

## Viga sobre base elástica – soluções analíticas

Costa, H.B., Almeida Neto, E.S.

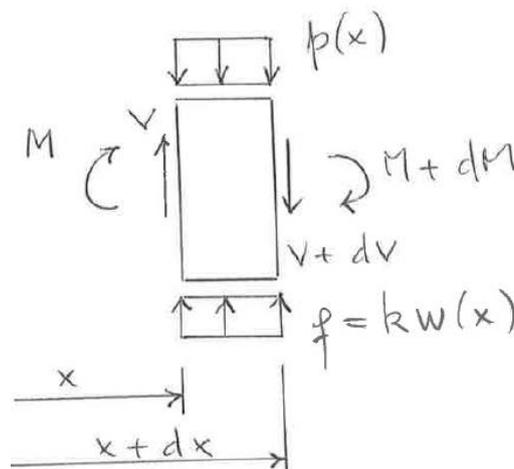
2017

### Formulação diferencial

A elasticidade da base é caracterizada pela força que, distribuída sobre uma área unitária, provoca um deslocamento unitário. Trata-se do *módulo da fundação*, denotado por  $k_0$ , e cuja unidade, no Sistema Internacional, é  $\text{N/m}^3$ .

Se  $b$  é a *largura* da viga, então a *rigidez* das molas de *Winkler* (rigidez por unidade de comprimento) será dada por  $k = k_0 b$  ( $\text{N/m}^2$ ).

Seja  $L$  o comprimento da viga,  $p = p(x)$  a carga distribuída e  $f = kw$  a reação das molas. O equilíbrio do elemento  $dx$  da viga fornece (como de costume, o eixo  $x$  é dirigido da esquerda para a direita e o eixo  $z$  de cima para baixo):



$$\frac{dV}{dx} = -p + kw \quad (\text{equilíbrio de forças}) \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (\text{equilíbrio de momentos}) \quad (2)$$

A equação diferencial da linha elástica se escreve como:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M \quad (3)$$

Portanto:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = p - kw \quad (4)$$

Quando não há carga distribuída ( $p = 0$ ) fica:

$$\boxed{E I \frac{d^4 w}{dx^4} + k w = 0} \quad (5)$$

Do Cálculo sabemos que a solução dessa equação homogênea é dada pela função exponencial:

$$w = e^{mx} \quad (6)$$

Introduzindo (6) em (5), vem:

$$E I m^4 e^{mx} = -k e^{mx}$$

Como o resultado deve valer para qualquer valor de  $x$ , fica:

$$E I m^4 = -k \quad \Rightarrow \quad m^4 = -\frac{k}{E I}$$

É fácil verificar que as raízes são:

$$m_1 = \lambda (1 + i)$$

$$m_2 = \lambda (-1 + i)$$

$$m_3 = \lambda (-1 - i)$$

$$m_4 = \lambda (1 - i)$$

Note-se que  $m_1 = -m_3$  e  $m_2 = -m_4$ . Além disso as raízes são, duas a duas, complexas conjugadas ( $m_1$  com  $m_4$  e  $m_2$  com  $m_3$ ).

A solução geral (6), portanto, toma a forma de uma combinação linear das soluções individuais:

$$w = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + A_3 e^{m_3 x} + A_4 e^{m_4 x} \quad (7)$$

O fator  $\lambda$ , dado por:

$$\boxed{\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E I}}} \quad (8)$$

é uma grandeza importante que influencia a forma da linha elástica, e é conhecido como a *característica* do sistema. A unidade de  $\lambda$ , no Sistema Internacional, é  $m^{-1}$ . O inverso de  $\lambda$  ( $1/\lambda$ ) é o *comprimento característico* do sistema.

O produto  $\lambda L$  é adimensional, e se conhece pelo nome de *parâmetro de rigidez* da viga. Quando  $\lambda L < 1$  a viga é dita *curta*, e se comporta como rígida. Neste caso o problema pode ser resolvido considerando apenas o equilíbrio. Para  $\lambda L > 4$  a viga é tida como de *comprimento infinito*, e a solução é mais simples, já que neste caso uma carga aplicada numa das extremidades não afeta a outra.

