

# Tema 2

## Hierarquia de Chomsky/ Linguagens regulares

Professora:

Ariane Machado Lima

# Vídeo 1

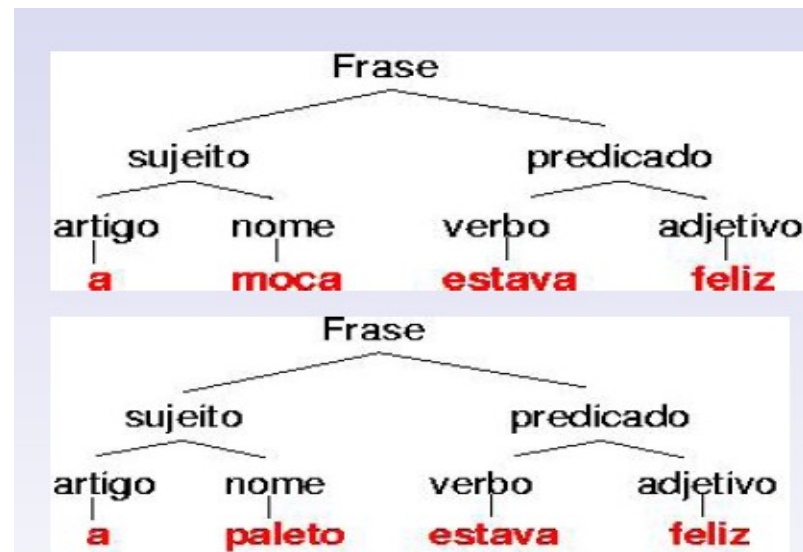
## **Gramáticas - Conceitos Básicos e Hierarquia de Chomsky**

Professora:

Ariane Machado Lima

# Gramáticas

Frase	→	sujeito	predicado
sujeito	→	artigo	nome
artigo	→	<b>a</b>	
artigo	→	<b>o</b>	
nome	→	<b>paletó</b>	
nome	→	<b>moça</b>	
nome	→	<b>dia</b>	
predicado	→	verbo	adjetivo
verbo	→	<b>é</b>	
verbo	→	<b>estava</b>	
adjetivo	→	<b>feliz</b>	
adjetivo	→	<b>azul</b>	

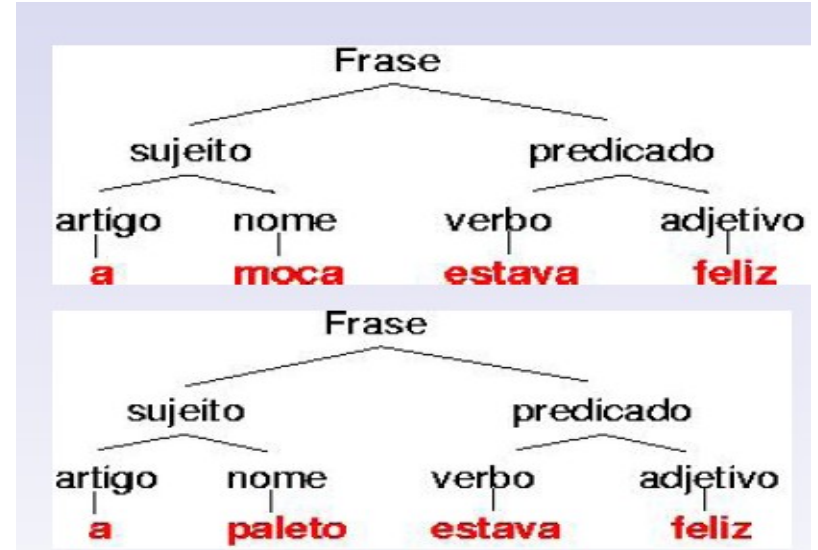


# Gramáticas

conjunto de produções

Frase	→	sujeito	predicado
sujeito	→	artigo	nome
artigo	→	a	
artigo	→	o	
nome	→	paletó	
nome	→	moça	
nome	→	dia	
predicado	→	verbo	adjetivo
verbo	→	é	
verbo	→	estava	
adjetivo	→	feliz	
adjetivo	→	azul	

símbolo inicial



símbolos não-terminais

símbolos terminais

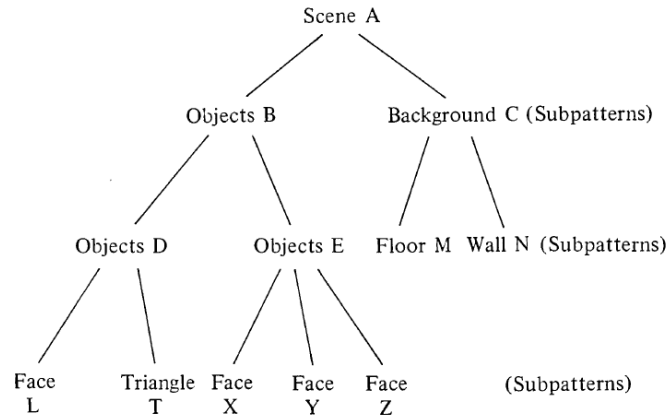
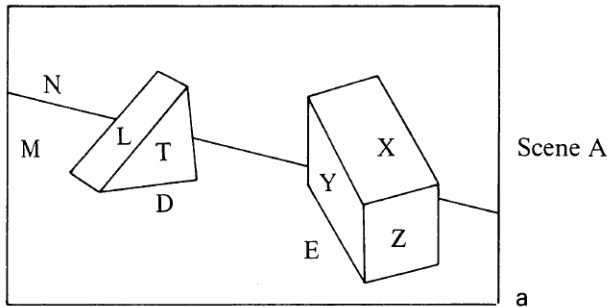
# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de seqüências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex1: seqüências de sítios de ligação de um dado fator de transcrição

.TTATCA|  
TTATCT|  
CTATAA|  
.CTATCT|  
.CTATAA|  
TGGTCA|  
TTGTAA|  
TTATCT|  
TTATCT|  
TTATCA|  
CTATCT|  
CTATAA|  
TTATCC|

# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de seqüências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: seqüências que representam imagens que seguem um padrão

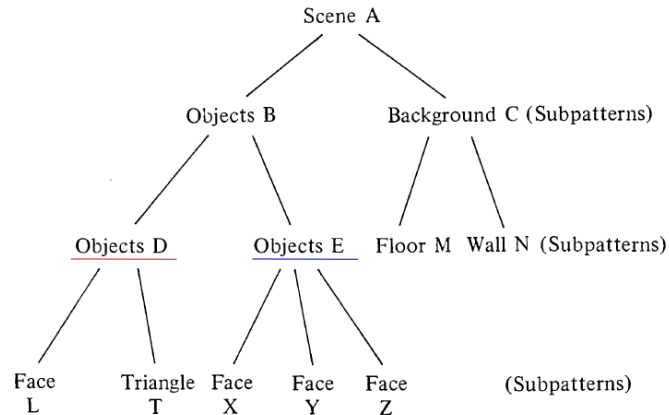
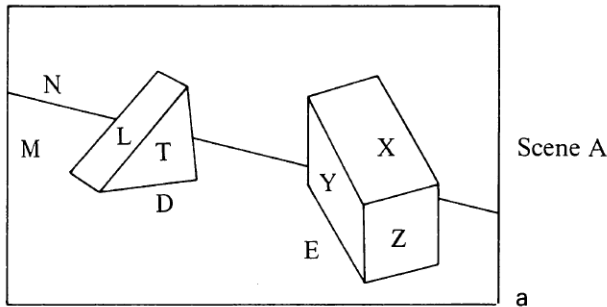


<Scene A> → <Objects B> <Background C>  
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>  
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>  
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>  
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

$((((LT)(XYZ))(MN)))$

# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de seqüências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: seqüências que representam imagens que seguem um padrão

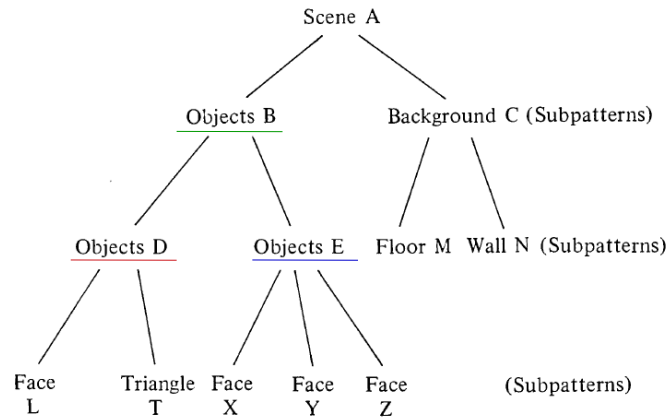
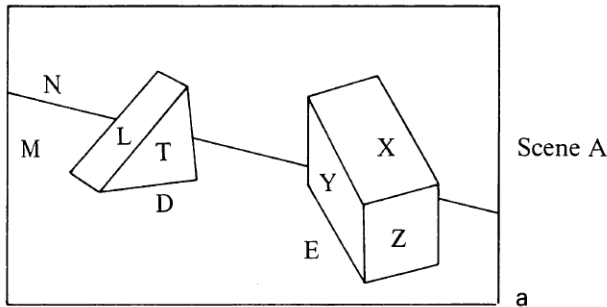


<Scene A> → <Objects B> <Background C>  
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>  
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>  
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>  
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

$((((LT)(XYZ))(MN)))$

# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de seqüências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: seqüências que representam imagens que seguem um padrão



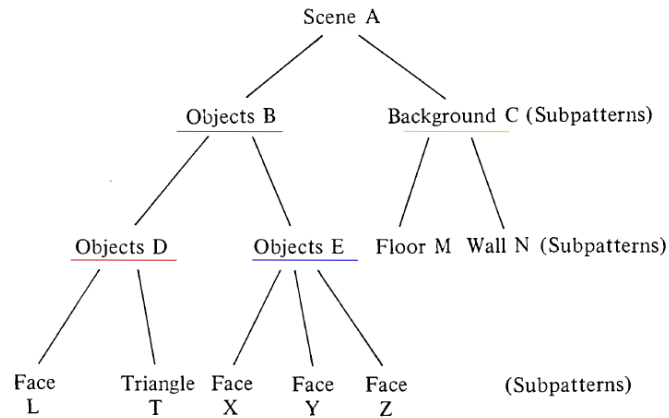
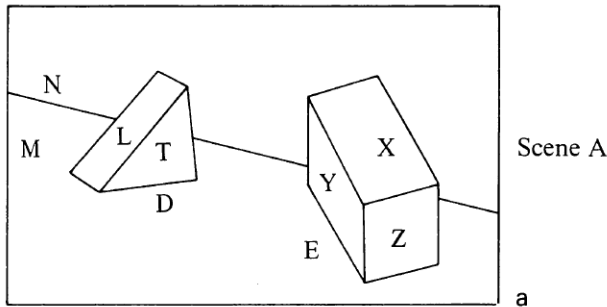
<Scene A> → <Objects B> <Background C>  
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>  
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>  
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>  
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

$((((LT)(XYZ)))(MN))$



# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de seqüências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: seqüências que representam imagens que seguem um padrão

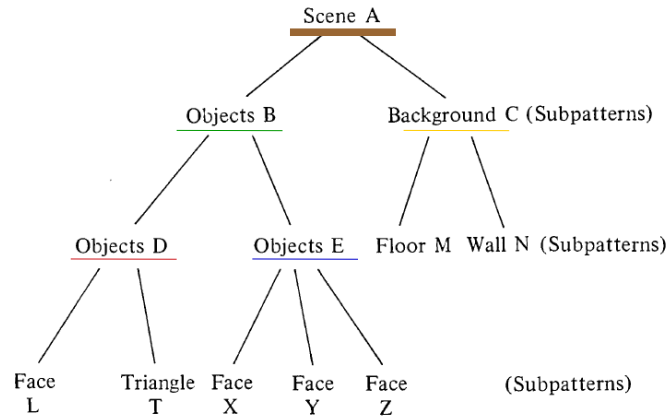
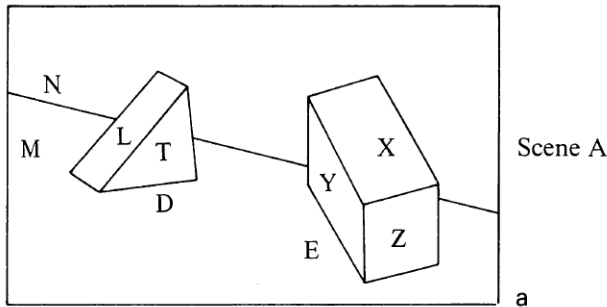


<Scene A> → <Objects B> <Background C>  
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>  
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>  
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>  
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

$((((LT)(XYZ))(MN)))$

# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de seqüências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: seqüências que representam imagens que seguem um padrão



<Scene A> → <Objects B> <Background C>  
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>  
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>  
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>  
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

$((((LT)(XYZ))(MN)))$

# Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- A linguagem pode ser infinita (ex: todas as sequências de dígitos que começam com 1), mas pode ser representada por uma gramática finita (conjunto finito de elementos)
- Pode ser definida pelo especialista
- Pode ser aprendida (inferência gramatical)
- Pode enumerar (gerar) sequências desse padrão
- Pode ser utilizada para analisar se uma dada sequência pertence a esse padrão (classificação)

Agora a parte “chata”...  
algumas definições formais

# Operador \* e variantes

- 0 ou mais concatenações de símbolos do conjunto ao qual o operador está sendo aplicado
- Ex:  $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  e  $L = \{a,b,c,\dots,z,A,B,C,\dots,Z\}$ 
  - $D^*$ : 0 ou mais dígitos
  - Um número segue o padrão  $DD^*$  (ou pertence ao conjunto  $DD^*$ )
  - Uma variável (de uma dada linguagem de programação) poderia ser definida como uma cadeia que segue o padrão  $L(D \cup L)^*$
- $+$ : abreviação para 1 ou mais
- $n$ :  $n$  concatenações
- Ex:
  - $D^+ = DD^*$
  - $D^nL^n$ :  $n$  dígitos seguidos de  $n$  letras (mesmo número de dígitos e letras, mas todos os dígitos vêm antes)

# Linguagem e alfabeto

- Uma **linguagem** é um conjunto de cadeias sobre um conjunto  $\Sigma$  de símbolos (isto é, um subconjunto de  $\Sigma^*$ )
- $\Sigma$  é normalmente chamado de **alfabeto** (conjunto de símbolos que aparecem nas suas cadeias de interesse). Ex:
  - $\Sigma = \{A, C, G, T\}$  para sequências de DNA
  - $\Sigma = \{0,1\}$  para representar pixels de uma imagem em preto e branco
  - $\Sigma =$  cada caracter digitável em um programa de computador
  - $\Sigma =$  as várias palavras possíveis de um idioma
  - ...
- $\epsilon$  ou  $\lambda$  : string vazia (corresponde a "") - não pertence a  $\Sigma$  (mas pertence a  $\Sigma^*$ )
- A linguagem é o que se quer representar (cada classe)

# Gramáticas

- Definição: uma **gramática**  $G$  é uma quádrupla  $(V, \Sigma, S, P)$ , na qual
  - $V$  é o conjunto de símbolos não-terminais (ou variáveis)
  - $\Sigma$  é o conjunto de símbolos terminais
  - $S$  é o símbolo inicial
  - $P$  é o conjunto de produções da forma
$$(\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^* \rightarrow (\Sigma \cup V)^*$$

# Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática  $G$  é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - $S$  (símbolo inicial de  $G$ ) é uma forma sentencial
  - Sejam  $\alpha\rho\beta$  uma forma sentencial de  $G$  e  $\rho \rightarrow \gamma$  uma produção de  $G$ . Então  $\alpha\gamma\beta$  é também uma forma sentencial de  $G$ .

