PESQUISA OPERACIONAL I

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho
Depart. de Economia, Administração e Sociologia
ESALQ - Universidade de São Paulo
jose.caixeta@usp.br

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (1/3)

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 160 \ (1) \\ 6x_1 + 4x_2 = 120 \ (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = \text{a} \\ 0x_1 + 1x_2 = \text{b} \end{cases}$$

1. Transformação do coeficiente de x_1 em (1) para "1" (dividir (1) por "4").

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & (1a) \\ 6x_1 + 4x_2 = 120 & (2) \end{cases}$$

2. Transformação do coeficiente de x_1 em (2) para "0"; multiplicar (1a) por "–6" e adicionar a (2).

$$\begin{array}{r} -6x_1 - 12x_2 = -240 \\ 6x_1 + 4x_2 = 120 \\ \hline 0x_1 - 8x_2 = -120 \end{array} \qquad (2a)$$

3. Transformação do coeficiente de x_2 em (2a) para "1" (dividir (2a) por "–8").

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & (1a) \\ 0x_1 + x_2 = 15 & (2a) \end{cases}$$

4. Transformação do coeficiente de x_2 em (1a) para "0"; multiplicar (2b) por "–2" e adicionar a (1a).

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 0x_1 - 2x_2 = -30 \\ \hline x_1 + 0x_2 = 10 \end{array} \qquad (1b)$$

5. Solução:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = 10 \\ 0x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (2/3)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1. Divida linha 1 por 4

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Multiplique linha 1 por –6 e some à linha 2

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/4 & 0 \\ 0 & -8 & -3/2 & 1 \end{array}\right]$$

3. Divida linha 2 por –8

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/16 & -1/8 \end{array}\right]$$

4. Multiplique linha 2 por –2 e some à linha 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3/16 & -1/8 \end{array}\right]$$

$$\boxed{A \,.\, A^{-1} = I}$$

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (3/3)

Assim, de uma maneira geral;

$$AX = B$$

Pré-multiplicando ambos os lados por A^{-1},

$$X = A^{-1}B$$

No caso específico,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/8 & 1/4 \\ 3/16 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (1/8)

"Para uma determinada área, utilizada para o plantio de soja e algodão, calcula-se que há 800 homens-horas disponíveis durante o período de semeadura; e que são necessários 20 homens-horas por hectare de soja e 40 homens-horas por hectare de algodão. Oferece-se ainda uma linha máxima de crédito de $ 6.000, dividida da seguinte forma: $ 300 por hectare de soja e $ 100 por hectare de algodão. Como organizar esta área de plantio se é sabido que as margens de lucro esperadas são $ 100 por hectare de soja e $ 80 por hectare de algodão?"

Para determinar as áreas de soja e algodão a serem plantadas, as seguintes variáveis podem ser definidas:

x_1 = nº de hectares de soja a serem plantados;

x_2 = nº de hectares de algodão a serem plantados.

$$\text{Max } Z = 100x_1 + 80x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + 4x_2 \leq 80$$
$$3x_1 + x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (2/8)

$$Max\ Z = 100x_1 + 80x_2$$

Sujeito a

$$2x_1 + 4x_2 \leq 80\ (Rest. 1)$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 60\ (Rest. 2)$$

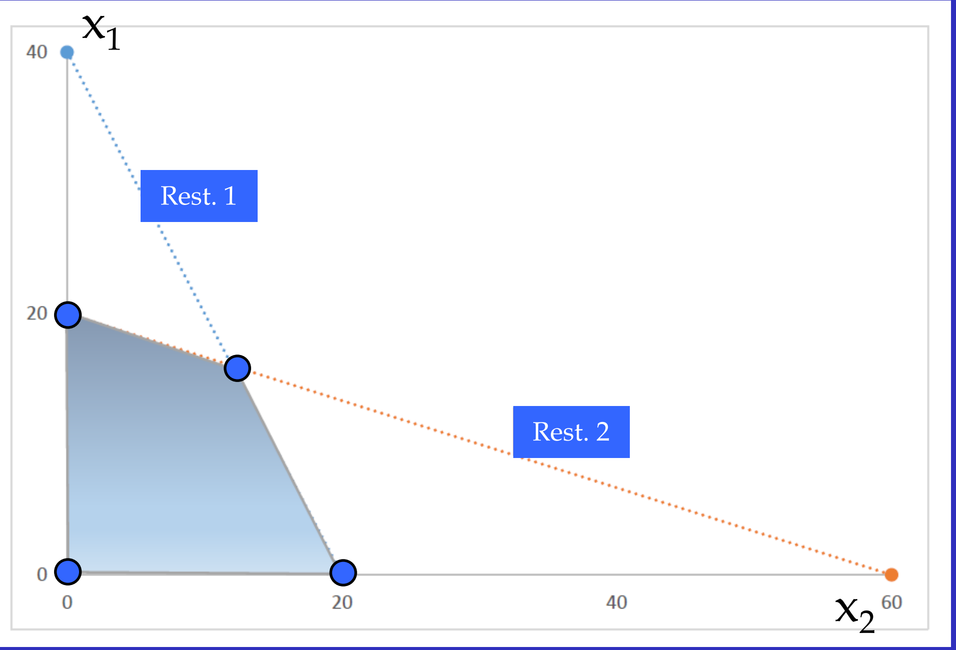
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 80$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 20 \\ x_2 = 0, x_1 = 40 \end{cases}$$

$$3x_1 + 1x_2 = 60$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 60 \\ x_2 = 0, x_1 = 20 \end{cases}$$



Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (3/8)

A base está associada a um vértice da região viável e é composta por um número de variáveis (básicas) que seja igual ao número de restrições.

