfrak{S} , Se o limite da sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ existe, então

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n).$$

Convergência e continuidade de probabilidades

Prova

Se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos,
 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Definimos $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - A_{n-1}$ de
forma que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Portanto

$$\begin{aligned} P(\lim A_n) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) = \\ &= P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n - A_{n-1}) = P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \\ &= P(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) \end{aligned}$$

Convergência e continuidade de probabilidades

No caso em que a sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ é decrescente,
 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ e $(A_n^c)_{n \geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos
e $\lim A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c$.

Portanto

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) =$$
$$1 - P(\lim A_n^c) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(A_n^c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Convergência e continuidade de probabilidades

No caso geral temos

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \limsup P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \geq$$

$$\limsup P(A_n) \geq \liminf P(A_n) \geq \liminf P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) = \lim P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) =$$

$$P\left(\lim \bigcap_{k \geq n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k\right) = P(\liminf A_n).$$

Contudo, como por hipótese $\lim A_n$ existe,

$P(\limsup A_n) = P(\lim A_n) = P(\liminf A_n)$. Considerando tais igualdades e as desigualdades acima concluímos

$$P(\lim A_n) = \limsup P(A_n) = \liminf P(A_n) = \lim P(A_n).$$

Convergência e continuidade de probabilidades

Exemplo 2 Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F . Então $P(X = x) = 0, \forall x$.
Considere a sequência decrescente de intervalos, de

$$A_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$$

de forma que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$$

e

$$P(X \in \{x\}) = P\left(X \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x - \frac{1}{n} < X \leq x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n}\right)\right] = \\ F(x^+) - F(x^-) = 0.$$

Exemplo 3 Seja X uma variável aleatória. Então ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \mid P(|X| > k) < \varepsilon.$$

Prova

Como X assume valores nos reais, $P(|X| = \infty) = 0$. Considere a sequência decrescente $\{|X| > n\}$, de forma que

$$\{|X| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{|X| > n\}$$

Portanto

$$0 = P(|X| = \infty) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{|X| > n\}\right) = \\ P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \{|X| > n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X| > n).$$

Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ | se $n \geq k \rightarrow P(|X| > n) < \varepsilon$. Em particular tomamos $n = k$.

Exemplo 4 Seja $(A_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Então

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \Leftrightarrow \forall n, P(A_n) = 1.$$

A condição necessária é óbvia.

Provemos a condição suficiente por indução em n . Para $n = 2$ a prova é óbvia pois

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2).$$

Convergência e continuidade de probabilidades

Por hipótese de indução, suponha que a prova vale para n , isto é

$$\forall m, P(A_m) = 1, 1 \leq m \leq n \Rightarrow P\left(\bigcap_{m=1}^n A_m\right) = 1.$$

Provemos para $n + 1$: $P(\bigcap_{m=1}^{n+1} A_m) = P(\bigcap_{m=1}^n A_m \cap A_{n+1}) = 1$, quando $P(\bigcap_{m=1}^n A_m) = 1$ e $P(A_{n+1}) = 1$, o que ocorre, por hipótese de indução quando $P(A_m) = 1, \forall m, 1 \leq m \leq n$.

Consequentemente

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n A_i\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Lema de Borel Cantelli Seja $(A_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Então

I) Se $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n \text{ i.v.}) = 0$.

II) Se $\sum P(A_n) = \infty$ e os A_n são independentes, $\Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n \text{ i.v.}) = 1$.

Prova Provemos a parte I.

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

pois $\sum P(A_n) < \infty$. A desigualdade é devido a Bonferroni.

Provemos a parte II.

Devemos provar que $P(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k) = 1$ que, pelo exemplo, é equivalente provar que $P(\bigcup_{k \geq n} \bar{A}_k) = 1, \forall n \geq 1$ ou seja $P(\bigcap_{k \geq n} A_k^c) = 0, \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) &= P\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m P(A_k^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) \leq \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m e^{-P(A_k)} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^m P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0. \end{aligned}$$

Observe que, se os eventos são independentes, $P(A_n \text{ i.v.})$ é 0 ou 1.

Exemplo 5 Contudo, considere o espaço $((0, 1), \mathfrak{S}, P)$ onde P é uniforme no intervalo $(0, 1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad \text{se } w \in (0, \frac{1}{n}) \quad \text{e } 0 \quad \text{c.c.}$$

Observe que,

$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0) = 1$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Contudo as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \rightarrow X_{n-1} = 2^{n-1}$ e o Lema de Borel Cantelli não vale.

Exemplo 6 Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial padrão e seja a variável aleatória $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$. Note que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P\left(\frac{X_n}{\ln n} > \varepsilon\right) = P(X_n > \varepsilon \ln n) = e^{-\ln n^\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon},$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\varepsilon}$, que converge se $\varepsilon > 1$ ($P(A_n \text{ i.v.}) = 0$) e diverge se $\varepsilon \leq 1$ ($P(A_n \text{ i.v.}) = 1$)

Exemplo 7 Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$.

Sejam $A_n = \{X_n \in (0, \frac{1}{n}]\}$ e $B_n = \{X_n \in (0, \frac{1}{n^2}]\}$. Assim $P(A_n) = \frac{1}{n}$ e $P(B_n) = \frac{1}{n^2}$.

$P(A_n \text{ iv.}) = 1$ pois os A_n são indenpedentes e $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, (Série Harmônica).

$P(B_n \text{ iv.}) = 1$ pois os B_n são tais que $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, (Série de Dirichlet).