$(\alpha, \beta, \gamma \in (\Sigma \cup V)^*$  e  $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*$ )

Ex:

$\langle \text{Frase} \rangle \rightarrow \langle \text{sujeito} \rangle \langle \text{predicado} \rangle$

“ $\langle \text{Frase} \rangle$ ” é uma forma sentencial

Então “ $\langle \text{sujeito} \rangle \langle \text{predicado} \rangle$ ” também é



# Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática  $G$  é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - $S$  (símbolo inicial de  $G$ ) é uma forma sentencial
  - Sejam  $\alpha\rho\beta$  uma forma sentencial de  $G$  e  $\rho \rightarrow \gamma$  uma produção de  $G$ . Então  $\alpha\gamma\beta$  é também uma forma sentencial de  $G$ .

$(\alpha, \beta, \gamma \in (\Sigma \cup V)^*$  e  $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*$ )

- **Derivação direta:**

- $\alpha\rho\beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$

Ex:

$\langle \text{predicado} \rangle \rightarrow \langle \text{verbo} \rangle \langle \text{adjetivo} \rangle$

a moça  $\langle \text{predicado} \rangle \Rightarrow$  a moça  $\langle \text{verbo} \rangle \langle \text{adjetivo} \rangle$

# Gramáticas

- **Derivação**: aplicação de zero ou mais derivações diretas
  - $\alpha \Rightarrow^* \mu$
  - isto é,  $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \dots \Rightarrow \mu$
- Uma cadeia  $w$  ( $w \in \Sigma^*$ ) é uma **sentença** de  $G$  se  $S \Rightarrow^* w$  ( $S$  sendo o símbolo inicial)
- Linguagem **gerada** por  $G$ :

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}$$

# Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$ , onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$ 
    - $S \rightarrow 0S33$
    - $S \rightarrow A$
    - $A \rightarrow 12$
    - $A \rightarrow \epsilon$

# Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$ , onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$ 
    - $S \rightarrow 0S33$
    - $S \rightarrow A$
    - $A \rightarrow 12$
    - $A \rightarrow \varepsilon$
- Ex de formas sentenciais:  
 $S, 0S33, 00S3333, 00A3333$
- $0S33 \Rightarrow 00S3333$
- $0S33 \Rightarrow^* 00A3333$
- $0S33 \Rightarrow^* 0S33$
- Ex de sentenças:  
 $00123333, 12, \varepsilon$
- $L(G) =$

# Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$ , onde

- $V = \{S, A\}$

- $\Sigma = \{0,1,2,3\}$

- $S = S$

- $P = \{$

- $S \rightarrow 0S33$

- $S \rightarrow A$

- $A \rightarrow 12$

- $A \rightarrow \varepsilon$

- $\}$

- Ex de formas sentenciais:

$S, 0S33, 00S3333, 00A3333$

- $0S33 \Rightarrow 00S3333$

- $0S33 \Rightarrow^* 00A3333$

- $0S33 \Rightarrow^* 0S33$

- Ex de sentenças:

$00123333, 12, \varepsilon$

- $L(G) = \{0^m 1^n 2^n 3^{2m} \mid m \geq 0 \text{ e } n = 0 \text{ ou } n = 1\}$

# Gramáticas - Simplificação

- $G = (V, \Sigma, S, P)$ , onde

- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
- $S = S$
- $P = \{$ 
  - $S \rightarrow 0S33$
  - $S \rightarrow A$
  - $A \rightarrow 12$
  - $A \rightarrow \varepsilon$ $\}$

- $G = (V, \Sigma, S, P)$ , onde

- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
- $S = S$
- $P = \{$ 
  - $S \rightarrow 0S33 \mid A$
  - $A \rightarrow 12 \mid \varepsilon$ $\}$

# Gramáticas

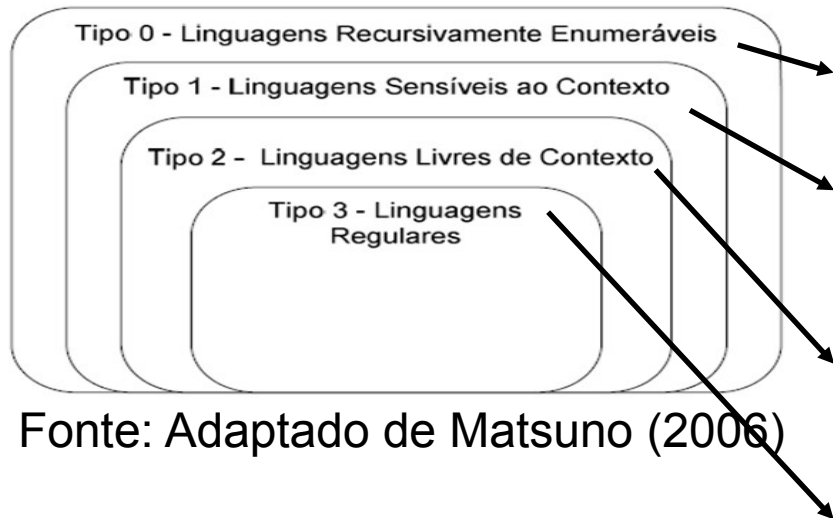
- Gramáticas são dispositivos **geradores** (geram cadeias)
- Há dispositivos formais equivalentes (ex: autômatos, máquinas de Turing) que são **reconhecedores** (reconhecem se uma cadeia pertence à linguagem)
- Dada uma cadeia  $w$ , reconhecer se  $w \in L(G)$  é um processo chamado **análise sintática**
- Dependendo do formato das produções, a análise sintática pode ser mais ou menos complexa

# Hierarquia de Chomsky

- Hierarquia das linguagens em classes de acordo com a sua complexidade relativa (Noam Chomsky, 1956)
- Cada classe de linguagem pode ser gerada por um tipo de gramática (formato das produções)
- Cada tipo de gramática tem uma complexidade de análise sintática diferente
- Importância na prática: dada uma linguagem, saber qual o dispositivo mais eficiente para análise sintática



# Hierarquia de Chomsky



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)

Linguagem	Autômato	Gramática	Reconhecimento
Recursivamente enumerável	Máquina de Turing com fita infinita 	Irrestrita $Baa \rightarrow A$	Indecidível 
Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita finita 	Sensível ao contexto $At \rightarrow aA$	NP-Completo 
Livre de contexto	Autômato de pilha 	Livre de contexto $S \rightarrow gSc$	Polinomial 
Regular	Autômato finito 	Regular $A \rightarrow cA$	Linear 

Fonte: Adaptado de Searls (2002)

# Hierarquia de Chomsky

$\alpha \rightarrow \beta$

Linguagens irrestritas  
(tipo 0)

$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$   
 $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

Linguagens sensíveis ao contexto  
(tipo 1)

$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$   
 $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$   
 $|\alpha| \leq |\beta|$

Linguagens livres de contexto  
(tipo 2)

$\alpha \in V$   
 $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

Linguagens regulares  
(tipo 3)

$\alpha \in V$

$\beta \in \Sigma_\epsilon, \beta \in V, \beta \in (V\Sigma \text{ ou } \Sigma V)$

**Fim do vídeo 1**

**Gramáticas - Conceitos Básicos  
e Hierarquia de Chomsky**

Professora:

Ariane Machado Lima

# Vídeo 2

## Gramáticas regulares

Professora:

Ariane Machado Lima

# Hierarquia de Chomsky

$$\alpha \rightarrow \beta$$

Linguagens irrestritas  
(tipo 0)

$$\alpha \in (VU\Sigma)^*V(VU\Sigma)^*$$
$$\beta \in (VU\Sigma)^*$$

Linguagens sensíveis ao contexto  
(tipo 1)

$$\alpha \in (VU\Sigma)^*V(VU\Sigma)^*$$
$$\beta \in (VU\Sigma)^*$$
$$|\alpha| \leq |\beta|$$

Linguagens livres de contexto  
(tipo 2)

$$\alpha \in V$$
$$\beta \in (VU\Sigma)^*$$

Linguagens regulares  
(tipo 3)

$$\alpha \in V$$
$$\beta \in \Sigma_\varepsilon, \beta \in V, \beta \in (V\Sigma \text{ ou } \Sigma V)$$

# Gramáticas regulares

Uma gramática é **regular** se ela for **linear à esquerda** ou **linear à direita**

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

S



# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

Linear à direita:

$P = \{S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

$S$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow 1S$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow 1S \Rightarrow 11S$

# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow 1S \Rightarrow 11S \Rightarrow 110S$



# Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in V\Sigma$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$  ou  $\beta = \varepsilon$  ou  $\beta \in V$  ou  $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

Derivação da cadeia 1101

$S \Rightarrow 1S \Rightarrow 11S \Rightarrow 110S \Rightarrow 1101$

# Gramáticas regulares

- Duas gramáticas são **equivalentes** se elas geram exatamente a mesma linguagem
- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Uma **linguagem é regular** se e somente se ela é gerada por uma gramática regular (ou seja, por uma gramática linear à esquerda ou à direita)

# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{$$

$$\Sigma =$$

$$S =$$

# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1,$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1,$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow$$

# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1,$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$$

# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1,$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$$

$$S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$$

$$S_4 \rightarrow gS_6 \mid tS_7$$

$$S_6 \rightarrow a \mid g$$

# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$$

$$S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$$

$$S_4 \rightarrow gS_6 \mid tS_7$$

$$S_6 \rightarrow a \mid g$$

$$S_7 \rightarrow a$$

$$S_5 \rightarrow gS_8$$

$$S_8 \rightarrow a$$

$$S_3 \rightarrow gS_9$$

$$S_9 \rightarrow aS_{10}$$

$$S_{10} \rightarrow g$$

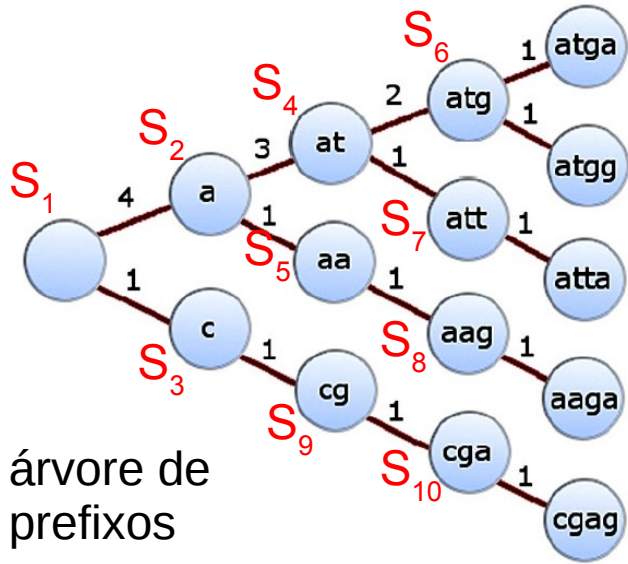
}



# Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



árvore de prefixos

adaptado de:

Genetics and Molecular Research 6 (1): 105-115 (2007)

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$$

$$S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$$

$$S_4 \rightarrow gS_6 \mid tS_7$$

$$S_6 \rightarrow a \mid g$$

$$S_7 \rightarrow a$$

$$S_5 \rightarrow gS_8$$

$$S_8 \rightarrow a$$

$$S_3 \rightarrow gS_9$$

$$S_9 \rightarrow aS_{10}$$

$$S_{10} \rightarrow g$$

# Exemplo

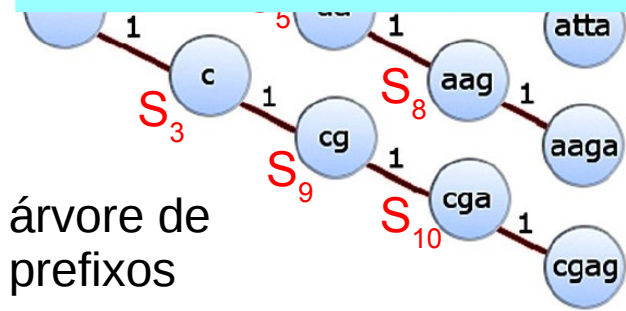
Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3 \\ S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$$

Conjuntos de sítios de ligação de fatores de transcrição são linguagens regulares



$$S_3 \rightarrow gS_9$$

$$S_9 \rightarrow aS_{10}$$

$$S_{10} \rightarrow g$$

}

# Observação

E se eu projetar essa gramática?

