Capítulo 1

Montando o espaço-tempo de Minkowski

1.1 Linhalândia

1.2 Eventos e linhas-de-mundo

Para deixar claro quando estivermos nos referindo a pontos do espaço-tempo, ao invés de pontos do espaço euclidiano usual, os denominaremos de *eventos*. Fisicamente, um evento pode ser pensado como "algo" que, de acordo com nossa percepção fragmentada do espaço-tempo em "tempo" e "espaço", pode ser idealizado como tendo ocorrido "num ponto do espaço, num instante de tempo". A colisão de duas partículas, a emissão de um fóton por um átomo excitado, a absorção de uma partícula por um detector, a desintegração de um núcleo atômico; todos eles marcam uma localização no espaço-tempo e, assim, são exemplos de eventos. Talvez o(a) leitor(a) possa achar, num primeiro momento, que essa definição de evento faria com que o espaço-tempo fosse muito vazio deles. Porém, para se convencer do contrário, basta o(a) leitor(a) se imaginar em qualquer ponto do espaço, em qualquer instante de tempo, e perceber que dificilmente ele(a) não estaria, nesse ponto e nesse instante, recebendo alguma "informação" (raios de luz, por exemplo, ou fótons de alguma outra porção do espectro eletromagnético) vinda de (pelo menos) duas direções diferentes; ou seja, esse ponto no espaço e instante no tempo seria sinalizado pelo *evento* do cruzamento de (pelo menos) dois fótons particulares. Isso deve bastar para mostrar que o espaço-tempo é preenchido por eventos *físicos*. Ainda assim, é bastante útil adotarmos uma visão mais idealizada, na qual um evento não precisa necessariamente marcar a ocorrência *de fato* de um evento físico, mas apenas ter o potencial para tal. Isso é semelhante a como pensamos no espaço tridimensional usual: não é necessário que haja uma partícula de fato num dado ponto do espaço para nos referirmos a ele, como uma idealização. Com isso, o espaço-tempo será constituído pelo *conjunto de todos os eventos*, nessa acepção idealizada de evento. Por enquanto, denotaremos o espaço-tempo por $\mathcal{E}$.

É importante deixar claro que embora a descrição (e às vezes até a interpretação) de um evento possa depender de observador, sua existência é algo absoluto. Um observador $\mathcal{O}$ pode descrever a colisão de duas certas partículas como tendo ocorrido no ponto $P \in \mathbb{E}^3$ do espaço (euclidiano), no instante $t \in \mathbb{R}$, e, assim, achar natural descrever esse evento pelo par ordenado $(t, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$. Já um outro observador, $\widetilde{\mathcal{O}}$, de acordo com sua convenção, pode descrever *a mesma* colisão como tendo ocorrido no ponto $Q \in \mathbb{E}^3$ do espaço, no instante $\tilde{t} \in \mathbb{R}$, e, assim, descrevê-lo por $(\tilde{t}, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$. Apesar das descrições serem possivelmente diferentes [pois, em geral, $(t, P) \neq (\tilde{t}, Q)$], ambas se referem ao mesmo ponto (i.e., evento) no espaço-tempo, digamos $p \in \mathcal{E}$. Isso deixa claro que não devemos confundir ou identificar rigidamente um evento (nesse caso, $p \in \mathcal{E}$) no espaço-tempo com sua descrição em termos de localização temporal (nesse caso, t ou $\tilde{t}$) e espacial (nesse caso, P ou Q) — e, de fato, boa parte das situações aparentemente paradoxais, comuns em Relatividade, advém dessa identificação dependente de observador. Colocando de maneira mais simbólica, embora possamos fazer associações $\mathcal{E} \ni p \mapsto (t, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ (de infinitas maneiras diferentes), *não* devemos fazer a identificação rígida $p = (t, P)$. Essa distinção é totalmente análoga ao que acontece com, por exemplo, o plano euclidiano $\mathbb{E}^2$: embora possamos (e seja muito conveniente!) *descrever* um dado ponto $P \in \mathbb{E}^2$ através de um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ou seja, *coordenadas*), devemos ter em mente que $P \neq (x, y)$, pois há infinitas maneiras diferentes de expressarmos o mesmo ponto P em termos de coordenadas.

