9.13 Exercícios propostos

Exercício 9.5

O pêndulo da Figura 9.51 está sujeito à gravidade g, sem atrito, e obedece ao equilíbrio de forças

$$m\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = mg \operatorname{sen}\theta(t)\,, \qquad (9.97)$$

sendo que $\theta(t)$ é a posição angular do pêndulo, em radianos. Calcular o seu modelo incremental em $\Theta_0 = 0$ e em $\Theta_0 = \pi/4$.

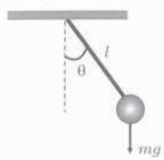

Figura 9.51 Pêndulo simples.

Exercício 9.6

O servomecanismo da Figura 9.52 tem saturação no amplificador de potência. Usando um programa computacional, compare a resposta $y(t)$ ao degrau unitário com a do sistema sem saturação. Observe que a resposta do sistema não linear é similar a do linear, porém mais lenta.

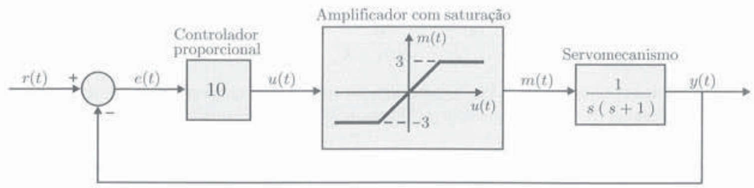

Figura 9.52 Servomecanismo com realimentação unitária e saturação.

Exercício 9.7

Considere o caso da antena de radar da Seção 9.11 com um transdutor de posição medindo diretamente o ângulo $\theta_A(t)$. Admitindo as mesmas especificações dinâmicas, projete um compensador $G_c(s)$ por avanço e atraso de fase de acordo com a Figura 9.53. Observe que o produto $G_3(s)G_4(s)/s$ produz um modelo simplificado para a planta.

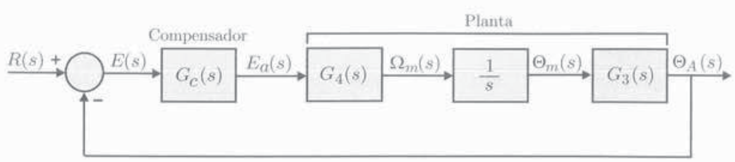

Figura 9.53 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

10

Sistemas de Tempo Discreto

10.1 Introdução

Os sinais eletrônicos podem ser divididos em dois grupos:

- **sinais de tempo contínuo ou analógicos:** definidos em qualquer instante pertencente ao intervalo de observação; representam-se matematicamente por funções $f(t)$, $t \in \mathcal{R}$;
- **sinais de tempo discreto ou amostrados:** definidos apenas em determinados instantes do intervalo de observação; matematicamente, se os instantes são periódicos com período de amostragem T tais sinais se representam por sequências $f(kT)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $k \in \mathcal{N}$.

Os sinais de tempo discreto podem ser originalmente discretos ou resultantes da amostragem de sinais analógicos. Considere, por exemplo, o registro das variações da temperatura atmosférica ao longo de um dia. No gráfico da Figura 10.1 (a) pode-se notar que a temperatura $f(t)$ assume valores em qualquer instante ao longo das 24 horas de um dia, formando um gráfico de linha contínua ao longo do tempo t. Por outro lado, se a temperatura for anotada de hora em hora, em um processo de amostragem, o sinal $f(t)$ converte-se no sinal discreto $f(kT)$ mostrado na Figura 10.1 (b).

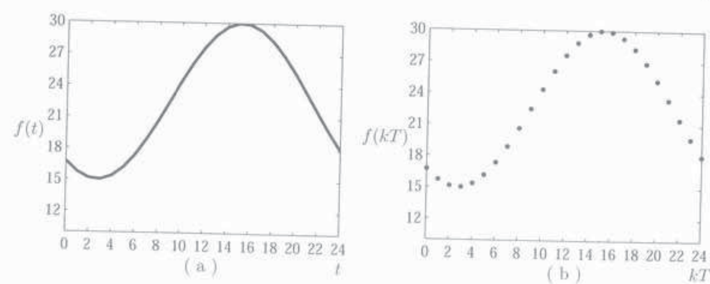

Figura 10.1 Registro de temperaturas em um dia. (a) Tempo contínuo. (b) Tempo discreto.