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_2$$

$$S_2 \rightarrow tS_3 \mid aS_3 \mid gS_3$$

$$S_3 \rightarrow tS_4 \mid aS_4 \mid gS_4$$

$$S_4 \rightarrow a \mid g$$

}

# Observação

E se eu projetar essa gramática?

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

$$G = \{V, \Sigma, S, P\}$$

$$V = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$$

$$\Sigma = \{a, c, g, t\}$$

$$S = S_1$$

$$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_2$$

$$S_2 \rightarrow tS_3 \mid aS_3 \mid gS_3$$

$$S_3 \rightarrow tS_4 \mid aS_4 \mid gS_4$$

$$S_4 \rightarrow a \mid g$$

}

A linguagem gerada por essa gramática incluirá outras sequências, por exemplo ctga

**Fim do vídeo 2**

**Gramáticas regulares**

Professora:

Ariane Machado Lima

# Vídeo 3

## **Autômatos Finitos Determinísticos**

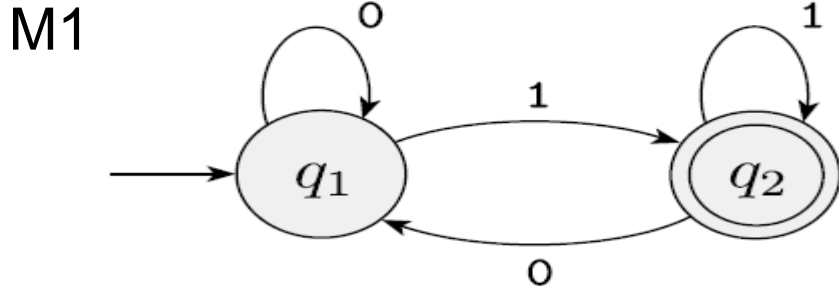
Professora:  
Ariane Machado Lima

# Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares (prova mais à frente).
- Enquanto uma gramática regular gera cadeias de uma linguagem  $L$ , um autômato finito (para  $L$ ) é capaz de analisar uma dada cadeia de entrada  $w$  e aceitá-la se  $w \in L$  ou rejeitá-la caso contrário (classificação).

# Autômatos finitos

- Um autômato finito pode ser definido por um **diagrama de estados**



## Processo de reconhecimento:

Dados um autômato M e uma cadeia w:

- comece pelo estado inicial
- faça a transição de estados a cada símbolo lido (da cadeia de entrada w)
- ao finalizar a leitura, se M parou em um estado de aceitação aceite, e rejeite caso contrário

**Círculos:** estados

**Círculos duplos:** estados finais ou de aceitação

**Seta sem início** (somente uma): indica quem é o estado inicial

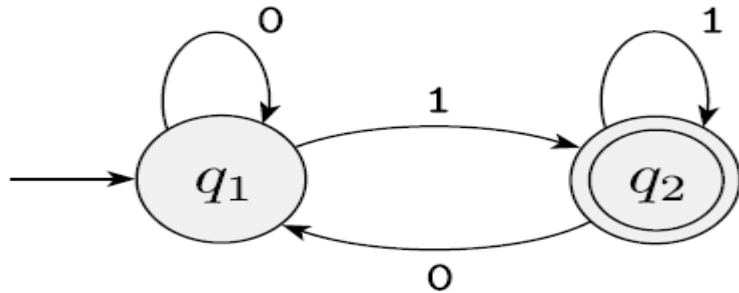
**Setas entre estados:** define a transição entre dois estados após a leitura do símbolo que está sobre a seta



# Autômatos finitos

- Um autômato finito pode ser definido por um **diagrama de estados**

M1



## Processo de reconhecimento:

Dados um autômato M e uma cadeia w:

- comece pelo estado inicial
- faça a transição de estados a cada símbolo lido (da cadeia de entrada w)
- ao finalizar a leitura, se M parou em um estado de aceitação aceite, e rejeite caso contrário

Exemplos de cadeias w aceitas pelo autômato M1:

1, 01, 11, 001, 00000001, 1101111, ...

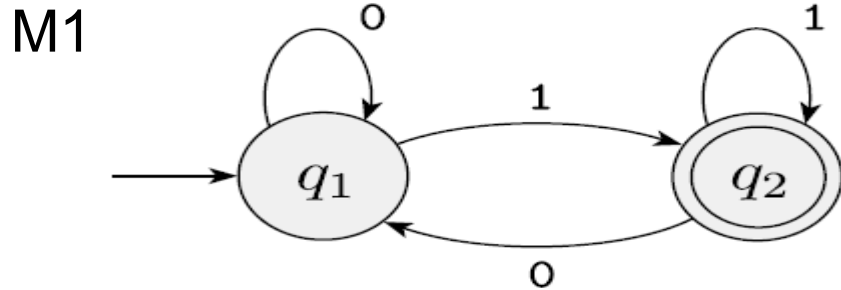
Exemplos de cadeias w NÃO aceitas pelo autômato M1:

0, 10, 110, 000, 0001010, 1111110,  $\epsilon$ , ...

Cadeia vazia ("")

# Autômatos finitos

- Um autômato finito pode ser definido por um **diagrama de estados**



## Processo de reconhecimento:

Dados um autômato M e uma cadeia w:

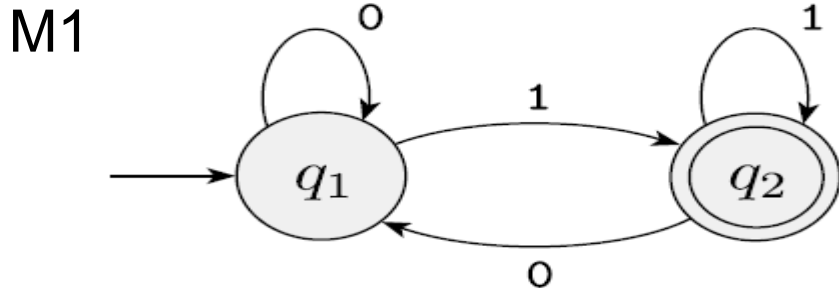
- comece pelo estado inicial
- faça a transição de estados a cada símbolo lido (da cadeia de entrada w)
- ao finalizar a leitura, se M parou em um estado de aceitação aceite, e rejeite caso contrário

**Que tipos de cadeias esse autômato M1 aceita?**

Sequência binárias (de tamanho  $\geq 1$ ) que terminam em 1

# Autômatos finitos

- Um autômato finito pode ser definido por um **diagrama de estados**



## Processo de reconhecimento:

Dados um autômato M e uma cadeia w:

- comece pelo estado inicial
- faça a transição de estados a cada símbolo lido (da cadeia de entrada w)
- ao finalizar a leitura, se M parou em um estado de aceitação aceite, e rejeite caso contrário

**Que linguagem esse autômato M1 reconhece?**

Sequência binárias (de tamanho  $\geq 1$ ) que terminam em 1

# Exemplo

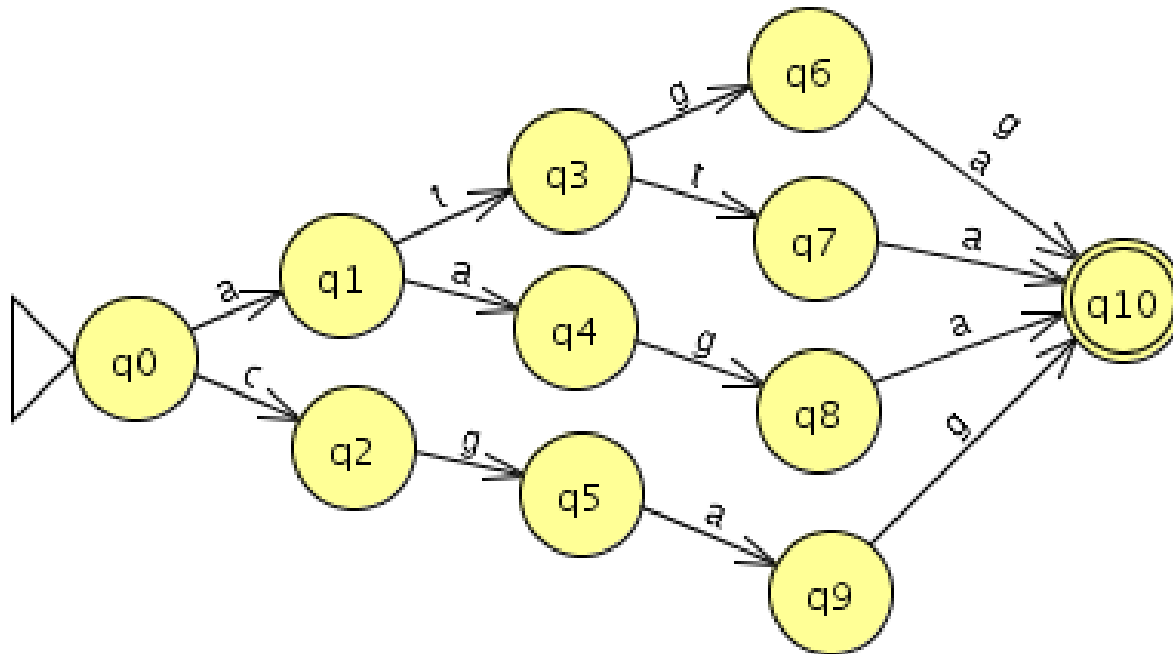
Vamos projetar um autômato para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

# Exemplo

Vamos projetar um autômato para reconhecer essa linguagem:

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



# Definição formal de Autômatos Finitos

- Há dois tipos de autômatos finitos:
  - Determinísticos (AFD)
  - Não-determinísticos (AFN)

# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Definição formal:

Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Definição formal:

Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

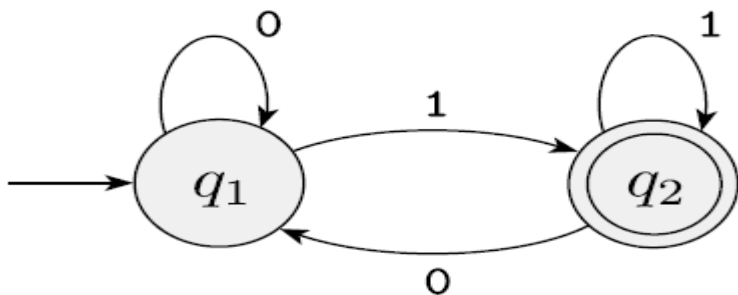
1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup> total (definida para cada ponto do domínio)
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

potencialmente vazio



# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Dado um estado atual e um símbolo de entrada sabemos exatamente para onde ir (está determinado)



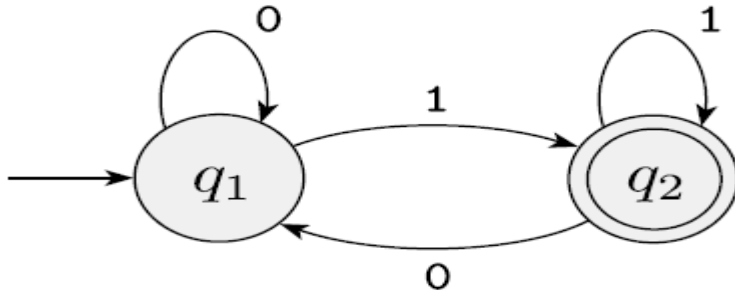
Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

Para cada par (estado atual, próximo símbolo)  
está DETERMINADO qual é o próximo estado

# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Dado um estado atual e um símbolo de entrada sabemos exatamente para onde ir (está determinado)



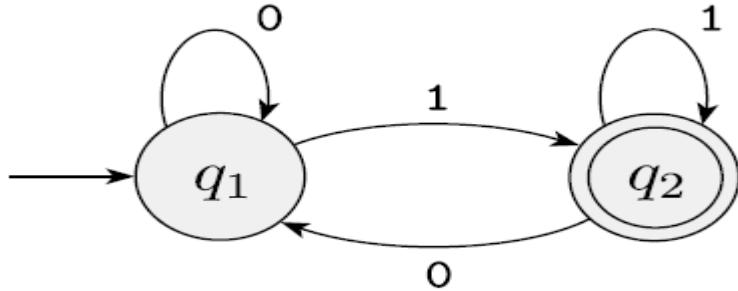
Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

Note que para um AFD deve haver, saindo de cada estado, uma aresta para CADA símbolo do alfabeto

# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Qual a definição formal do autômato M1?

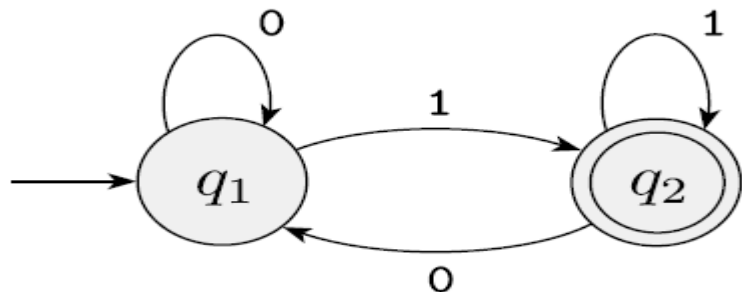


Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Qual a definição formal do autômato M1?



$$Q = \{q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\delta(q_1, 0) = q_1$$

$$\delta(q_1, 1) = q_2$$

$$\delta(q_2, 0) = q_1$$

$$\delta(q_2, 1) = q_2$$

$$q_0 = q_1$$

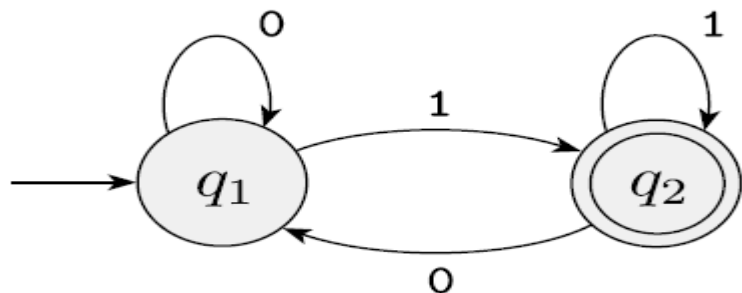
$$F = \{q_2\}$$

Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

# Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Qual a definição formal do autômato M1?