Para valores intermediários do parâmetro de rigidez ( $1 < \lambda L < 4$ ) temos as *verdadeiras* vigas finitas sobre apoio elástico, onde é preciso aplicar a teoria geral para se chegar à solução. Deve-se esclarecer, no entanto, que esses limites não são fixos, e variam de autor para autor.

Agora, usando as *fórmulas de Euler*:

$$e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$$

$$e^{-i\lambda x} = \cos \lambda x - i \sin \lambda x$$

e introduzindo novas constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , com:

$$C_1 = A_1 + A_4, \quad C_2 = i(A_1 - A_4), \quad C_3 = A_2 + A_3 \quad e \quad C_4 = i(A_2 - A_3)$$

podemos reescrever (7) numa forma mais conveniente:

$$\boxed{w = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x)} \quad (9)$$

Quando houver carga distribuída ( $p \neq 0$ ) é preciso ainda acrescentar, na solução geral, uma solução particular adequada. Nestas notas de aula não trataremos deste assunto.

À esta altura as derivadas sucessivas da linha elástica podem ser facilmente determinadas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{dw}{dx} &= e^{\lambda x} [C_1(\cos \lambda x - \sin \lambda x) + C_2(\cos \lambda x + \sin \lambda x)] + \\ &- e^{-\lambda x} [C_3(\cos \lambda x + \sin \lambda x) - C_4(\cos \lambda x - \sin \lambda x)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\lambda^2} \frac{d^2w}{dx^2} = -e^{\lambda x} (C_1 \sin \lambda x - C_2 \cos \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_3 \sin \lambda x - C_4 \cos \lambda x) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda^3} \frac{d^3w}{dx^3} &= -e^{\lambda x} [C_1(\cos \lambda x + \sin \lambda x) - C_2(\cos \lambda x - \sin \lambda x)] + \\ &+ e^{-\lambda x} [C_3(\cos \lambda x - \sin \lambda x) + C_4(\cos \lambda x + \sin \lambda x)] \end{aligned} \quad (12)$$

Lembrando que:

$$\frac{dw}{dx} = \tan \varphi \cong \varphi, \quad -EI \frac{d^2w}{dx^2} = M \quad e \quad -EI \frac{d^3w}{dx^3} = V$$

ficam disponíveis, então, as expressões gerais para o deslocamento, a rotação, o momento fletor e a força cortante, uma vez conhecidas as constantes de integração  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ .

Essas constantes podem ser levantadas por intermédio das condições de contorno. Das quatro grandezas envolvidas ( $w, \varphi, M$  e  $V$ ), num trecho onde  $w$  e suas derivadas são contínuas, geralmente duas são conhecidas em cada extremidade. Desse fato resulta um sistema de 4 equações algébricas a 4 incógnitas. Se houver mais de um trecho com essas características, divide-se a viga em vários trechos.

## Observação de ordem geral

O método apresentado acima é básico e resolve qualquer problema com esforços concentrados, mas tem a desvantagem de ser extremamente cansativo e laborioso, principalmente se a viga apresentar mais de um trecho.

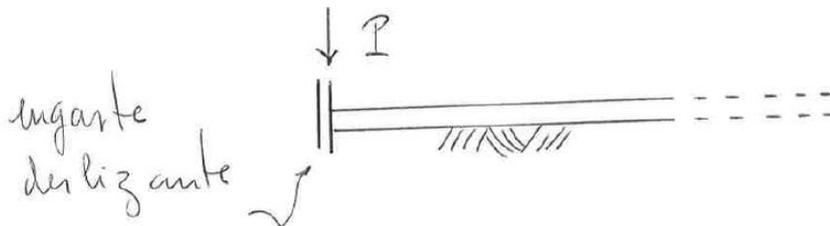
Há uma variante desse método básico, conhecida como *método das condições iniciais*, que simplifica um pouco o trabalho (principalmente nas vigas com vários trechos), ao dar uma interpretação física às constantes  $C_i$  de integração. Mesmo assim ainda é um processo trabalhoso.