Introduzida a noção de evento, passemos agora à de *linha-de-mundo*. Assim como um objeto puntual se movendo no espaço euclidiano descreve uma *trajetória* nesse espaço — o conjunto de todos os pontos pelos quais o objeto passa em algum momento —, o mesmo acontece quando consideramos a história desse objeto no espaço-tempo. Para diferenciar trajetórias espaciais de trajetórias espaço-temporais, denominaremos estas últimas de *linhas-de-mundo*: o conjunto de todos os eventos "ocupados" pelo objeto ao longo de sua história. Note que enquanto uma trajetória espacial pode se resumir a um único ponto (representando algo "parado no espaço"), o inexorável passar do tempo obriga qualquer objeto — que exista por mais do que apenas um mero instante — a possuir uma linha-de-mundo que se estende na "direção temporal" (vide **Fig. 1.1**). Mas para dar sentido preciso a "direção temporal", entre outros conceitos, precisamos equipar $\mathcal{E}$ com algumas estruturas adicionais — o que faremos mais adiante.

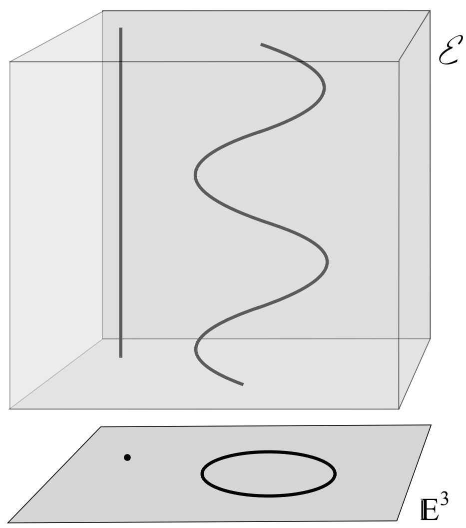

Figura 1.1: Representação de trajetórias circular e puntual no espaço e as respectivas linhas-de-mundo no espaço-tempo.

1.3 Requisitos físicos

Um espaço-tempo é mais do que apenas o mero conjunto de todos os eventos — assim como o espaço euclidiano é mais do que apenas o conjunto de seus pontos. Há estruturas adicionais definidas em $\mathcal{E}$. Se fôssemos adotar uma postura "generalista", definindo primeiro aquelas estruturas comuns a qualquer espaço-tempo e, então, acrescentando, "camada por camada", estruturas cada vez mais particulares até chegarmos ao espaço-tempo específico da Relatividade Restrita — o *espaço-tempo de Minkowski* —, teríamos que começar apresentando boa parte do arcabouço da *Geometria Diferencial*. Isso nos desviaria demais do objetivo desta disciplina e, por isso, adotaremos uma postura diferente: já muniremos $\mathcal{E}$ com as estruturas matemáticas específicas que fazem dele o espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{M}$. Antes, porém, de munirmos $\mathcal{E}$ com as estruturas matemáticas necessárias, vamos tentar motivá-las fisicamente.

Uma característica primordial que diferencia um espaço-tempo de outro espaço qualquer é o fato que, a partir de todo e qualquer evento, tem que existir um conceito de "direção temporal" — que daria a direção, no espaço-tempo, do inexorável "passar do tempo", ao longo da qual uma *medida* de tempo deve existir —, enquanto outras direções devem representar "direções espaciais" — ao longo das quais nossa noção de distância euclidiana tem que fazer sentido. Considerando que as noções de "repouso" e "movimento" são relativas — como estabelecido desde Galileu para fenômenos mecânicos e estendido por Einstein a fenômenos eletromagnéticos; esse é o conteúdo do

Princípio da Relatividade —, qualquer que seja a linha-de-mundo de um observador, ela terá que determinar uma possível "direção temporal" do espaço-tempo em cada evento pelo qual ela passa, pois qualquer um pode se considerar "em repouso no espaço" — e, portanto, só evoluindo no tempo — em relação a si mesmo. Assim, vemos que deve haver não apenas uma direção temporal, mas infinitas, sendo que linhas-de-mundo passando por um mesmo evento $p \in \mathcal{E}$ em direções temporais diferentes representam partículas se movendo uma em relação à outra. E, pelo Princípio da Relatividade, nenhuma dessas direções temporais pode ser privilegiada em relação às demais.