Um *autômato finito* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito conhecido como os *estados*,
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado o *alfabeto*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é a *função de transição*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  é o *estado inicial*, e
5.  $F \subseteq Q$  é o *conjunto de estados de aceitação*.<sup>2</sup>

$$Q = \{q1, q2\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\delta(q1, 0) = q1$$

$$\delta(q1, 1) = q2$$

$$\delta(q2, 0) = q1$$

$$\delta(q2, 1) = q2$$

$Q \setminus \Sigma$	0	1
q1	q1	q2
q2	q1	q2

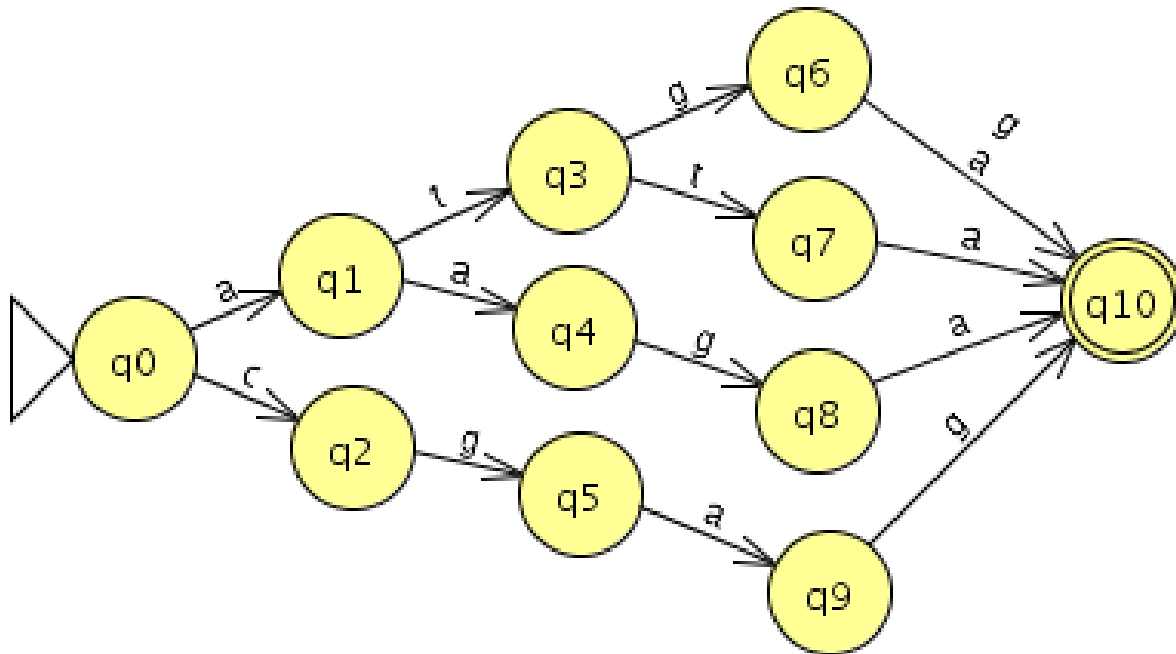
$$q_0 = q1$$

$$F = \{q2\}$$

# Exemplo

Este autômato é um AFD?

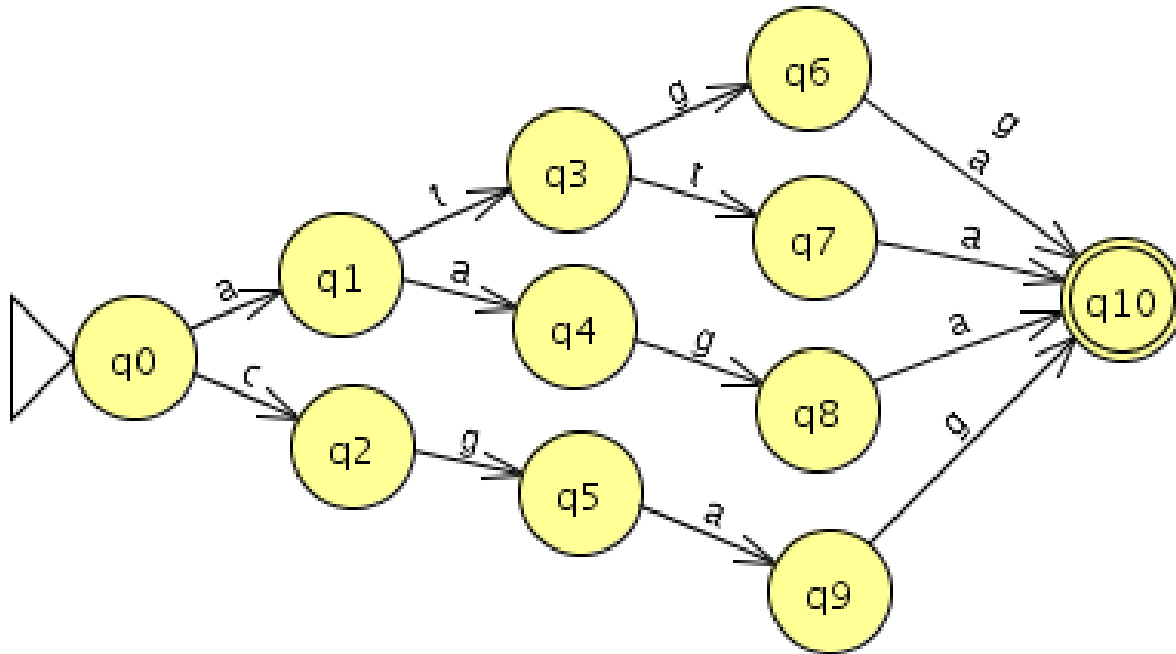
atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



# Exemplo

Este autômato é um AFD?

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

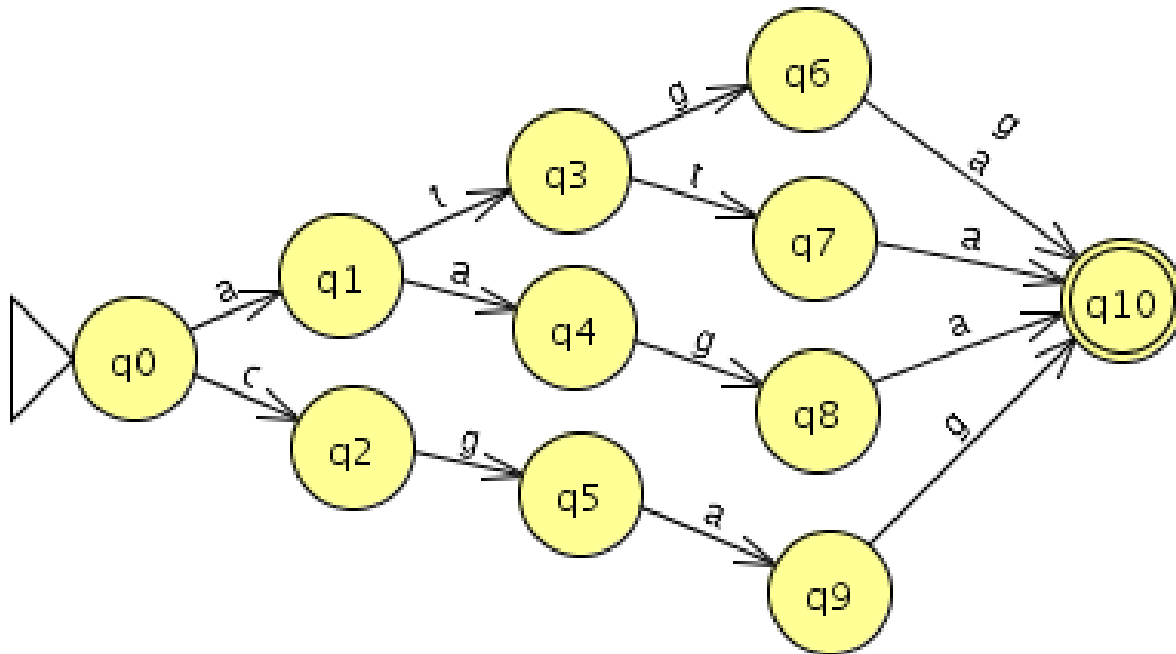


Q \ $\Sigma$	a	c	g	t
q0				
q1				
q2				
q3				
q4				
q5				
q6				
q7				
q8				
q9				
q10				

# Exemplo

Este autômato é um AFD?

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



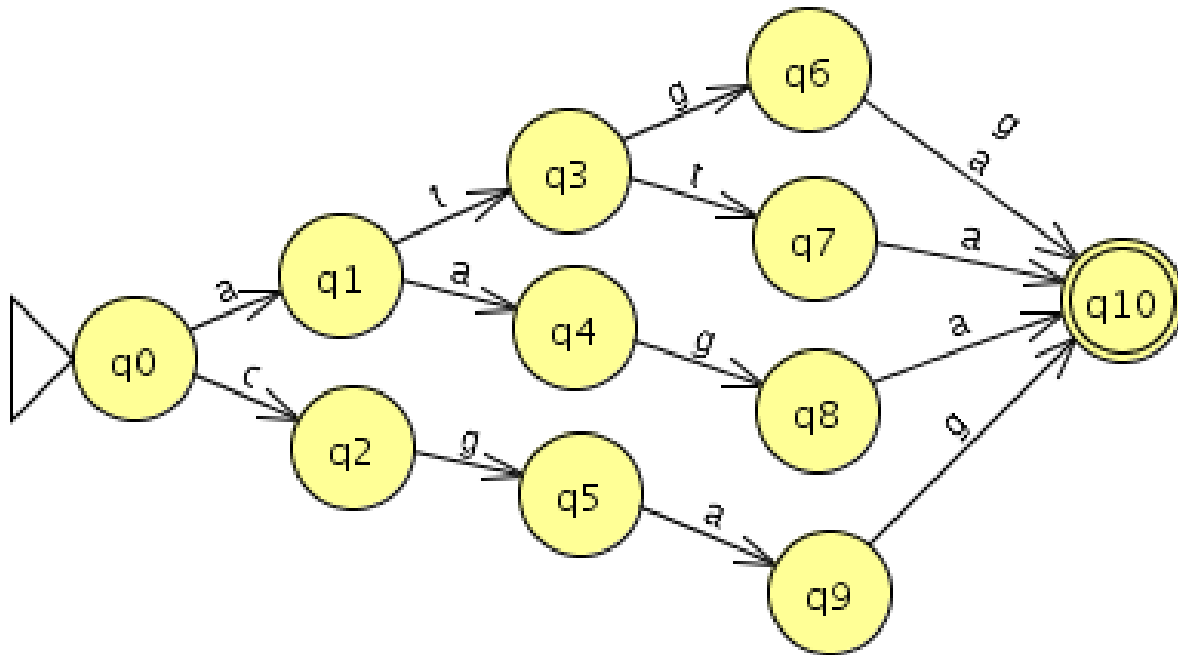
$Q \setminus \Sigma$	a	c	g	t
q0	q1	q2		
q1	q4			q3
q2			q5	
q3			q6	q7
q4			q8	
q5	q9			
q6	q10		q10	
q7	q10			
q8	q10			
q9			q10	
q10				



# Exemplo

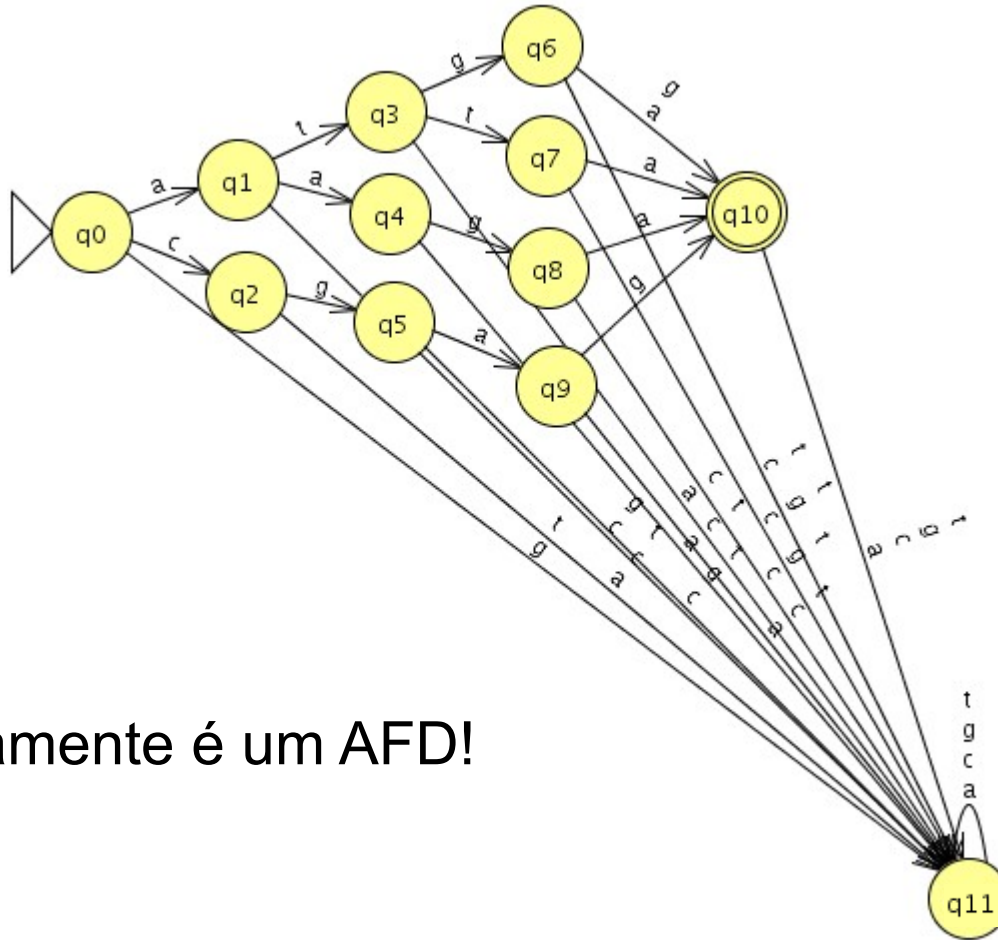
Este autômato é um AFD?