Existe um terceiro método, muito engenhoso, chamado *método da superposição*. A sua essência repousa no fato de que, nas vigas de comprimento infinito, sujeitas a força concentrada ou momento aplicado, a solução é muito simples, como veremos nos dois primeiros exemplos a seguir. Tirando partido desta simplicidade podemos achar, mais facilmente, a solução para vigas finitas.

O método da superposição, bem como o das condições iniciais, fogem ao escopo destas notas de aula. O estudante mais interessado é remetido à bibliografia [1].

## Primeiro Exemplo

Seja uma viga de comprimento infinito, sujeita a uma carga  $2P$  aplicada num certo ponto. Tirando partido da simetria, podemos considerar apenas a metade do sistema sujeito à metade da carga, como se mostra na figura abaixo:



Na solução geral (9) temos que descartar o primeiro termo, pois ele cresce indefinidamente, enquanto que na realidade o deslocamento tende a zero quando nos afastamos da carga. Tal descarte equivale a adotar  $C_1 = C_2 = 0$ . Ficamos com:

$$w = e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (13)$$

As derivadas se escrevem como:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dw}{dx} = -e^{-\lambda x} [C_3 (\cos \lambda x + \sin \lambda x) - C_4 (\cos \lambda x - \sin \lambda x)] \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\lambda^2} \frac{d^2w}{dx^2} = e^{-\lambda x} (C_3 \sin \lambda x - C_4 \cos \lambda x) \quad (15)$$

$$\frac{1}{2\lambda^3} \frac{d^3w}{dx^3} = e^{-\lambda x} [C_3 (\cos \lambda x - \sin \lambda x) + C_4 (\cos \lambda x + \sin \lambda x)] \quad (16)$$

As condições de contorno são as seguintes:

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -C_3 + C_4 \quad (17)$$

$$V(0) = -P \quad \Rightarrow \quad w'''(0) = \frac{P}{EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\lambda^3} \left( \frac{P}{EI} \right) = C_3 + C_4 \quad (18)$$

As equações (17) e (18) fornecem:

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{4\lambda^3 EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_3 = C_4 = \frac{P\lambda}{k}} \quad (19)$$

Assim, a linha elástica fica:

$$\boxed{w = \frac{P\lambda}{k} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x)} \quad (20)$$

E as derivadas assumem a forma:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2P\lambda^2}{k} e^{-\lambda x} \sin \lambda x \quad (21)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{2P\lambda^3}{k} e^{-\lambda x} (\sin \lambda x - \cos \lambda x) \quad (22)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{4P\lambda^4}{k} e^{-\lambda x} \cos \lambda x \quad (23)$$

Finalmente, podemos calcular o deslocamento e o momento fletor na extremidade esquerda:

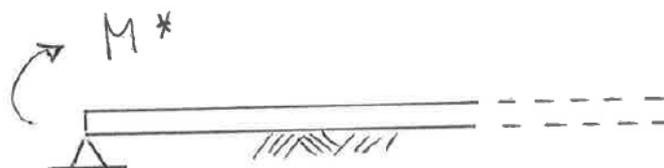
$$w(0) = \frac{P\lambda}{k} \quad (24)$$

$$M(0) = -EI w''(0) = -EI \left( -\frac{2P\lambda^3}{k} \right) = \frac{P}{2\lambda} \quad (25)$$

## Segundo Exemplo

No primeiro exemplo suponhamos que, em lugar da carga  $2P$ , houvesse um momento aplicado  $2M^*$ .

Em virtude da *antimetria* da carga, ficamos com:



As condições de contorno passam a ser:

$$w(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0} \quad (26)$$

$$M(0) = M^* \Rightarrow w''(0) = \frac{-M^*}{EI} \Rightarrow 2\lambda^2(-C_4) = \frac{-M^*}{EI} \Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{M^*}{2EI\lambda^2}} \quad (27)$$

Portanto, ficam definidas a linha elástica:

$$\boxed{w = \frac{M^*}{2EI\lambda^2} (e^{-\lambda x}) \sin \lambda x} \quad (28)$$

e suas derivadas:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M^*}{2EI\lambda} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (29)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M^*}{EI} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x) \quad (30)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{M^*}{EI} \lambda e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (31)$$