O sinal discreto da Figura 10.1 (b) pode, por sua vez, ser convertido num sinal digital. Os sinais digitais são resultantes da conversão da amplitude dos sinais de tempo discreto por meio de algum tipo de código binário, ou seja, usando apenas elementos 0 e 1.

10.2 Transformada $\mathcal{Z}$

A transformada $\mathcal{Z}$ é uma aplicação que faz corresponder uma função da variável complexa z a uma sequência de números. A transformada $\mathcal{Z}$ corresponde, no caso discreto, à transformada de Laplace no caso contínuo. A definição da transformada $\mathcal{Z}$ é a seguinte:

Definição 10.1 *Dada uma função $f(t)$, amostrada com período T, ou uma sequência infinita de números $f(0), f(T), f(2T), f(3T), \ldots, f(kT), \ldots$, a transformada $\mathcal{Z}$ é a série de potências*[1]

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[f(kT)] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}, \quad (10.1)$$

sendo z uma variável complexa e $k \in \mathcal{N}$.

Interessa saber em que condições a série (10.1) converge. Prova-se que se $|f(kT)| \leq c^k$ para alguma constante $c > 0$, isto é, se a sequência $f(kT)$ cresce no máximo geometricamente, então a série converge para $|z| > c$. Para $|z| > c$, $F(z)$ é então uma função analítica de z, isto é, tem derivadas de qualquer ordem. Usando o princípio da continuação analítica, $F(z)$ é definível mesmo nos pontos z tais que $|z| < c$. Sempre que possível a transformada $\mathcal{Z}$ será considerada estendida a todo o plano z pelo princípio da continuação analítica.

10.2.1 Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Impulso unitário

A sequência impulso unitário ou $\delta(kT)$ de Kronecker é definida como

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases} \quad (10.2)$$

O gráfico desta sequência é apresentado na Figura 10.2.

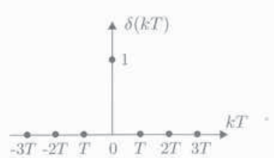

Figura 10.2 Impulso unitário.

Aplicando a definição (10.1) para $k \geq 0$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1. \quad (10.3)$$

[1]A rigor esta é a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral, que só se aplica a sequências $f(t)$ para $t \geq 0$. Ver [29].

Degrau unitário

A sequência degrau unitário é definida como

$$f(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

O gráfico desta sequência é apresentado na Figura 10.3.

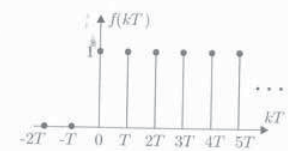

Figura 10.3 Degrau unitário.

Aplicando a definição (10.1) para $k \geq 0$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots \quad (10.5)$$

Para $|z| > 1$, a soma da série (10.5) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica com razão z^{-1} e primeiro termo igual a 1. Logo,

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (10.6)$$

Rampa unitária

A função rampa unitária é definida como

$$f(kT) = \begin{cases} kT & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \quad (10.7)$$

O gráfico desta sequência é apresentado na Figura 10.4.

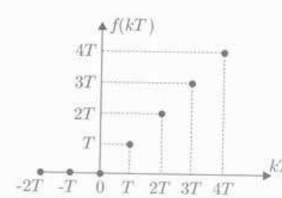

Figura 10.4 Rampa unitária.

Aplicando a definição (10.1) para $k \geq 0$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \ldots \quad (10.8)$$

A expressão (10.8) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{F(z)}{T} &= z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\dots \\
&= z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots+z^{-3}+z^{-4}+\dots+z^{-4}+\dots \\
&= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}+\dots \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}}(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) \\
&= \frac{1}{(1-z^{-1})}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}. \qquad (10.9)
\end{aligned}$$

Logo,

$$F(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2}. \qquad (10.10)$$

Função exponencial

A função exponencial é dada por

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t\ge 0, \\ 0 & t<0. \end{cases} \qquad (10.11)$$

Para $t=kT$ e $k\ge 0$,

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = 1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+e^{-3aT}z^{-3}+\dots \\
&= \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}. \qquad (10.12)
\end{aligned}$$

Sequência a^k

A sequência a^k é dada por

$$f(k)=\begin{cases} a^k & k=0,1,2,\dots \\ 0 & k<0. \end{cases} \qquad (10.13)$$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\dots \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}. \qquad (10.14)
\end{aligned}$$

Função seno

A função seno é dada por

$$f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen}\omega t & t\ge 0, \\ 0 & t<0. \end{cases} \qquad (10.15)$$

$$F(z)=\mathcal{Z}\left[\operatorname{sen}\omega t\right]=\mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right]. \qquad (10.16)$$