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



Q \ Σ	a	c	g	t
q0	q1	q2	q11	q11
q1	q4	q11	q11	q3
q2	q11	q11	q5	q11
q3	q11	q11	q6	q7
q4	q11	q11	q8	q11
q5	q9	q11	q11	q11
q6	q10	q11	q10	q11
q7	q10	q11	q11	q11
q8	q10	q11	q11	q11
q9	q11	q11	q10	q11
q10	q11	q11	q11	q11
q11	q11	q11	q11	q11

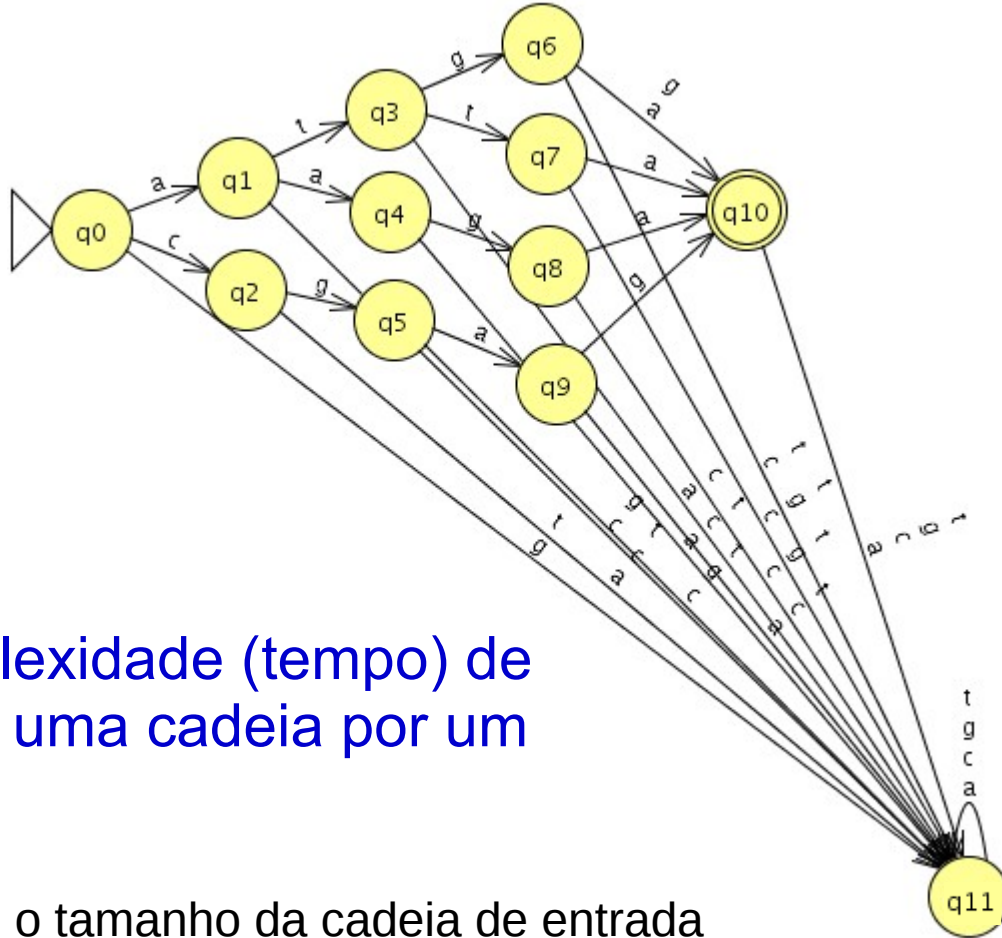
atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



Agora certamente é um AFD!

Q \ Σ	a	c	g	t
q0	q1	q2	q11	q11
q1	q4	q11	q11	q3
q2	q11	q11	q5	q11
q3	q11	q11	q6	q7
q4	q11	q11	q8	q11
q5	q9	q11	q11	q11
q6	q10	q11	q10	q11
q7	q10	q11	q11	q11
q8	q10	q11	q11	q11
q9	q11	q11	q10	q11
q10	q11	q11	q11	q11
q11	q11	q11	q11	q11

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



Qual a complexidade (tempo) de análise de uma cadeia por um AFD?

$O(n)$  – n sendo o tamanho da cadeia de entrada

Q \ Σ	a	c	g	t
q0	q1	q2	q11	q11
q1	q4	q11	q11	q3
q2	q11	q11	q5	q11
q3	q11	q11	q6	q7
q4	q11	q11	q8	q11
q5	q9	q11	q11	q11
q6	q10	q11	q10	q11
q7	q10	q11	q11	q11
q8	q10	q11	q11	q11
q9	q11	q11	q10	q11
q10	q11	q11	q11	q11
q11	q11	q11	q11	q11

# Exercício

- Descreva o diagrama de estados de um AFD que aceita cadeias binárias (compostas por 0's e 1's) que comecem e terminem com zero, com tamanho pelo menos 1
  - 0, 00, 010, 000000, 0101110, ...

**Fim do vídeo 3**

**Autômatos Finitos  
Determinísticos**

Professora:

Ariane Machado Lima

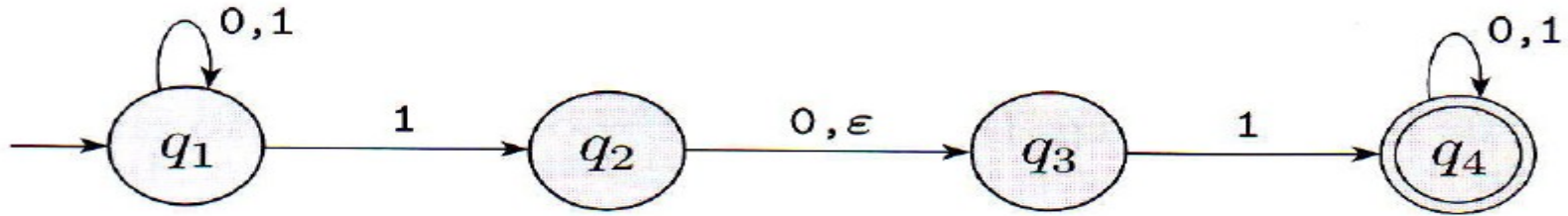
# Vídeo 4

## **Autômatos Finitos Não-determinísticos**

Professora:

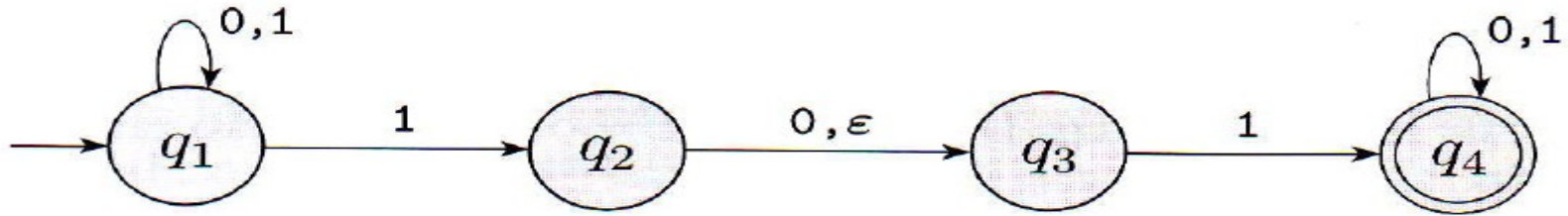
Ariane Machado Lima

# Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFN)



- Um estado pode ter 0 ou mais transições (setas saindo) para cada símbolo de  $\Sigma$
- Um estado pode ter setas rotuladas por  $\varepsilon$  ou  $\lambda$  (string vazia)

# Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFN)

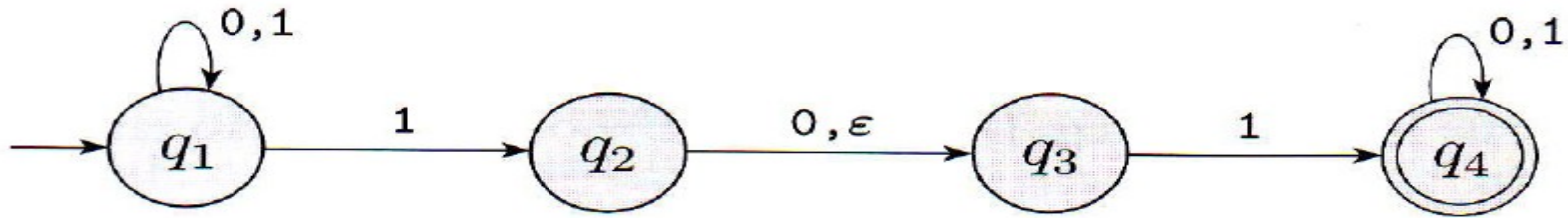


- Um estado pode ter 0 ou mais transições (setas saindo) para cada símbolo de  $\Sigma$
- Um estado pode ter setas rotuladas por  $\varepsilon$  ou  $\lambda$  (string vazia)

**Como ficaria a função de transição neste caso???** 80



# Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFN)



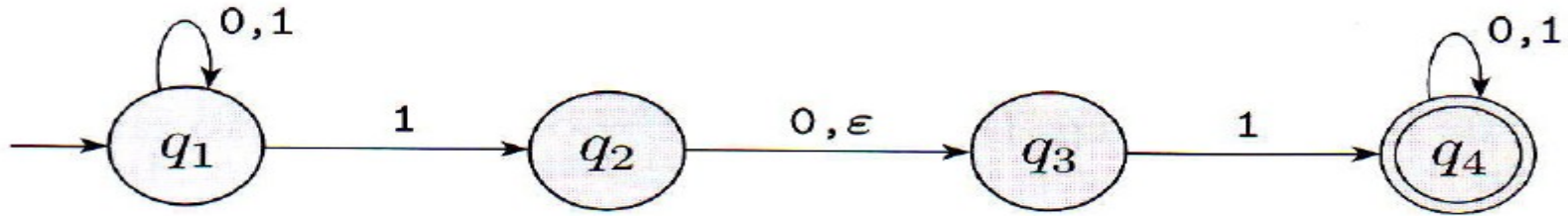
Um *autômato finito não-determinístico* é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , onde

1.  $Q$  é um conjunto finito de estados,
2.  $\Sigma$  é um alfabeto finito,
3.  $\delta: Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  é a função de transição,
4.  $q_0 \in Q$  é o estado inicial, e
5.  $F \subseteq Q$  é o conjunto de estados de aceitação.

$$\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$$

Conjunto potência

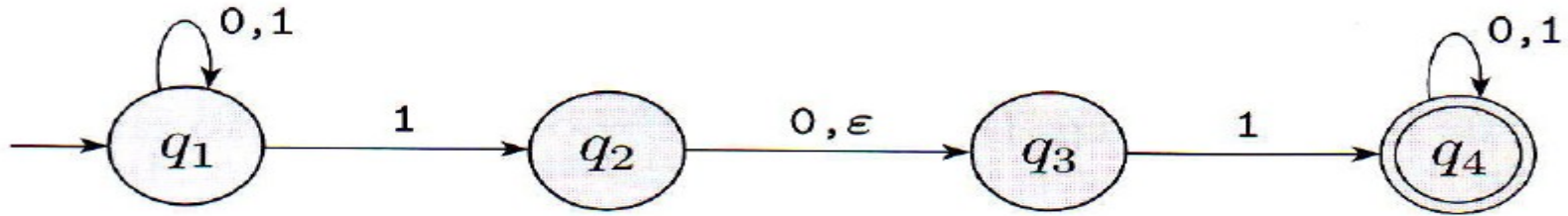
# Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFN)



•  $\delta$ :

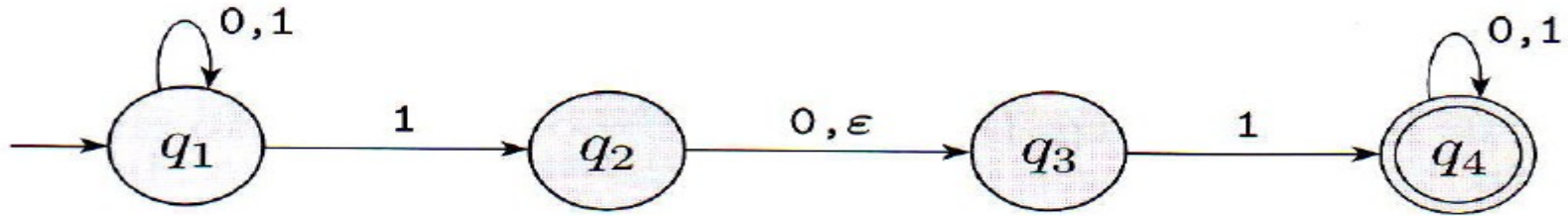
$Q \setminus \Sigma$	0	1	$\epsilon$
q1	{q1}	{q1,q2}	$\emptyset$
q2	{q3}	$\emptyset$	{q3}
q3	$\emptyset$	{q4}	$\emptyset$
q4	{q4}	{q4}	$\emptyset$

# Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFN)



- Que linguagem este AFN reconhece?