A rotação e a força cortante na extremidade da esquerda valem:

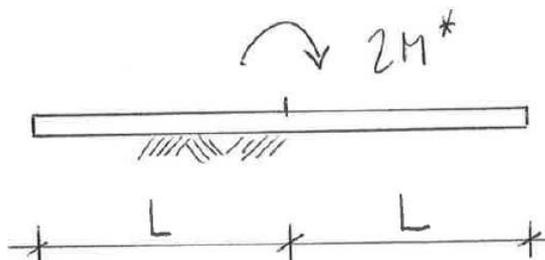
$$w'(0) = \frac{M^*}{2\lambda EI} \quad (32)$$

$$V(0) = -EI w'''(0) = -EI \frac{M^*}{EI} \lambda = -M^* \lambda \quad (33)$$

### Terceiro Exemplo

Seja a viga finita com extremidades livres da figura abaixo, de comprimento  $2L = 10$  m, e sujeita a um momento aplicado  $2M^* = 108\,000$  kN cm na seção central. A seção transversal é retangular, de base  $b = 24$  cm e altura  $h = 60$  cm. O material que compõe a viga tem um módulo de elasticidade longitudinal de valor  $E = 2\,500$  kN/cm<sup>2</sup>. O módulo da base elástica vale:

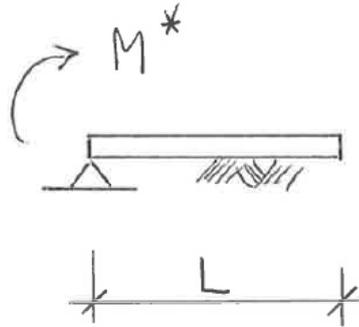
$$k_0 = 0,1125 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3}$$



Desprezando o peso próprio da viga, determinar a linha elástica, o campo de rotações, a distribuição de momentos fletores e forças cortantes, assim como a reação da fundação.

### Resolução

Considerando a simetria da estrutura e a antimetria do carregamento, passemos a estudar o seguinte caso equivalente:



Cálculos iniciais:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{24(60)^3}{12} = 432\,000 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad EI = 1,08 (10)^9 \text{ kN cm}^2$$

$$k = k_0 b = 0,1125 (24) \quad \Rightarrow \quad k = 2,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,005 \text{ cm}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda L = 2,5$$

Equação diferencial:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + k w = 0 \quad (34)$$

Solução geral ( $\lambda = 0,005 \text{ cm}^{-1}$ ):

$$w = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (35)$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0 \quad (36)$$

$$M(0) = M^* \quad (37)$$

$$V(L) = 0 \quad (38)$$

$$M(L) = 0 \quad (39)$$

Sendo  $M = -EI w''$  e  $V = -EI w'''$ , as condições acima ficam:

$$w(0) = 0 \quad (40)$$

$$w''(0) = -\frac{M^*}{EI} \quad (41)$$

$$w'''(L) = 0 \quad (42)$$

$$w''(L) = 0 \quad (43)$$

Usando as fórmulas (9), (11) e (12), as condições acima ficam, respectivamente:

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (44)$$

$$C_2 - C_4 = -\frac{M^*}{2EI\lambda^2} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & -e^{\lambda L} [C_1(\cos \lambda L + \sin \lambda L) - C_2(\cos \lambda L - \sin \lambda L)] + \\ & + e^{-\lambda L} [C_3(\cos \lambda L - \sin \lambda L) + C_4(\cos \lambda L + \sin \lambda L)] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$-e^{\lambda L} (C_1 \sin \lambda L - C_2 \cos \lambda L) + e^{-\lambda L} (C_3 \sin \lambda L - C_4 \cos \lambda L) = 0 \quad (47)$$