Para $t=kT$ e $k\ge 0$, de (10.12) tem-se que

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right)=\frac{1}{2j}\left(\frac{(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})z}{z^2-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z+1}\right) \\
&= \frac{z\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}. \qquad (10.17)
\end{aligned}$$

Função cosseno

A função cosseno é dada por

$$f(t)=\begin{cases} \cos\omega t & t\ge 0, \\ 0 & t<0. \end{cases} \qquad (10.18)$$

$$F(z)=\mathcal{Z}\left[\cos\omega t\right]=\mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right]. \qquad (10.19)$$

Para $t=kT$ e $k\ge 0$, de (10.12) tem-se que

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2z^2-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z}{z^2-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z+1}\right) \\
&= \frac{z^2-z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}. \qquad (10.20)
\end{aligned}$$

Exemplo 10.1

Deseja-se obter a transformada $\mathcal{Z}$ da função cuja transformada de Laplace é

$$F(s)=\frac{a}{s(s+a)}. \qquad (10.21)$$

Expandindo a Equação (10.21) em frações parciais, obtém-se

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}, \qquad (10.22)$$

cuja transformada inversa é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)=1-e^{-at}, \text{ para } t\ge 0. \qquad (10.23)$$

Logo, a transformada $\mathcal{Z}$ de $f(t)$, amostrada com período T, é dada por

$$F(z)=\mathcal{Z}[1-e^{-at}]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}. \qquad (10.24)$$

■

10.2.2 Algumas propriedades e teoremas da transformada $\mathcal{Z}$

Propriedade 10.1 Linearidade

A transformada $\mathcal{Z}$ é uma aplicação linear. De fato, sendo $f(k)$ e $g(k)$ duas sequências e α e β dois números reais, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\alpha f(k)+\beta g(k)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha f(k)+\beta g(k))z^{-k} \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}+\beta\sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \\
&= \alpha F(z)+\beta G(z). \qquad (10.25)
\end{aligned}$$

Propriedade 10.2 Atraso

Dadas as sequências $f(k)$ e $g(k)$, sendo a última obtida por translação da primeira para depois (Figura 10.5 (a) e 10.5 (b)), isto é,

$$g(k) = \begin{cases} f(k-n) & k \geq n\,, \\ 0 & k < n\,. \end{cases} \tag{10.26}$$

Então,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) z^{-k}. \tag{10.27}$$

Definindo $m = k - n$ e dado que $g(k) = 0$ para $k < n$, obtém-se

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-(m+n)} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} = z^{-n} F(z)\,. \tag{10.28}$$

Portanto,

$$G(z) = z^{-n} F(z)\,. \tag{10.29}$$

A propriedade (10.29) permite considerar a variável complexa z^{-n} como um operador de atraso n, aplicável às sequências temporais, que será muito útil na representação de sistemas dinâmicos.

Exemplo 10.2

Considere a sequência

$$f(k) = \begin{cases} e^{-k} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \tag{10.30}$$

e a sequência $g(k)$ atrasada de duas unidades de tempo, isto é,

$$g(k) = \begin{cases} e^{-(k-2)} & k \geq 2 \\ 0 & k = 0,\, 1\,. \end{cases} \tag{10.31}$$

Então,

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \frac{z}{z - e^{-1}}\,. \tag{10.32}$$

Logo,

$$G(z) = z^{-2} F(z) = z^{-2} \frac{z}{z - e^{-1}} = \frac{1}{z(z - e^{-1})}\,. \tag{10.33}$$

■

Propriedade 10.3 Avanço

Dada a sequência $f(k)$ e seja $\hat{h}(k)$ obtida por translação de $f(k)$ para antes (Figura 10.5 (a) e 10.5 (c)), isto é,

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} f(k+n) & k \geq -n\,, \\ 0 & k < -n\,. \end{cases} \tag{10.34}$$

Como a definição da transformada $\mathcal{Z}$ não admite termos da sequência com índice $k < 0$, é necessário truncar $\hat{h}(k)$, obtendo-se a sequência truncada $h(k)$ da Figura 10.5 (d), dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k+n) & k \geq 0\,, \\ 0 & k < 0\,. \end{cases} \tag{10.35}$$

Assim,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n) z^{-k}.$$

Definindo $m = k + n$, então

$$H(z) = \sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-(m-n)} = z^{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right). \tag{10.36}$$

Portanto,

$$H(z) = z^{n} \left(F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right). \tag{10.37}$$

A propriedade (10.37) permite considerar a variável complexa z^{n} como um operador de avanço n, aplicável às sequências temporais com a devida atenção ao truncamento.