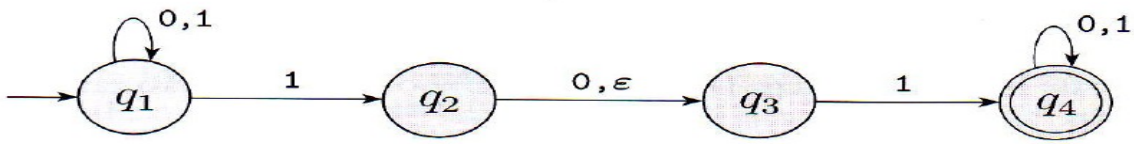
# Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFN)



- Que linguagem este AFN reconhece?
- Sequências binárias que contenham 11 ou 101

# Funcionamento de um AFN

- Sempre que o autômato se depara com um não-determinismo (símbolo repetido ou  $\epsilon$ ) faz uma cópia de si (um clone), exatamente no ponto onde pausou, e cada cópia segue com uma alternativa, em paralelo, a partir daquele ponto.
- Se alguma cópia aceitar a cadeia, então o AFN aceita a cadeia
- As várias cópias são como várias *threads* ou processos executados em paralelo...



Símbolo lido

0 - - - - -

1 - - - - -

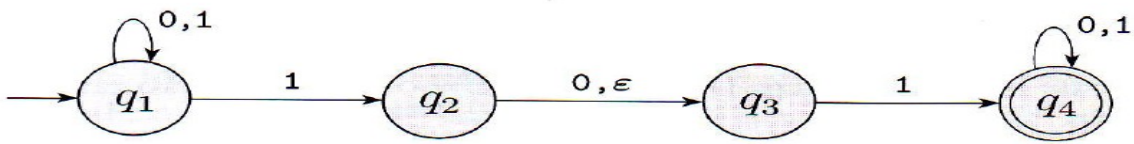
0 - - - - -

1 - - - - -

1 - - - - -

0 - - - - -

# Árvore de computações

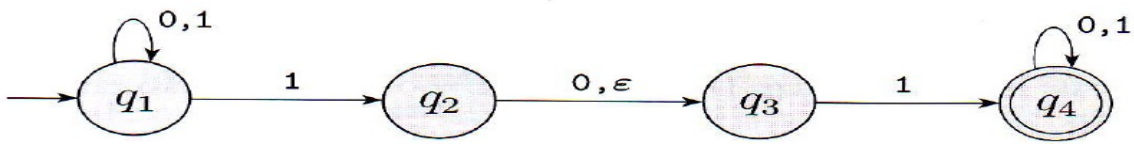


**q1** Início

# Árvore de computações

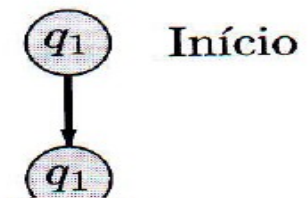
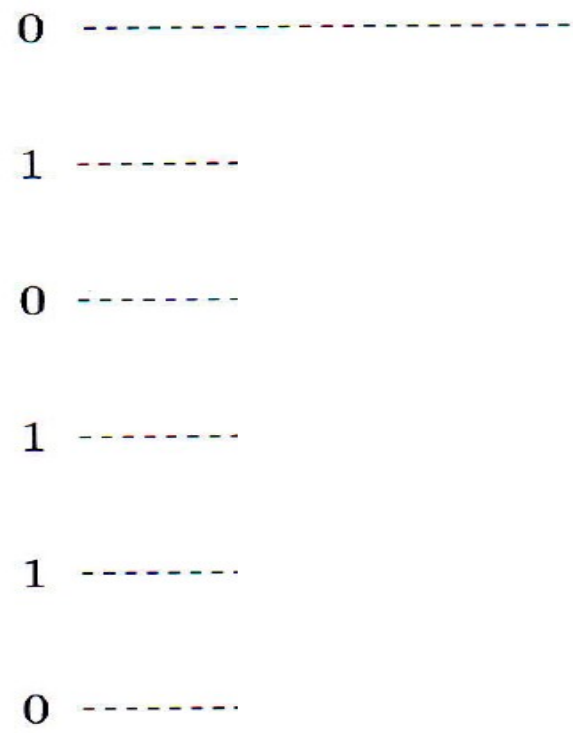
Símbolo lido

