MAE 224 - PROBABILIDADE II
Primeira Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

Observação importante: Na aula 2 provaremos o Lema da continuidade da probabilidade, isto é

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de eventos tais que $lim_{n\to\infty} A_n$ existe, então

$$lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(lim_{n\to\infty} A_n).$$

Use o lema para fazer os exercícios 1 e 2 .

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuições geométrica de parâmetro p. Prove que, com probabilidade 1, somente um número finito dos X_n são maiores do que n.

2) Seja X uma variável aleatória positiva e $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas por

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{X}{1+X})^{k-1}, \quad n \geq 1.$$

Considere a sequência $(A_n)_{n\geq 0}$ com $A_n = \{X_n > \frac{1}{m}\}, m \in N$. Prove que $P(A_n i.v.) = 1$.

3) Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de eventos, O limite superior e o limite inferior de $(A_n)_{n\geq 1}$ também são eventos. Interprete analiticamente o significado do $\limsup A_n$ e $\liminf A_n$. Prove que $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

4) Seja X uma variável aleatória com função de distribuição absolutamente contínua F e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a X. Defina $Y_n = n[1 - F(M_n)]$, onde $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

a) Qual a função de distribuição $G_n(y)$ de Y_n?

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} G_n(y)$.