Portanto, em um problema de programação linear (transformado), com n variáveis e m restrições, nos vértices da região viável tem-se sempre m variáveis básicas e (n-m) variáveis não-básicas.

Normalmente, uma variável básica assume valor não nulo; uma variável não-básica – obrigatoriamente – assume valor nulo.

As variáveis básicas têm que ter os coeficientes associados a uma matriz identidade.

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (4/8)

Acrescentando as chamadas *variáveis de folga* para transformar as inequações em equações:

$$Z - 100x_1 - 80x_2 = 0 \quad (0)$$
$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 80 \quad (1)$$
$$3x_1 + x_2 + s_2 = 60 \quad (2)$$

Portanto, para (1), se s_1 vale zero, o resultado a ser esperado para a expressão "$2x_1 + 4x_2$" deve totalizar "80". Caso s_1 seja maior que zero, a expressão "$2x_1 + 4x_2$" deve valer menos que "80", o que efetivamente caracteriza a "folga" na restrição.

Para identificar as variáveis que compõem a base, deve-se observar quais delas respeitam a característica da matriz identidade, nas equações representativas das restrições do problema. No caso, tais equações poderiam ser reescritas como sendo:

$$2x_1 + 4x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 80 \quad (1)$$
$$3x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 1s_2 = 60 \quad (2)$$

Confirma-se então que a primeira solução viável pode ser representada pela base (s_1, s_2). Normalmente, as variáveis restantes, não pertencentes à base, são chamadas de *variáveis não-básicas*, e assumem valores nulos.

Assim sendo, uma vez que a função objetivo pode ser reescrita como:

$$Z - 100x_1 - 80x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0 \quad (0)$$

e que às variáveis (x_1, x_2) estão associados os valores (0, 0), e às variáveis (s_1, s_2) estão associados os valores (80, 60), isso faz com que o valor ótimo (no caso, máximo) de Z seja igual a zero.

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (5/8)

1. Escolha a variável com maior contribuição a $Z \rightarrow x_1$ selecionada para entrar na base.

2. Resolva para x_1 em ambas as restrições, com as outras variáveis iguais a zero $\rightarrow$ variável que deixa a base.

$$2x_1 + 4(0) + 0 = 80 \qquad (1)$$
$$3x_1 + 1(0) + 0 = 60 \qquad (2)$$
$$\therefore x_1 = 40 \Rightarrow \text{de } (1)$$
$$x_1 = 20 \Rightarrow \text{de } (2)$$

3. Qual restrição se tornará limitante primeiro?

$\rightarrow$ menor valor para x_1: restrição (2)

s_2 é a variável que deixa a base.

4. Para reestabelecer a matriz identidade, com a variável x_1 incluída, o coeficiente para x_1 deverá ser zero na equação (0) e restrição (1), e 1 na equação (2).

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (6/8)

Assim sendo, tem-se as seguintes novas equações, que confirmam as características da matriz identidade com relação à nova base (s_1, x_1):

$$Z - \frac{140x_2}{3} + \frac{100s_2}{3} = 2.000 \qquad (0)$$

$$0x_1 + \frac{10x_2}{3} + s_1 - \frac{2s_2}{3} = 40 \qquad (1) \quad \text{Base: } s_1, x_1$$

$$1x_1 + \frac{1x_2}{3} + 0s_1 + \frac{1s_2}{3} = 20 \qquad (2)$$

Os passos anteriores são então repetidos, uma vez que ainda há contribuições positivas na função objetivo. Assim, a partir da segunda iteração, obtém-se:

$$Z + 14s_1 + 24s_2 = 2.560 \qquad (0)$$

$$x_2 + \frac{3s_1}{10} - \frac{1s_2}{5} = 12 \qquad (1) \quad \text{Base: } x_2, x_1$$

$$x_1 - \frac{1s_1}{10} + \frac{2s_2}{5} = 16 \qquad (2)$$

GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (7/8)