- 0 -----
- 1 -----
- 0 -----
- 1 -----
- 1 -----
- 0 -----

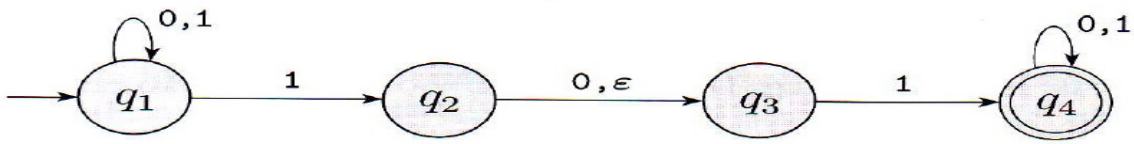


# Árvore de computações

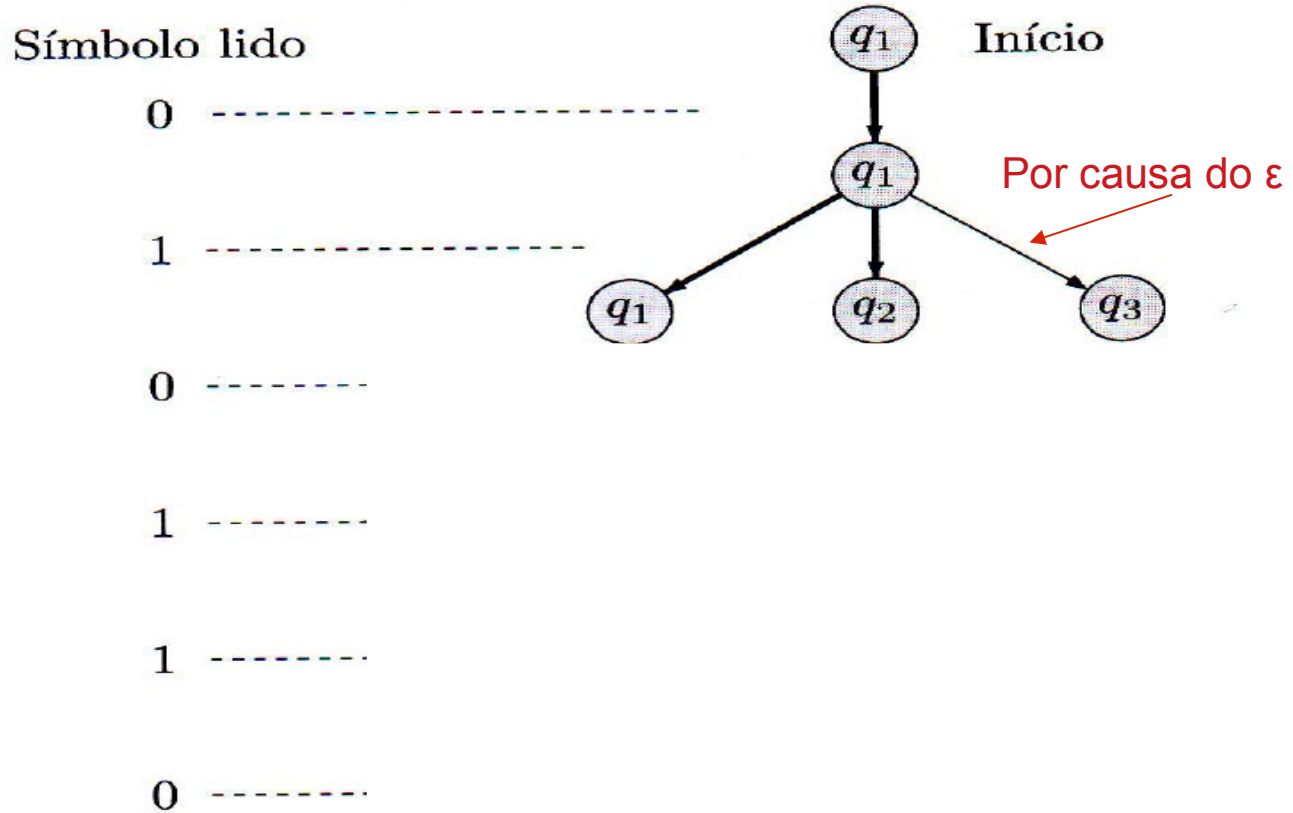
Símbolo lido

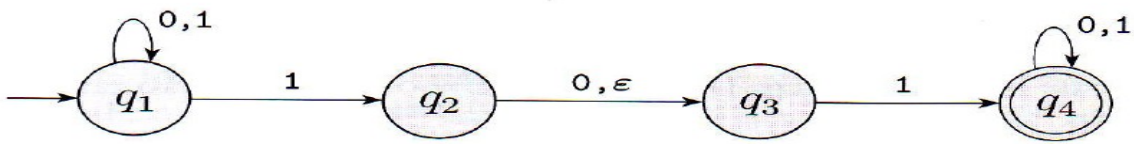




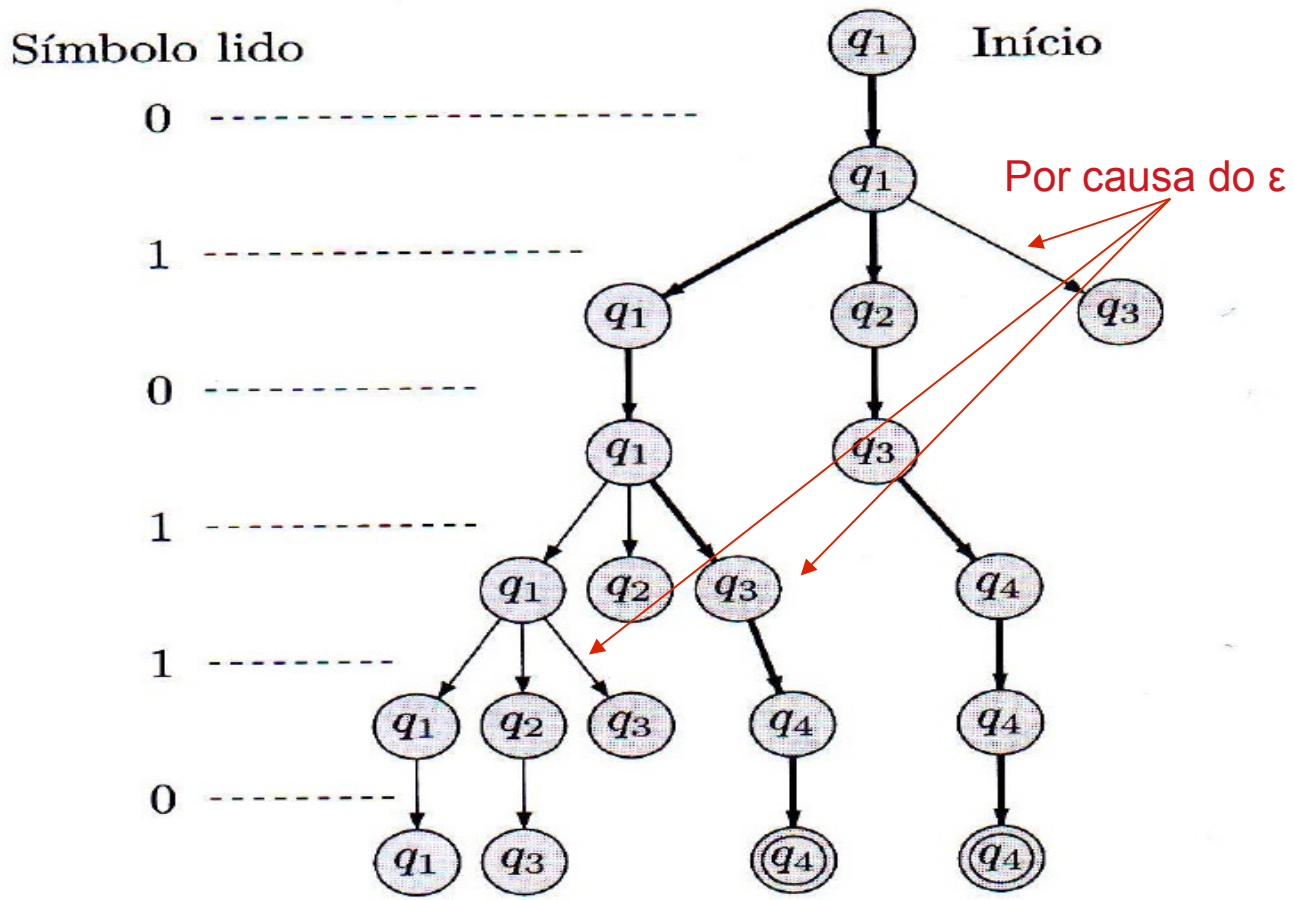


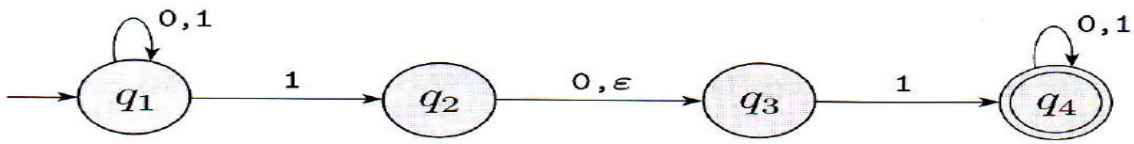
# Árvore de computações



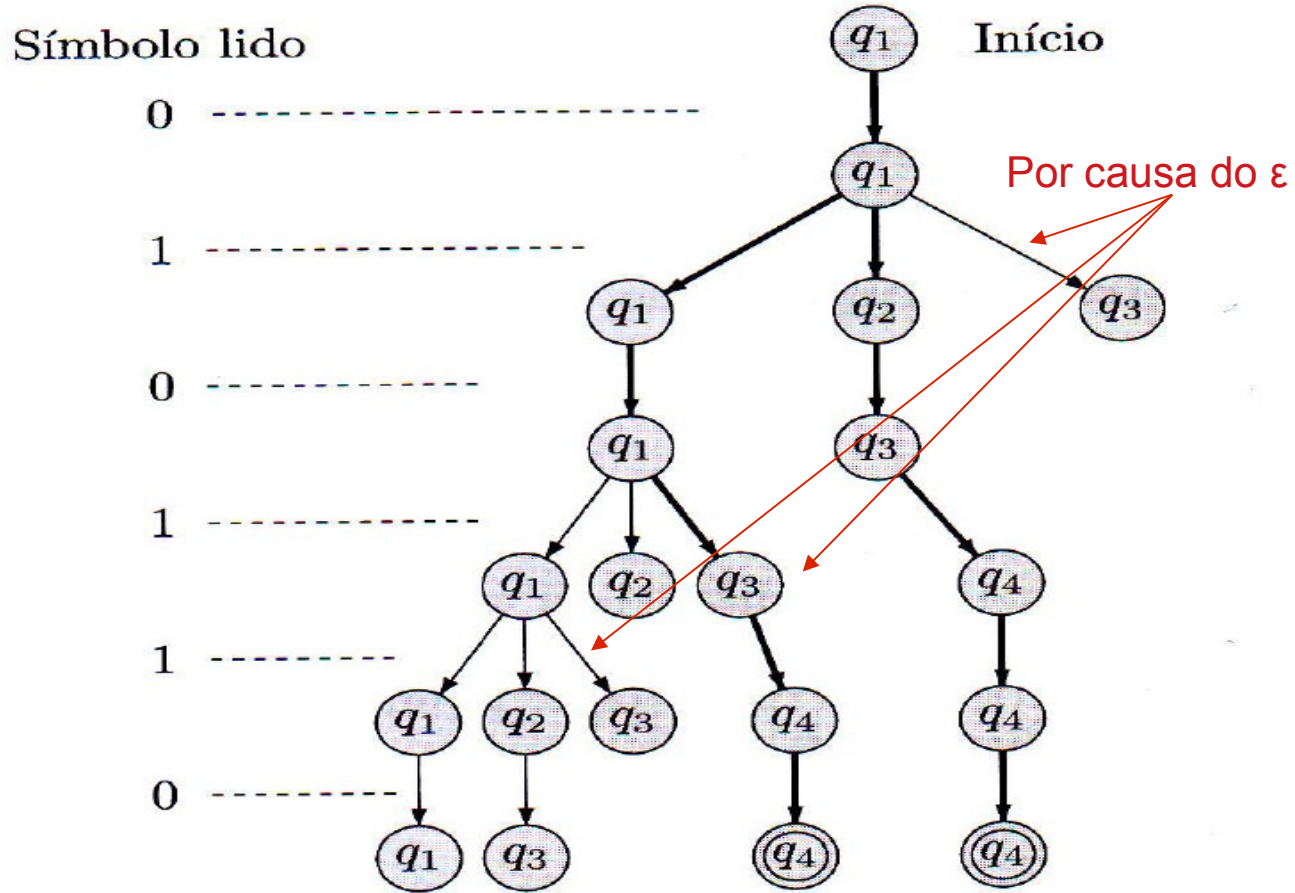


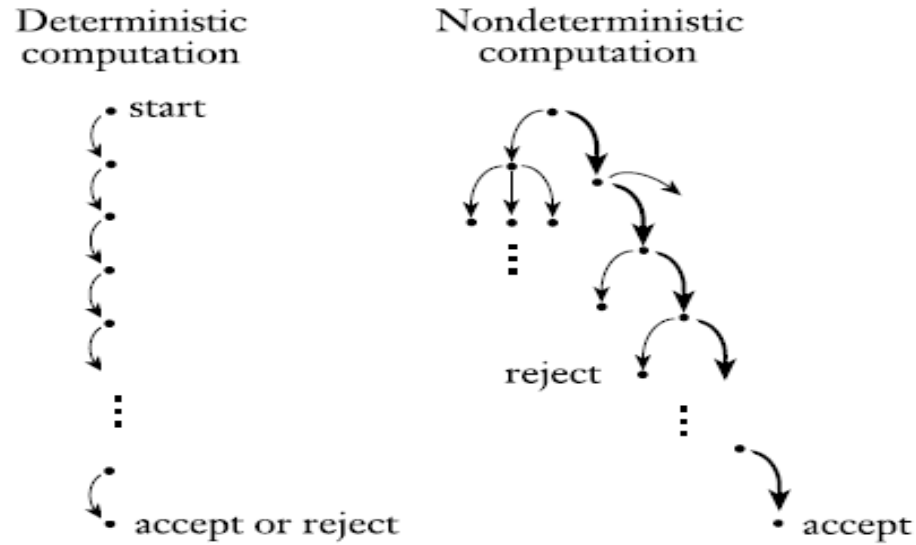
# Árvore de computações





Dá para simular no JFlap





**FIGURA 1.28**  
 Computações determinísticas e não-determinísticas com um ramo de aceitação

**AFD's são mais eficientes que AFN's (tempo)**

# Equivalência entre AFDs e AFNs

- Duas máquinas são **equivalentes** se elas reconhecem a mesma linguagem

**TEOREMA 1.39** .....

Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

# AFDs e AFNs

- Por que o teorema de equivalência é importante?

# AFDs e AFNs

- Por que o teorema de equivalência é importante?
- Pode-se optar por um ou outro dependendo do objetivo
- AFDs são mais eficientes
- AFNs podem:
  - ser mais fáceis de serem projetados
  - facilitar demonstração de teoremas
  - ser úteis em versões probabilísticas

# AFDs e AFNs

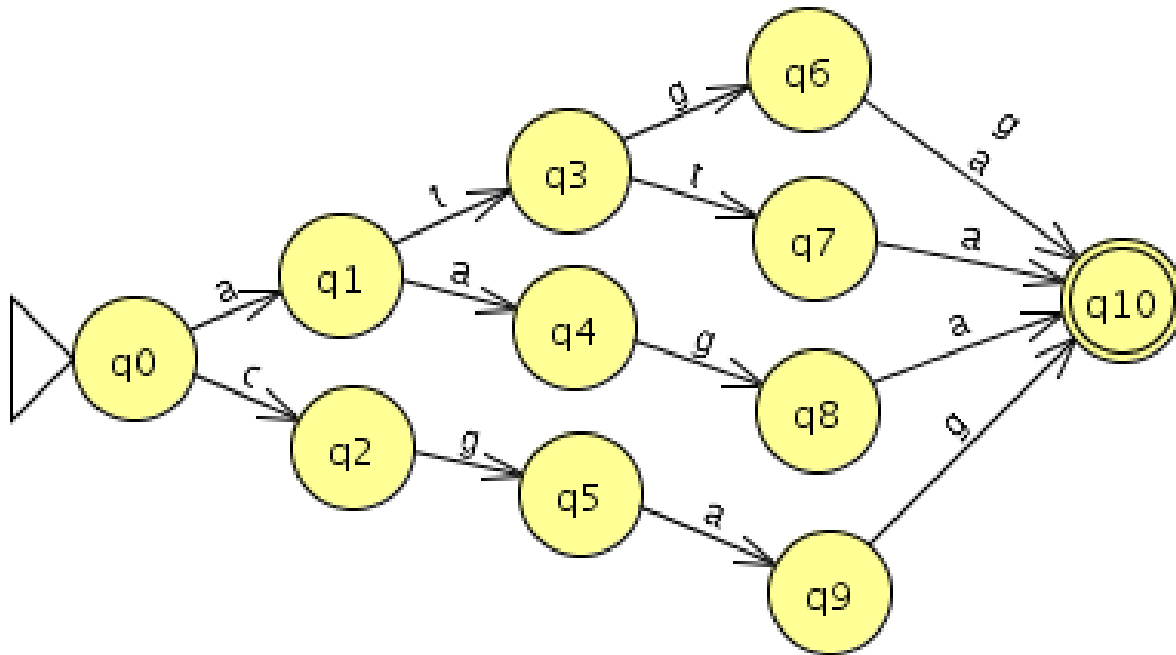
- Por que o teorema de equivalência é importante?
- Pode-se optar por um ou outro dependendo do objetivo
- AFDs são mais eficientes
- AFNs podem:
  - ser mais fáceis de serem projetados
  - facilitar demonstração de teoremas
  - ser úteis em versões probabilísticas



# Exemplo

Este autômato é um AFN !!!

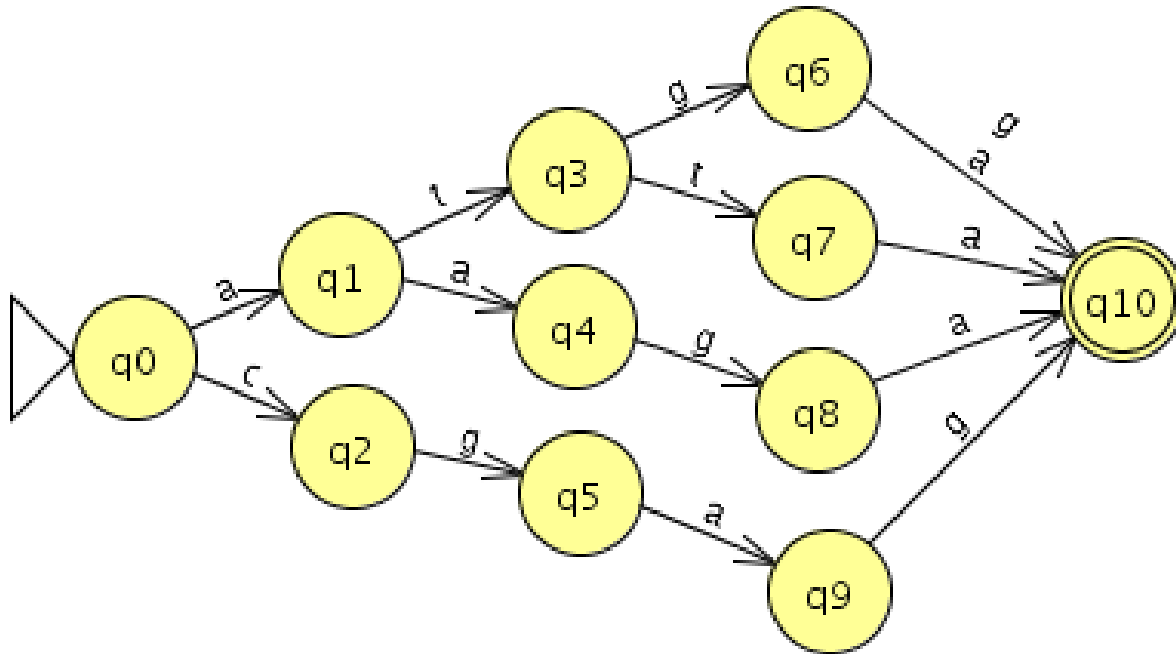
atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



# Exemplo

Este autômato é um AFN !!!

atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag



## Exercício

Q \ $\Sigma$	a	c	g	t
q0				
q1				
q2				
q3				
q4				
q5				
q6				
q7				
q8				
q9				
q10				

# AFDs e AFNs

- Por que o teorema de equivalência é importante?
- Pode-se optar por um ou outro dependendo do objetivo
- AFDs são mais eficientes
- AFNs podem:
  - ser mais fáceis de serem projetados
  - facilitar demonstração de teoremas
  - ser úteis em versões probabilísticas

# Mais detalhes?

(vídeos de minha disciplina de Introdução a Teoria da Computação - ACH2043)

- AFDs:
  - <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=16299>
  - <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=16300>
  - <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=16301>
- AFNs:
  - [https://drive.google.com/file/d/1AAS5FEM9mr\\_WEnmMPn5egtjngethXHfY/view](https://drive.google.com/file/d/1AAS5FEM9mr_WEnmMPn5egtjngethXHfY/view)
- Equivalência entre AFDs e AFNs:
  - <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=16901>
  - <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=16902>

# Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares (prova mais à frente).
- Enquanto uma gramática regular gera cadeias de uma linguagem  $L$ , um autômato finito (para  $L$ ) é capaz de analisar uma dada cadeia de entrada  $w$  e aceitá-la se  $w \in L$  ou rejeitá-la caso contrário (classificação).