Falar de "direção" naturalmente nos remete ao conceito de *vetor*, o que sugere fortemente que cada evento $p \in \mathcal{E}$ terá que ter associado a si um espaço vetorial, $\mathbb{V}_p$, cujos elementos $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_p$ codificarão informação sobre diferentes direções do espaço-tempo naquele evento — ou seja, cada $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_p$ deve ter alguma relação de "apontar para" outros eventos de $\mathcal{E}$ a partir de p. Assim, cada $\mathbb{V}_p$ — denominado *espaço-tangente* a $\mathcal{E}$ em p — deve ser equipado com alguma estrutura, além da de um mero espaço vetorial, para distinguir as direções temporais das espaciais. Guardemos isso em mente, por enquanto.

Outra propriedade física que é impressa na estrutura do espaço-tempo relaciona-se ao conceito de *inércia*. Por alguma razão — para mim, misteriosa —, partículas livres de qualquer ação externa seguem trajetórias (e linhas-de-mundo) muito particulares. Esse é um fato conhecido desde Galileu, que Newton codificou na sua *1ª lei do movimento* e que continua válido no contexto relativístico. A *lei da inércia*, como é conhecida a 1ª lei de Newton, normalmente é colocada em termos da afirmação que um corpo livre de qualquer ação externa mantém seu "estado de movimento", prosseguindo segundo um *movimento retilíneo e uniforme* (ou permanecendo em repouso, caso este fosse seu "estado de movimento" inicial). Evidentemente, para se fazer essa afirmação, deve-se adotar um tipo especial de *referencial* em relação ao qual a posição da partícula é medida, como função do tempo, para se testar sua uniformidade e retidão. Uma escolha "ruim" de referencial tornará essa formulação da lei da inércia inútil, pois mesmo uma partícula livre pode ter um movimento complicado quando visto de um referencial arbitrário — tente pensar no movimento de uma partícula livre visto a partir de um referencial girante[1]. Mas podemos despir a lei da inércia desses aspectos "relativos" e enxergar seu conteúdo *absoluto* (i.e., independente de

[1] É inevitável a pergunta: qual é o tipo "certo" de referencial em relação ao qual o movimento de partículas livres é retilíneo e uniforme? A resposta pode parecer decepcionante: o tipo "certo" é aquele no qual partículas livres têm movimento retilíneo e uniforme! — por definição, um *referencial inercial*. Apesar de aparentemente tautológico, a *existência* de um tal referencial é algo não-trivial e *esse* é o conteúdo físico dessa formulação da lei da inércia. Essa dose de circularidade nas definições de "partículas livres" e "referenciais inerciais" nos iludiu por mais de dois séculos, até que sua compreensão acabou por levar a um entendimento mais profundo sobre a *gravidade*, na chamada *Teoria da Relatividade Geral*.

referencial):

(i) A linha-de-mundo de uma partícula livre que passa pelo evento $p \in \mathcal{E}$ depende apenas do "estado de movimento" da partícula em p (ou seja, da informação de um trecho arbitrariamente pequeno da linha-de-mundo em torno de p). Logo, duas partículas livres que tenham suas linhas-de-mundo coincidindo em algum trecho em torno de $p \in \mathcal{E}$ terão linhas-de-mundo coincidentes em toda sua extensão;

(ii) O "estado de movimento" em $p \in \mathcal{E}$ resume-se à direção, no espaço-tempo, dessa linha-de-mundo em p;

(iii) Partículas livres inicialmente em repouso uma em relação à outra permanecerão em repouso relativo.