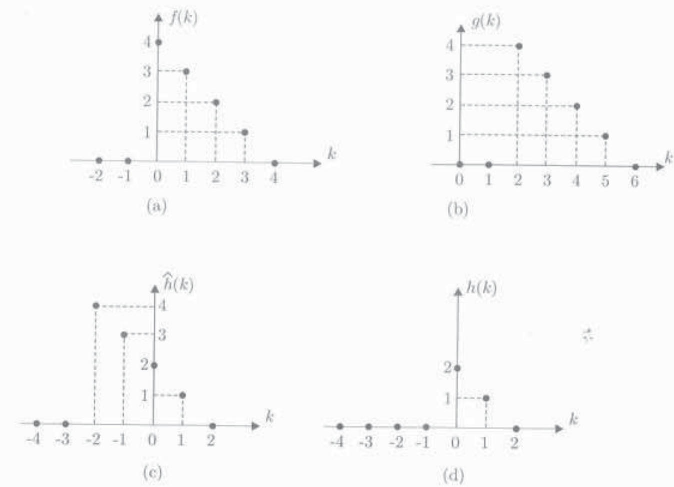

Figura 10.5 (a) Sequência $f(k)$. (b) Sequência $g(k) = f(k-2)$ com atraso de duas unidades de tempo. (c) Sequência $\hat{h}(k) = f(k+2)$ com avanço de duas unidades de tempo. (d) Sequência $h(k) = \hat{h}(k)$ para $k \geq 0$.

Exemplo 10.3

Considere as sequências $h(k) = k + 2$ e $f(k) = k$. Então,

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}. \tag{10.38}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H(z) &= z^2 \left(F(z) - \sum_{k=0}^{1} k z^{-k} \right) \\ &= z^2 \left(\frac{z}{(z-1)^2} - z^{-1} \right) \\ &= \frac{z^3}{(z-1)^2} - z = \frac{2z^2 - z}{(z-1)^2}\,. \end{aligned} \tag{10.39}$$

■

10.2.3 Teorema do valor inicial

Seja $F(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de uma função $f(t)$, então o valor inicial $f(0)$ de $f(t)$ é dado por

$$f(0) = \lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z)\,. \tag{10.40}$$

De fato,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots \tag{10.41}$$

Fazendo $z \to \infty$ na Equação (10.41), obtém-se o valor inicial $f(0)$.

Exemplo 10.4

Determine o valor inicial de uma função $f(k)$, cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{z-a}\,. \tag{10.42}$$

Pelo teorema do valor inicial

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-a} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1\,. \tag{10.43}$$

De fato,

$$F(z) = \mathcal{Z}[a^k] \Rightarrow f(k) = a^k \Rightarrow f(0) = 1\,. \tag{10.44}$$

■

10.2.4 Teorema do valor final

Supondo que $f(k) = 0$ para $k < 0$ e que existe

$$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z)\,,$$

então o valor final de $f(k)$ é dado por

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z). \tag{10.45}$$

Para mostrar este teorema, basta considerar que

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}\,, \tag{10.46}$$

$$\mathcal{Z}[f(k-1)] = z^{-1}F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k}. \tag{10.47}$$

Subtraindo a Equação (10.46) da (10.47) e calculando o $\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z) &= \lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(f(k) - f(k-1))z^{-k}\right] \\
&= [f(0) - f(-1)] + [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \ldots \\
&= f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(k).
\end{aligned} \tag{10.48}$$

Exemplo 10.5

Determine o valor final de uma função $f(k)$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-a})z}{(z-1)(z-e^{-a})}\,. \tag{10.49}$$

Pelo teorema do valor final

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)}{z}\,\frac{(1-e^{-a})z}{(z-1)(z-e^{-a})} = 1\,. \tag{10.50}$$

De fato,

$$F(z) = \mathcal{Z}[1 - e^{-ak}] \Rightarrow f(k) = 1 - e^{-ak} \Rightarrow f(\infty) = 1\,. \tag{10.51}$$

■

10.3 Função de transferência

Num sistema discreto no tempo a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$ são sequências de números, sendo portanto suscetíveis de representação por transformadas $\mathcal{Z}$. A descrição matemática fundamental de um sistema dinâmico discreto no tempo é uma equação de diferenças. No caso de ser linear e invariante no tempo ela é do tipo

$$\begin{aligned}
&y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + a_{n-2}y(k+n-2) + \ldots + a_0y(k) = \\
&b_mu(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + b_{m-2}u(k+m-2) + \ldots + b_0u(k)
\end{aligned} \tag{10.52}$$

sendo n a ordem do sistema, e a_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ e b_j $(j = 0, \ldots, m-1)$ constantes, com $m \le n$.