O sistema acima, de 4 equações, uma vez resolvido, levanta as constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ . Inicialmente, de (44) e (45) se obtêm, respectivamente:

$$C_3 = -C_1 \quad (48)$$

$$C_4 = C_2 + \frac{M^*}{2EI\lambda^2} \quad (49)$$

Injetando (48) e (49) em (46) e (47) resultam, respectivamente, após algumas passagens algébricas:

$$\begin{aligned} & C_1 [\cos \lambda L (e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) + \sin \lambda L (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L})] + \\ & - C_2 [\cos \lambda L (e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) - \sin \lambda L (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L})] = \frac{M^* e^{-\lambda L}}{2EI\lambda^2} (\cos \lambda L + \sin \lambda L) \end{aligned} \quad (50)$$

$$-C_1 \sin \lambda L (e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) + C_2 \cos \lambda L (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = \frac{M^* e^{-\lambda L}}{2EI\lambda^2} \cos \lambda L \quad (51)$$

Notemos, de passagem, um fato interessante: nas duas equações acima aparecem, naturalmente, o seno e o co-seno hiperbólicos do parâmetro de rigidez:

$$e^{\lambda L} + e^{-\lambda L} = 2 \cosh \lambda L$$

$$e^{\lambda L} - e^{-\lambda L} = 2 \sinh \lambda L$$

Continuando, o sistema de equações (50) e (51) se escreve, na forma de matrizes, como:

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{a} \quad (52)$$

sendo a matriz  $\mathbf{A}$  e os vetores  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{a}$  dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \lambda L (e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) + \sin \lambda L (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) & -\cos \lambda L (e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) + \sin \lambda L (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) \\ -\sin \lambda L (e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) & \cos \lambda L (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} = \frac{M^*}{2 E I \lambda^2} e^{-\lambda L} \begin{Bmatrix} \cos \lambda L + \sin \lambda L \\ \cos \lambda L \end{Bmatrix}$$

Para resolver (52) podemos aplicar o método de *Cramer*. O determinante da matriz  $\mathbf{A}$  vale:

$$D = e^{2\lambda L} - e^{-2\lambda L} - 4 \cos \lambda L \sin \lambda L \quad (53)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{M^*}{2 E I \lambda^2} \left( \frac{2 \cos^2 \lambda L}{D} \right)} \quad (54)$$

$$\boxed{C_2 = \frac{M^*}{2 E I \lambda^2} \left( \frac{1 + e^{-2\lambda L} + 2 \cos \lambda L \sin \lambda L}{D} \right)} \quad (55)$$

Finalmente, de (48) e (49) resultam, respectivamente:

$$\boxed{C_3 = -C_1} \quad (56)$$

$$\boxed{C_4 = C_2 + \frac{M^*}{2 E I \lambda^2}} \quad (57)$$

Considerando os dados numéricos do problema:

$$M^* = 54\,000 \text{ kN cm}$$

$$k = 2,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$E I = 1,08 (10)^9 \text{ kN cm}^2$$

$$\lambda = 0,005 \text{ cm}^{-1}$$

$$L = 500 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \lambda L = 2,5$$

podemos calcular as constantes, resultando:

$$\frac{M^*}{2 E I \lambda^2} = 1 \text{ cm}$$

$$D = 150,32426$$

$$C_1 = 0,0085392876 \text{ cm}$$

$$C_2 = 0,00031807021 \text{ cm}$$

$$C_3 = - 0,0085392876 \text{ cm}$$

$$C_4 = 1,00031807 \text{ cm}$$

Uma vez levantadas as constantes de integração, o problema está inteiramente resolvido, e podemos determinar qualquer grandeza que quisermos.

Por exemplo (verificar!):

$$w(L) = -0,031321042 \text{ cm} \quad (\text{para cima})$$

$$w'(0) = 0,0050885735 \text{ rad} \quad (\text{sentido horário})$$

A reação das molas na extremidade direita é dada por:

$$f(L) = k w(L) = 2,7 (- 0,031321042) = - 0,084566813 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \quad (\text{para baixo})$$

A pressão na base elástica na extremidade direita se calcula como:

$$k_0 w(L) = \frac{k}{b} w(L) = \frac{- 0,084566813}{24} = - 0,0035236172 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Para achar a força cortante na extremidade esquerda devemos calcular antes  $w'''(0)$ . De (12) vem:

$$\frac{1}{2\lambda^3} w'''(0) = - C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0,98355756 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow w'''(0) = 2,4588939 (10)^{-7} \text{ cm}^{-2}$$

Portanto:

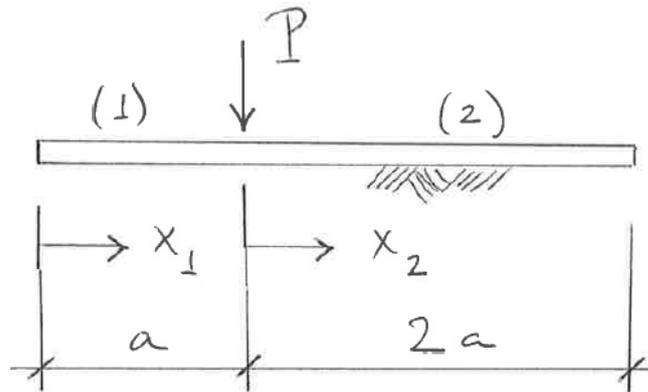
$$V(0) = - E I w'''(0) = - 265,56054 \text{ kN}$$

A reação de apoio tem esse mesmo valor, e é dirigida para baixo.

Todos os valores numéricos acima encontrados foram confirmados pelas tabelas [2] que constam nas referencias bibliográficas (o estudante deve verificar esse fato).

### Quarto Exemplo

Seja uma viga finita, com as extremidades livres, e sujeita a uma carga concentrada, como mostra a figura abaixo. O comprimento da viga é  $L = 3a$ .



Neste caso podemos dividir a viga em dois trechos, identificados como trecho (1) e trecho (2).

Para facilitar o cálculo, as origens dos trechos serão diferentes, e as respectivas abscissas denotadas por  $x_1$  e  $x_2$ . As linhas elásticas correspondem às funções  $w_1(x_1)$  e  $w_2(x_2)$ .

Para o trecho (1) temos a equação diferencial governante:

$$\boxed{EI \frac{d^4 w_1}{dx_1^4} + k w_1 = 0} \quad (58)$$

e a solução geral:

$$\boxed{w_1 = e^{\lambda x_1} (C_1 \cos \lambda x_1 + C_2 \sin \lambda x_1) + e^{-\lambda x_1} (C_3 \cos \lambda x_1 + C_4 \sin \lambda x_1)} \quad (59)$$

A característica  $\lambda$  da viga continua sendo dada por (8).

Para o trecho (2), analogamente:

$$\boxed{EI \frac{d^4 w_2}{dx_2^4} + k w_2 = 0} \quad (60)$$

$$\boxed{w_2 = e^{\lambda x_2} (D_1 \cos \lambda x_2 + D_2 \sin \lambda x_2) + e^{-\lambda x_2} (D_3 \cos \lambda x_2 + D_4 \sin \lambda x_2)} \quad (61)$$

Agora são 8 constantes de integração. Em compensação há 8 condições de contorno:

$$M_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_1''(0) = 0} \quad (62)$$

$$V_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_1'''(0) = 0} \quad (63)$$

$$M_2(2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_2''(2a) = 0} \quad (64)$$

$$V_2(2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_2'''(2a) = 0} \quad (65)$$

$$\boxed{w_1(a) = w_2(0)} \quad (66)$$

$$\boxed{w_1'(a) = w_2'(0)} \quad (67)$$

$$M_2(0) = M_1(a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_2''(0) = w_1''(a)} \quad (68)$$

$$V_2(0) = V_1(a) - P \quad \Rightarrow \quad \boxed{EI w_2'''(0) = EI w_1'''(a) + P} \quad (69)$$

Desenvolvendo as equações de (62) a (69) teremos um sistema de 8 equações algébricas a 8 incógnitas. O estudante pode continuar deste ponto, a título de exercício (basta montar as equações, não é preciso resolvê-las).

Uma observação interessante é que neste exemplo os dois trechos têm a mesma característica ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ), mas nada impediria que eles tivessem características diferentes.

## Referências Bibliográficas

[1] **Hetényi, M.I.**, *Beams on elastic foundation with applications in the fields of civil and mechanical engineering*, University of Michigan Press, 1974

[2] **Soares, C.A., Teramoto, R.I.**, *Linhas de influencia para vigas finitas sobre apoio elástico com diversas condições de extremidade*, São Paulo FCA, 1981