Os três pontos acima estão em ordem crescente de especificidade. O ponto (i) simplesmente diz que partículas livres possuem trajetórias/linhas-de-mundo particulares, independentes das características intrínsecas das partículas, e que podem ser determinadas com "informações locais". Já o ponto (ii) especifica qual o tipo de "informação local" que caracteriza o "estado de movimento" da partícula: a direção da linha-de-mundo no espaço-tempo. Podemos usar esses dois pontos, em conjunto, para *definir* uma identificação de direções em eventos diferentes: se os eventos $p, q \in \mathcal{E}$ são conectados por uma linha-de-mundo de uma partícula livre (por brevidade, uma linha-de-mundo *inercial*), então a direção da linha-de-mundo inercial em p é a mesma que em q. Note que, com essa identificação, linhas-de-mundo inerciais são, por definição, "linhas retas" no espaço-tempo (no sentido que são curvas que têm a mesma direção em todos os seus pontos).

Por fim, o ponto (iii) é o que exige — e, portanto, impõe — mais restrições sobre a estrutura do espaço-tempo. Uma leitura geométrica desse ponto é que a identificação entre direções do espaço-tempo em eventos diferentes — que foi estabelecida acima apenas para direções particulares de eventos conectados por uma linha-de-mundo inercial — pode ser estendida, de maneira consistente, para eventos espacialmente separados: direções em p e q serão identificadas entre si se, e somente se, estiverem associadas a linhas-de-mundo de partículas livres que estejam uma em repouso em relação à outra. Logo, partículas em repouso uma em relação a outra possuem, por definição, linhas-de-mundo *paralelas*.

Como dissemos acima, os pontos (i), (ii) e (iii) estão em ordem crescente de especificidade. Isso significa que o ponto (ii) se constrói sobre o ponto (i) e que o ponto (iii) se constrói sobre os pontos (i) e (ii) em conjunto. O ponto (ii) está intimamente relacionado ao fato que a conexão entre *cinemática* (i.e., as *características* do movimento) e *dinâmica* (i.e., as *causas* do movimento) se dá no nível da *aceleração* (*2ª lei do movimento* de Newton). Não é difícil pensar num hipotético universo em que a conexão se desse em outro nível (velocidade, taxa de variação da aceleração, etc.), caso em que (i) poderia continuar sendo válido mas o significado de "estado de movimento" seria outro. Também podemos imaginar um universo em que (i) e (ii) são válidos mas não (iii); um espaço-tempo no qual linhas-de-mundo inerciais ainda sejam "retas" mas que não seja possível estabelcer um "paralelismo" à distância[2]. Em $\mathbb{M}$ adotaremos a validade de todos esses pontos.

Mas ainda falta um ponto chave. Os requisitos discutidos até agora — distinção entre direções temporais e espaciais e validade da lei da inércia, como conhecida desde Galileu — se fazem presentes tanto no contexto da Relatividade Restrita quanto no da Mecânica Newtoniana (quando esta última é colocada na linguagem de espaço-tempo; vide Exercício ⑨). O que diferencia esses contextos é que a Relatividade Restrita adota como *postulado* o fato — muito bem estabelecido experimentalmente — que a *velocidade da luz no vácuo* é uma constante universal: não importa qual seja o movimento relativo entre fonte de luz e observador, a velocidade da luz (no vácuo), medida *localmente*[3] pelo observador, tem sempre o mesmo valor (denotado por c).[4] Visto na linguagem de espaço-tempo, isso significa duas coisas:

(a) Considere que um *flash* de luz seja emitido num evento $p \in \mathcal{E}$ qualquer. Os eventos pelos quais a luz desse *flash* passa independem da linha-de-mundo da fonte que emitiu o flash. Logo, as linhas-de-mundo da luz emanando de um evento $p \in \mathcal{E}$ denunciam e demarcam uma estrutura *absoluta* do próprio espaço-tempo — que denominaremos *cone-de-luz futuro* de p, representado por $\mathcal{C}_p^+$ (vide **Fig. 1.2**; o *cone-de-luz passado* de p, $\mathcal{C}_p^-$, é definido de maneira análoga, demarcado pelas linhas-de-mundo de luz que podem chegar ao evento p);

(b) Considere o evento $q \in \mathcal{E}$ determinado pelo cruzamento de uma linha-de-mundo de luz com a linha-de-mundo de um observador qualquer. O valor da velocidade da luz que esse observador mede em q independe da linha-de-mundo do observador (e vale c; vide **Fig. 1.2**).