Aplicando a propriedade (10.3) do avanço na Equação (10.52), obtém-se

$$\begin{aligned}
&z^nY(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(k)z^{n-k} + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) - a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-2} y(k)z^{n-1-k} + \ldots + a_0Y(z) = \\
&b_mz^mU(z) - b_m\sum_{k=0}^{m-1} u(k)z^{m-k} + b_{m-1}z^{m-1}U(z) - b_{m-1}\sum_{k=0}^{m-2} u(k)z^{m-1-k} + \ldots + b_0U(z).
\end{aligned} \tag{10.53}$$

Supondo condições iniciais nulas

$$y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_0 = u_{m-1} = u_{m-2} = \ldots = u_0 = 0\,, \tag{10.54}$$

obtém-se

$$(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)Y(z) = (b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0)U(z). \tag{10.55}$$

A função de transferência $G(z)$ é definida como a razão das transformadas $\mathcal{Z}$ da saída $Y(z)$ e da entrada $U(z)$ do sistema supondo condições iniciais nulas ($c.i. = 0$), ou seja,

$$G(z) \triangleq \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{c.i.=0}\,. \tag{10.56}$$

Logo, a função de transferência é dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0}\,,\quad \text{com } m \le n. \tag{10.57}$$

Note que $G(z)$ independe dos sinais de entrada e saída, desde que haja condições iniciais nulas. $G(z)$ depende apenas dos parâmetros a_i $(i = 0, \ldots, n-1)$, b_j $(j = 0, \ldots, m)$ e das ordens n e m. Um sistema discreto, linear e invariante no tempo $G(z)$, com entrada $U(z)$ e saída $Y(z)$, é apresentado na Figura 10.6.

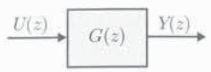

Figura 10.6 Sistema $G(z)$ com entrada $U(z)$ e saída $Y(z)$.

Assim como no caso dos sistemas contínuos, os pontos do plano z em que a função $G(z)$ ou suas derivadas tendem ao infinito são os **polos** de $G(z)$. Já os pontos em que a função $G(z)$ se anula são os **zeros** de $G(z)$. No caso de $G(z)$ ser racional, como na Equação (10.57), tem-se que

- os **polos** são as raízes do polinômio do denominador de $G(z)$, e
- os **zeros** são as raízes do polinômio do numerador de $G(z)$.

Uma outra forma equivalente de expressar a função de transferência (10.57) é através de potências negativas de z. Para isso basta multiplicar o numerador e o denominador da Equação (10.57) por z^{-n}, ou seja,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \ldots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}}, \quad \text{com } m \leq n. \tag{10.58}$$

10.3.1 Álgebra de blocos

É fácil verificar que valem para as funções de transferência em z as mesmas regras de álgebra de blocos que as das funções de transferência em s.

10.4 Resposta impulsiva

Supondo que a entrada $U(z)$ do sistema da Figura 10.6 seja um impulso unitário no instante zero, então $U(z) = 1$. Da Equação (10.58) resulta que $Y(z) = G(z)$, ou seja, a função de transferência do sistema é igual à transformada $\mathcal{Z}$ da saída.

Dividindo-se o numerador pelo denominador na Equação (10.58) obtêm-se

$$\begin{aligned} Y(z) &= b_m z^{m-n} + (b_{m-1} - b_m a_{n-1})\, z^{m-n-1} + \ldots \\ &= b_m z^{-(n-m)} + (b_{m-1} - b_m a_{n-1})\, z^{-(n-m+1)} + \ldots \end{aligned} \tag{10.59}$$

Diz-se que um sistema é causal quando as suas respostas sempre ocorrem após ou simultaneamente com as entradas. Uma função de transferência é dita realizável fisicamente quando corresponde a um sistema causal.