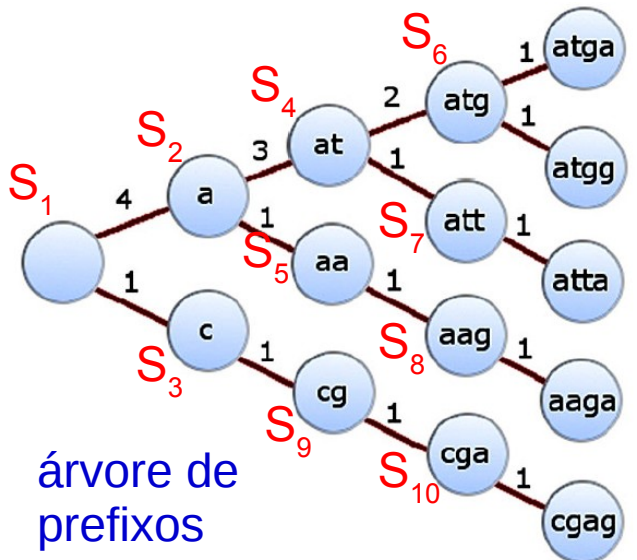
atga  
atgg  
atta  
aaga  
cgag

# Exemplo

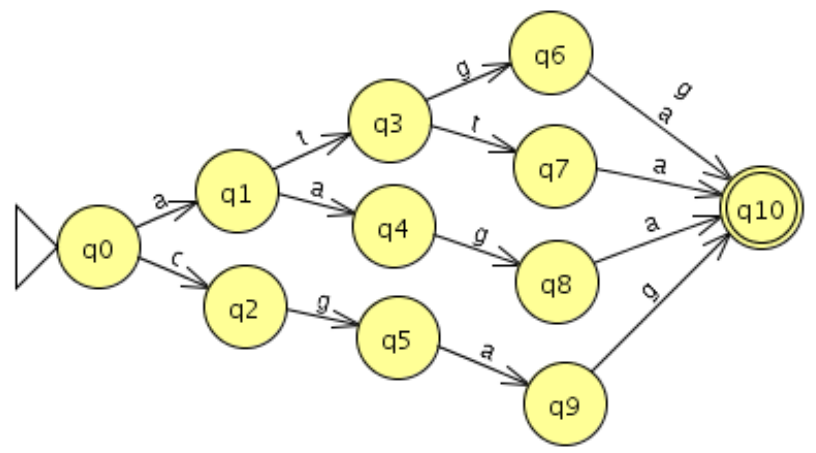
gramática regular (linear à direita)

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$ 
 $P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$   
 $S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$   
 $S_4 \rightarrow gS_6 \mid tS_7$   
 $S_6 \rightarrow a \mid g$   
 $S_7 \rightarrow a$   
 $S_5 \rightarrow gS_8$   
 $S_8 \rightarrow a$   
 $S_3 \rightarrow gS_9$   
 $S_9 \rightarrow aS_{10}$   
 $S_{10} \rightarrow g$ 
 $\}$

$V = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,$   
 $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$   
 $\Sigma = \{a, c, g, t\}$   
 $S = S_1$



árvore de prefixos



AFN

# Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares (prova mais à frente).
- $\Rightarrow$
- $\Leftarrow$

# Gramáticas lineares à direita $\Rightarrow$ AFN

$$G = (V, \Sigma, S, P), \quad M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

$$Q = V \cup \{Z\}, \quad Z \text{ não pertence a } V$$

$$q_0 = S$$

$$F = \{Z\}$$

$$\delta = \dots \text{ (vou construir) } \delta \leftarrow \emptyset$$

para cada produção em  $P$

$$\text{se } X \rightarrow aY, \text{ então } \delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,a) = Y \}$$

$$\text{se } X \rightarrow Y, \text{ então } \delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,\varepsilon) = Y \}$$

$$\text{se } X \rightarrow a, \text{ então } \delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,a) = Z \}$$

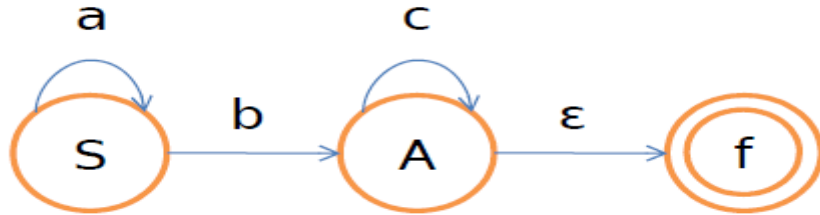
$$\text{se } X \rightarrow \varepsilon, \text{ então } \delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,\varepsilon) = Z \}$$



# Exemplo

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow cA \mid \varepsilon$



# AFN $\Rightarrow$ Gramáticas lineares à direita

$$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F), G = (V, \Sigma, S, P)$$

$$V = Q$$

$$S = q_0$$

$$P = \dots \text{ (vou construir) } P \leftarrow \emptyset$$

para cada transição de  $\delta$

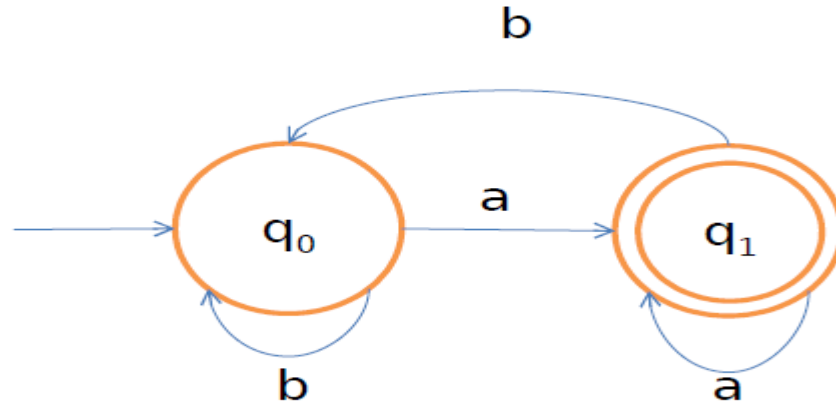
$$\text{Se } \delta(X, a) = Y \text{ então } P \leftarrow \{X \rightarrow aY\}$$

$$\text{Se } \delta(X, \varepsilon) = Y \text{ então } P \leftarrow \{X \rightarrow Y\}$$

para cada estado  $X$  de  $F$

$$P \leftarrow \{X \rightarrow \varepsilon\}$$

# Exemplo



$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_0 \mid \varepsilon$

**Fim do vídeo 4**

**Autômatos Finitos  
Não-determinísticos**

Professora:

Ariane Machado Lima

# Vídeo 5

## Comentários Finais

Professora:

Ariane Machado Lima

# Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Uma linguagem é regular se ela é gerada por uma gramática regular
- Uma gramática é regular se ela for linear à esquerda ou linear à direita
- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares (prova mais à frente).

# Linguagens Regulares

## DEFINIÇÃO 1.16

Uma linguagem é chamada de uma *linguagem regular* se algum autômato finito a reconhece.

## TEOREMA 1.39

Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

## COROLÁRIO 1.40

Uma linguagem é regular se e somente se algum autômato finito não-determinístico a reconhece.

# Linguagens Regulares

## DEFINIÇÃO 1.16

Uma linguagem é chamada de uma *linguagem regular* se algum autômato finito a reconhece.

## TEOREMA 1.39

Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

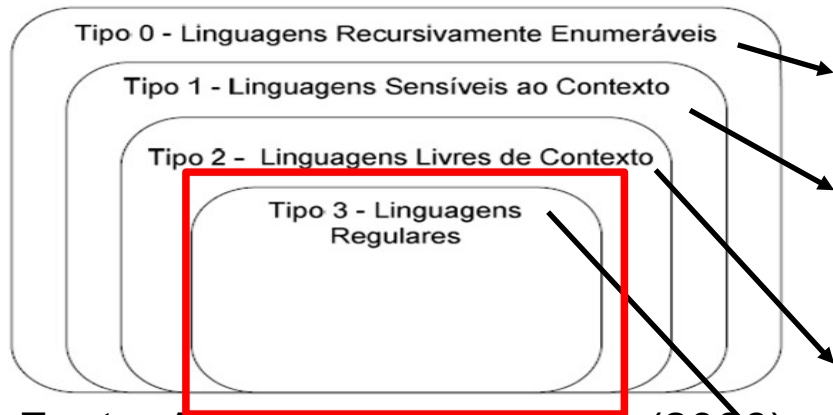
## COROLÁRIO 1.40

Uma linguagem é regular se e somente se algum autômato finito não-determinístico a reconhece.

E representada por uma expressão regular



# Hierarquia de Chomsky



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)

Linguagem	Autômato	Gramática	Reconhecimento
Recursivamente enumerável	Máquina de Turing com fita infinita 	Irrestrita $Baa \rightarrow A$	Indecidível 
Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita finita 	Sensível ao contexto $At \rightarrow aA$	NP-Completo 
Livre de contexto	Autômato de pilha 	Livre de contexto $S \rightarrow gSc$	Polinomial 
Regular	Autômato finito 	Regular $A \rightarrow cA$	Linear 

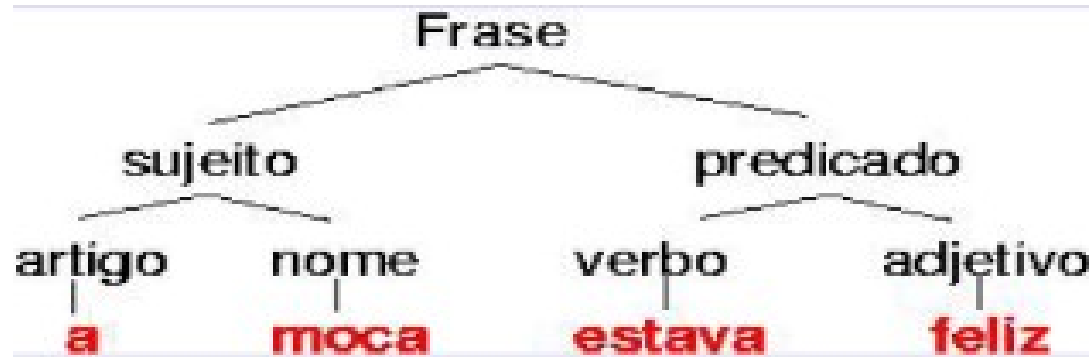
Fonte: Adaptado de Searls (2002)

# Linguagens regulares

Mas não se engane! Muitas linguagens são mais que regulares...

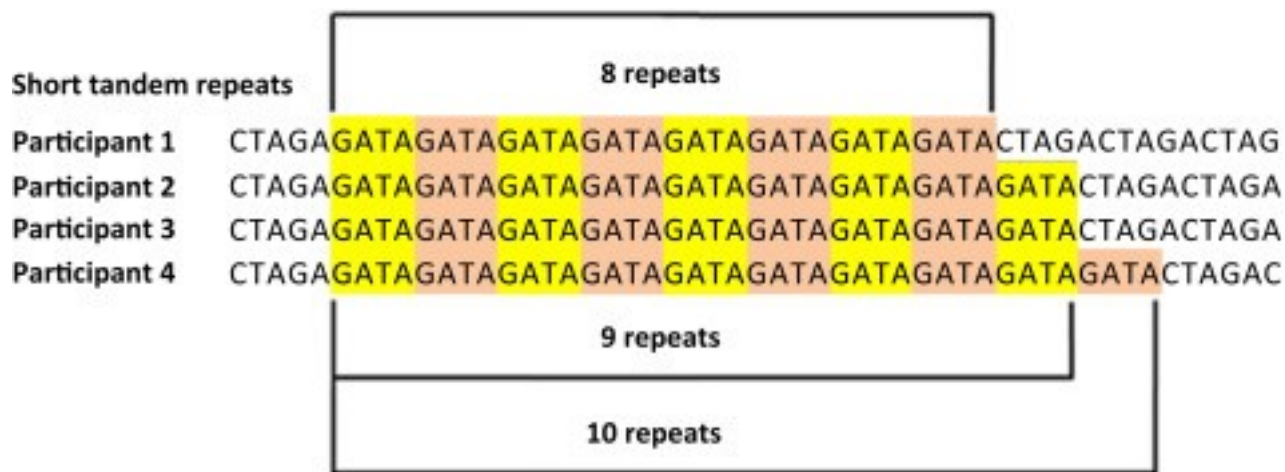
# Linguagens regulares

Mas não se engane! Muitas linguagens são mais que regulares...



# Linguagens regulares

Mas não se engane! Muitas linguagens são mais que regulares...



<https://www.sciencedirect.com/topics/medicine-and-dentistry/short-tandem-repeat>

# Linguagens regulares

Mas muitas são !



# Modeling, Verification and Testing of Web Applications Using Model Checker

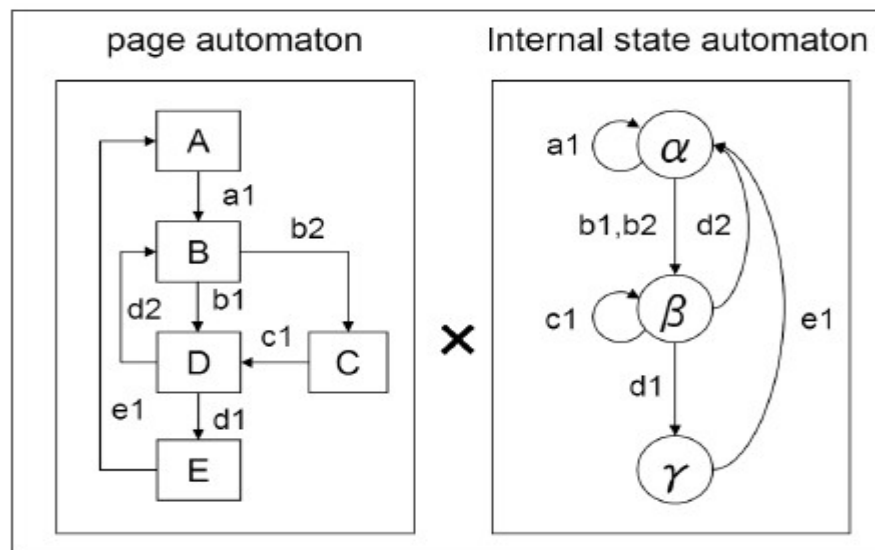


Fig. 1 Model of Web application.

# Referências

- RAMOS, M. V. M.; NETO, J. J.; VEJA, I. S. **Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação**. Ed. Bookman, 2009.
- SIPSER, M. **Introdução à Teoria da Computação**. Ed. Thomson, 2007
- DUDA, R.; HART, P.; STORK, D. **Pattern Classification and Scene Analysis**. Ed. John Wiley, 2001. Cap 8.6 e 8.7
- DURBIN, R.; EDDY, S. R.; KROGH, A. **Biological Sequence Analysis: Probabilistic Models of Proteins and Nucleic Acids**. Cambridge University Press, 2002. Cap 9

# **Fim do vídeo 5**

## **Comentários Finais**

Professora:  
Ariane Machado Lima