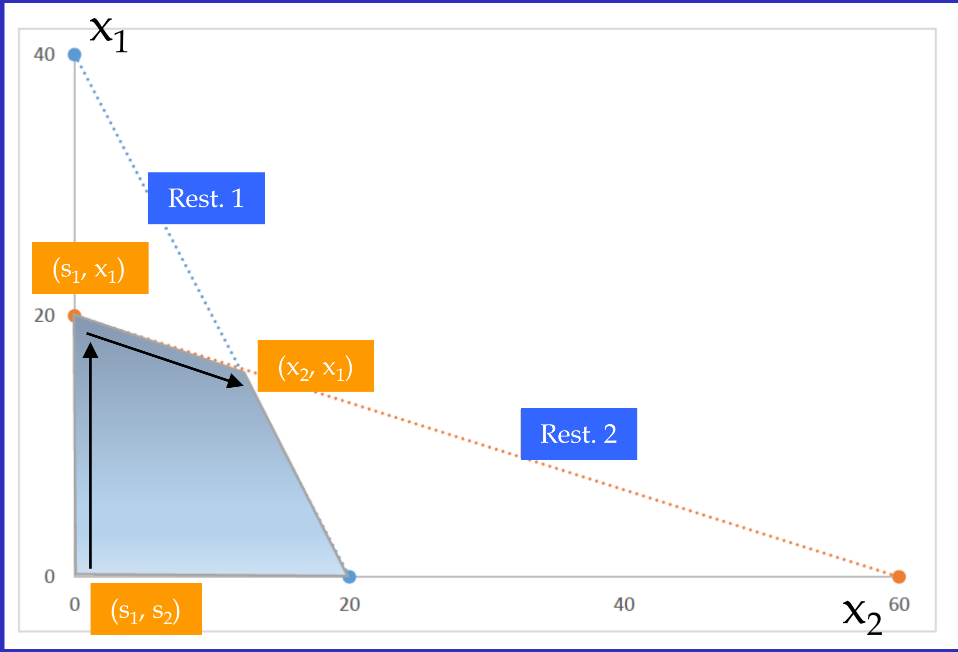
$$Max\ Z = 100x_1 + 80x_2$$

Sujeito a

$$2x_1 + 4x_2 \leq 80\ (Rest.1)$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 60\ (Rest.2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

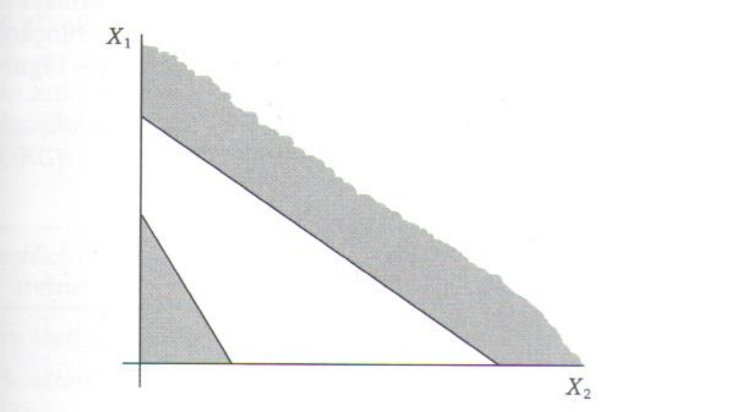


GAUSS-JORDAN PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR: O MÉTODO SIMPLEX (8/8)

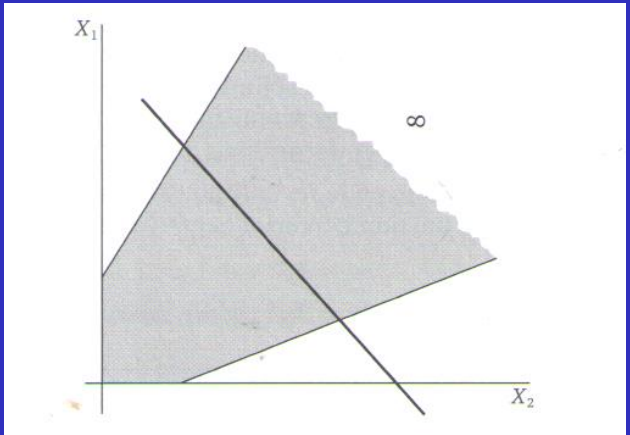
Restrição tipo	Ajuste na restrição	Ajuste na função objetivo	
		Problema de Maximização	Problema de Minimização
≤	Adicionar uma variável de folga (s_i)	Adicionar uma variável de folga (s_i) com coeficiente 0	Adicionar uma variável de folga (s_i) com coeficiente 0
=	Adicionar uma variável artificial (A_i)	Subtrair variável artificial (A_i) com coeficiente M	Adicionar variável artificial (A_i) com coeficiente M
≥	Subtrair uma variável de excesso (s_i) e adicionar uma variável artificial (A_i)	Adicionar variável de excesso (s_i) com coeficiente 0 e subtrair variável artificial (A_i) com coeficiente M	Adicionar variável de excesso (s_i) com coeficiente 0 e adicionar variável artificial (A_i) com coeficiente M

CASOS ESPECIAIS DE SOLUÇÕES PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Problema sem solução



Problema com solução no infinito



Problema com múltiplas soluções