Assim, aplicando a propriedade do atraso (10.29) na Equação (10.59) obtém-se a sequência $y(k)$, dada por

$$y(k) = b_m \delta[k - (n-m)] + (b_{m-1} - b_m a_{n-1})\, \delta[k - (n-m+1)] + \ldots \tag{10.60}$$

Para que a função de transferência $G(z)$ das Equações (10.57) ou (10.58) seja fisicamente realizável, é necessário que $\delta[k - (n-m)]$ ocorra em $n - m \geq 0$, ou seja, $n \geq m$. Logo, o grau do denominador de $G(z)$ deve ser maior ou igual ao grau do seu numerador, ou o número n de polos de $G(z)$ deve ser maior ou igual ao seu número m de zeros.

10.5 Transformada $\mathcal{Z}$ inversa

Deseja-se determinar a sequência $f(k)$, cuja transformada $\mathcal{Z}$ é uma dada função $F(z)$. A sequência $f(k)$ é dita transformada $\mathcal{Z}$ inversa e pode ser obtida através dos seguintes métodos:

- expansão em série por divisão contínua;
- programa de computador;
- expansão em frações parciais.

10.5.1 Expansão em série por divisão contínua

A expansão em série de potências da função $F(z)$ consiste na simples divisão contínua do polinômio do numerador pelo polinômio do denominador.

Exemplo 10.6

Determine $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ quando $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2}. \tag{10.61}$$

Escrevendo $F(z)$ com potências negativas de z obtém-se

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{(z-0{,}5)(z^2-2z+1)} \\ &= \frac{z}{z^3 - 2{,}5z^2 + 2z - 0{,}5} \\ &= \frac{z^{-2}}{1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3}}. \end{aligned} \tag{10.62}$$

Dividindo o numerador pelo denominador da Equação (10.62) obtém-se

$$\begin{array}{llllll|l} z^{-2} & & & & & & 1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3} \\ \hline -z^{-2} & +2{,}5z^{-3} & -2z^{-4} & 0{,}5z^{-5} & & & z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + 4{,}25z^{-4} + 6{,}125z^{-5} + \ldots \\ \hline & +2{,}5z^{-3} & -2z^{-4} & 0{,}5z^{-5} & & & \\ & -2{,}5z^{-3} & +6{,}25z^{-4} & -5z^{-5} & +1{,}25z^{-6} & & \\ \hline & & +4{,}25z^{-4} & -4{,}5z^{-5} & +1{,}25z^{-6} & & \\ & & -4{,}25z^{-4} & +10{,}625z^{-5} & -8{,}5z^{-6} & +2{,}125z^{-7} & \\ \hline & & & +6{,}125z^{-5} & -7{,}25z^{-6} & +2{,}125z^{-7} & \end{array}$$

$$F(z) = z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + 4{,}25z^{-4} + 6{,}125z^{-5} + \ldots \tag{10.63}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 2{,}5 \\ f(4) &= 4{,}25 \\ f(5) &= 6{,}125\,. \end{aligned}$$

Conforme se pode notar, este método fornece diretamente os elementos da série e não uma expressão geral para a sequência $f(k)$.

■

10.5.2 Programa de computador

Consiste em determinar numericamente a sequência $f(k)$ a partir de uma equação de diferenças implementada dentro de um laço de repetição de um programa de computador. Para obter a equação de diferenças supõe-se que $F(z)$ seja uma função de transferência com entrada impulsiva e condições iniciais nulas.

Exemplo 10.7

Determine $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ quando $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2} . \qquad (10.64)$$

Supondo que $F(z)$ é a saída de um sistema com entrada impulsiva ($U(z) = 1$) e com condições iniciais nulas, então

$$F(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2} U(z) . \qquad (10.65)$$

Escrevendo $F(z)$ em termos de potências negativas de z, obtêm-se

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3}} U(z) . \qquad (10.66)$$

Aplicando a transformada inversa e a propriedade (10.29) do atraso obtém-se a equação de diferenças

$$f(k) = 2{,}5f(k-1) - 2f(k-2) + 0{,}5f(k-3) + u(k-2) . \qquad (10.67)$$

Sabendo-se que $f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$ e que $u(k)$ é um impulso, ou seja,

$$u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 , \\ 0 & k > 0 , \end{cases} \qquad (10.68)$$

os valores de $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) podem ser calculados por meio de uma implementação da Equação (10.67) num programa de computador.

A seguir é apresentado o trecho de um programa escrito na linguagem C.

