Gabarito do 1º Práticas de demonstrações

Ferramentas disponíveis

Propriedade 1: Se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; $a>0$, $-a>0$.

Definição 1: O valor absoluto de a, denotado por $|a|$, é definido como $|a| = a$, se $a \geq 0$, $|a| = -a$, se $a <0$

Definição 2: Denotamos $|a| = \sqrt{a^2}$

Propriedade 2: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x <a$, onde $a > 0$

Propriedade 3: $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$

Propriedade 4: Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a.b| = |a|.|b|$

1) Prove que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $|a/b| = |a|/|b|$
Demonstração:
Usando a definição 2, temos que
$|a/b| = \sqrt{(a/b)^2} = \sqrt{a^2/b^2} = \sqrt{a^2}/\sqrt{b^2} = |a|/|b|$, para $b \neq 0$

2) Prove que se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$

Demonstração:
Como $a, b \in \mathbb{R}$, da propriedade 1 temos que $a.b = 0$, ou $a.b > 0$ ou $-(a.b) > 0$.
Com isto, pelas propriedade 3 e propriedade 4 temos que $a.b \leq |a.b| = |a|.|b|$.
Multiplicando $a.b$ e $|a|.|b|$ por 2, temos que $2.a.b \leq 2.|a|.|b|$.
Da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ temos que
$(a + b)^2 \leq a^2 + 2.|a|.|b| + b^2$
$(a + b)^2 \leq |a|^2 + 2.|a|.|b| + |b|^2$
$(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$
Tomando a raiz quadrada da expressão acima, temos
$|a + b| \leq |a| + |b|$