De (a) vemos que, além de haver direções temporais e espaciais em $\mathcal{E}$, há também direções especiais dadas pelas linhas-de-mundo da luz. E de (b) temos que, embora a inclinação relativa entre linhas-de-mundo de diferentes observadores caracterize o movimento relativo entre eles, a velocidade que

---

[2] Demoramos mais de dois séculos para perceber que, na verdade, *esse* é o *nosso* universo — mas isso seria uma discussão para a disciplina de Relatividade Geral.

[3] *Localmente* significa que o observador faz uso apenas de uma porção suficientemente pequena, em torno de sua posição, da trajetória do raio de luz para medir sua velocidade.

[4] Nota de "preciosismo" histórico: a rigor, o postulado adotado por Einstein em 1905, acerca da velocidade da luz, dizia respeito a sua *independência* em relação ao estado de movimento da fonte emissora. No entanto, combinado com o outro postulado adotado, o *Princípio da Relatividade de Einstein* — que, em resumo, dizia que nenhum fenômeno de mecânica ou eletromagnetismo poderia ser usado para se discernir entre dois referenciais inerciais —, conclui-se que a velocidade da luz também não pode depender do estado de movimento do observador. Logo, do ponto de vista lógico, tal distinção é irrelevante.

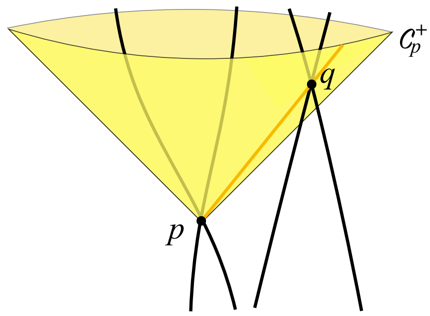

Figura 1.2: Diagrama espaço-tempo mostrando que a estrutura de cone-de-luz a partir de um evento p é independente do estado de movimento da fonte que emitiu a luz. Além disso, diferentes observadores medindo a velocidade da mesma linha-de-mundo de luz em q medem o mesmo valor c, embora os observadores tenham movimento relativo entre eles.

eles atribuem para a luz independe da inclinação relativa entre suas linhas-de-mundo e a da luz.

Agora que sabemos os requisitos físicos que desejamos impor em nosso espaço-tempo de Minkowski — todos motivados por fatos muito bem estabelecidos experimentalmente —, vamos às estruturas matemáticas que os implementam.

1.4 Estruturas matemáticas

Como dissemos anteriormente, muniremos $\mathcal{E}$ com as estruturas necessárias para fazer dele o espaço-tempo específico da Relatividade Restrita: o espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{E} = \mathbb{M}$. Assim, já começaremos pela estrutura mais restritiva que, ao mesmo tempo, formalizará o conceito de "direção" em cada evento (os espaços tangentes $\mathbb{V}_p$ mencionados na seção anterior, $p \in \mathbb{M}$) e, ainda, proverá uma identificação consistente dessas direções em eventos diferentes. Tudo isso (e mais) é feito impondo-se que $\mathbb{M}$ seja um *espaço afim*.

Munir o conjunto de eventos de uma estrutura de espaço afim significa que podemos falar na separação entre eventos como sendo um *vetor* — exatamente como no caso de "segmentos orientados" no espaço euclidiano. Mais precisamente, consideraremos que existe um espaço vetorial (real) de dimensão d (no nosso caso de interesse, $d = 4$), que denotaremos por $\mathbb{V}$, e um mapeamento $\psi : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{V}$ que a cada par de eventos $p, q \in \mathbb{M}$ associa um vetor $\overrightarrow{pq} := \psi(p, q) \in \mathbb{V}$, satisfazendo as seguintes propriedades[5]:

[5]Utilizaremos a notação de vetor com uma "flecha" em cima *apenas* no contexto de segmentos orientados, por similaridade com o caso euclidiano.