Tabela 10.1 Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

```
fk_1=0;
fk_2=0;
fk_3=0;
for (k=0;k<=10;k++)
{
   if (k==2) uk_2=1;
      else uk_2=0;
   fk=2.5*fk_1-2*fk_2+0.5*fk_3+uk_2;
   fk_3=fk_2;
   fk_2=fk_1;
   fk_1=fk;
}
```

k	$u(k-2)$	$f(k)$
0	0	0
1	0	0
2	1	1
3	0	2,5000
4	0	4,2500
5	0	6,1250
6	0	8,0625
7	0	10,0313
8	0	12,0156
9	0	14,0078
10	0	16,0039

■

10.5.3 Expansão em frações parciais

Considere a função

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)\ldots(z-p_n)} , \quad \text{com } m \le n. \qquad (10.69)$$

O método da expansão em frações parciais consiste em expandir a função da Equação (10.69) em frações que podem ser facilmente identificáveis na tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ (10.2). A diferença deste método com relação aos dois anteriores é que o resultado da transformação inversa da função $F(z)$ é uma função $f(k)$.

Polos distintos

Se $F(z)$ possuir pelo menos um zero na origem ($b_0 = 0$) e apenas polos distintos, então pode-se realizar a seguinte expansão:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{a_n}{z-p_n} , \qquad (10.70)$$

onde cada coeficiente a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) pode ser calculado como

$$a_i = \left[(z-p_i)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=p_i} . \qquad (10.71)$$

Após a expansão $F(z)$ pode ser escrita como

$$F(z) = \frac{a_1 z}{z-p_1} + \frac{a_2 z}{z-p_2} + \ldots + \frac{a_n z}{z-p_n} . \qquad (10.72)$$

A inversa de $F(z)$ é a soma das inversas

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a_i z}{z-p_i}\right] = a_i(p_i)^k , \text{ com } i = 1, 2, \ldots, n . \qquad (10.73)$$

A expansão de $F(z)/z$ visa apenas facilitar a identificação das frações expandidas na tabela de transformadas $\mathcal{Z}$. Caso $F(z)$ não possua pelo menos um zero na origem o método também pode ser aplicado, ou seja,

$$F(z) = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{a_n}{z-p_n} . \qquad (10.74)$$

Pela propriedade do atraso (10.29) tem-se que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a_i}{z-p_i}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{a_i z}{z-p_i}\right] = a_i(p_i)^{k-1} , \text{ com } i = 1, 2, \ldots, n . \qquad (10.75)$$

Se $F(z)$ possuir polos complexos conjugados, então cada polo complexo também pode ser manipulado como sendo uma raiz distinta.

Polos múltiplos

Se $F(z)$ possui um polo p com multiplicidade m, então devem ser desenvolvidas m frações associadas a p, ou seja,

$$\frac{b_1}{(z-p)^m} + \frac{b_2}{(z-p)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_m}{(z-p)} .$$

Prova-se que cada constante b_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) pode ser calculada como

$$b_j = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{z \to p} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[(z-p)^m \frac{F(z)}{z}\right] . \qquad (10.76)$$

A Equação (10.76) também se aplica no caso de $F(z)$ possuir polos complexos conjugados múltiplos.

Exemplo 10.8

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de

$$F(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2} \,. \tag{10.77}$$

Note que $F(z)$ possui um zero na origem e um polo múltiplo em $z = 1$ com multiplicidade $m = 2$.

a) $F(z)/z$ pode ser expandida em frações parciais do seguinte modo:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z-0{,}5} + \frac{b_1}{(z-1)^2} + \frac{b_2}{z-1} \,, \tag{10.78}$$

sendo

$$a_1 = \left[(z-0{,}5)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=0{,}5} = \left[(z-0{,}5)\frac{1}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\right]_{z=0{,}5} = 4 \,, \tag{10.79}$$

$$b_1 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\right] = 2 \,, \tag{10.80}$$

$$b_2 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{-1}{(z-0{,}5)^2}\right] = -4 \,. \tag{10.81}$$

Portanto,

$$F(z) = \frac{4z}{z-0{,}5} + \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{z-1} \,. \tag{10.82}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ obtém-se

$$f(k) = 4(0{,}5)^k + 2k - 4, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.83}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0\\
f(1) &= 0\\
f(2) &= 1\\
f(3) &= 2{,}5\\
f(4) &= 4{,}25\\
f(5) &= 6{,}125\\
f(6) &= 8{,}0625\\
f(7) &= 10{,}0313\\
f(8) &= 12{,}0156\\
f(9) &= 14{,}0078\\
f(10) &= 16{,}0039 \,.
\end{aligned}$$

b) Outro modo de obter os coeficientes da expansão $F(z)/z$ é através de uma identificação dos coeficientes do polinômio do numerador antes e depois da expansão em frações parciais. Assim,

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z-0{,}5} + \frac{b_1}{(z-1)^2} + \frac{b_2}{z-1} = \frac{a_1(z-1)^2 + b_1(z-0{,}5) + b_2(z-0{,}5)(z-1)}{(z-0{,}5)(z-1)^2} \,. \tag{10.84}$$

Identificando

$$a_1(z-1)^2 + b_1(z-0{,}5) + b_2(z-0{,}5)(z-1) = 1 \,, \tag{10.85}$$

ou seja,

$$z^2(a_1+b_2) + z(-2a_1 + b_1 - 1{,}5b_2) + a_1 - 0{,}5b_1 + 0{,}5b_2 = 1 \,. \tag{10.86}$$

A Equação (10.86) tem solução quando

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} a_1 & & +b_2 & = & 0 \,,\\ -2a_1 & +b_1 & -1{,}5b_2 & = & 0 \,,\\ +a_1 & -0{,}5b_1 & +0{,}5b_2 & = & 1 \,. \end{array}\right. \tag{10.87}$$

Resolvendo o sistema (10.87) obtêm-se os mesmos resultados que em (10.79), (10.80) e (10.81), ou seja,

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \,,\\ b_1 &= 2 \,,\\ b_2 &= -4 \,. \end{aligned}$$

c) Em vez de expandir a função $F(z)/z$ pode-se também expandir $F(z)$, isto é,

$$F(z) = \frac{a_1}{z-0{,}5} + \frac{b_1}{(z-1)^2} + \frac{b_2}{z-1} \,, \tag{10.88}$$

sendo

$$a_1 = [(z-0{,}5)\,F(z)]_{z=0{,}5} = \left[(z-0{,}5)\frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\right]_{z=0{,}5} = 2 \,, \tag{10.89}$$

$$b_1 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\,F(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\right] = 2 \,, \tag{10.90}$$

$$b_2 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\,F(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{-0{,}5}{(z-0{,}5)^2}\right] = -2 \,. \tag{10.91}$$

Portanto,

$$F(z) = \frac{2}{z-0{,}5} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} \,. \tag{10.92}$$

Aplicando a propriedade do atraso (10.29) na Equação (10.92), obtém-se a seguinte transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$f(k) = \left\{\begin{array}{ll} 2(0{,}5)^{k-1} + 2(k-1) - 2 & k = 1, 2, 3 \ldots\\ 0 & k = 0 \,. \end{array}\right. \tag{10.93}$$

A Equação (10.93) também pode ser escrita como

$$f(k) = 2(0{,}5)^{k-1}\frac{0{,}5}{0{,}5} + 2k - 4 \,. \tag{10.94}$$

Logo,

$$f(k) = 4(0{,}5)^k + 2k - 4, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.95}$$

que é igual à $f(k)$ da Equação (10.83).

■

Tabela 10.2 Tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ e de Laplace

$F(s)$	$f(t)$	$f(k)$	$F(z)$
1	$\delta(t)$	-	-
e^{-Ts}	$\delta(t-T)$	-	-
-	-	$\delta(kT)$	1
-	-	$\delta[(k-n)T]$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2ze^{-aT}(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{(aT-1+e^{-aT})z^2+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\text{sen}\,\omega t$	$\text{sen}\,\omega kT$	$\frac{z\text{sen}\,\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\text{sen}\,\omega t$	$e^{-akT}\text{sen}\,\omega kT$	$\frac{ze^{-aT}\text{sen}\,\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
-	-	a^k	$\frac{z}{z-a}$
-	-	$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$
-	-	$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} a^{k-m}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

Tabela 10.3 Teoremas e propriedades da transformada $\mathcal{Z}$

Linearidade	$\mathcal{Z}[\alpha f(k)+\beta g(k)] = \alpha F(z)+\beta G(z)$.
Atraso	$\mathcal{Z}[f(k-n)] = z^{-n}F(z)$.
Avanço	$\mathcal{Z}[f(k+n)] = z^n\left(F(z)-\sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k}\right)$.
Teorema do valor inicial	$\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z)$.
Teorema do valor final	$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$.

10.6 Exercícios resolvidos

Exercício 10.1

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $f(k)$ da Tabela 10.4.

Tabela 10.4 Sequência $f(k)$

k	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
$f(k)$	0	1	2	3	0	0	0	•	•	•

Solução

Aplicando a definição de transformada $\mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+f(3)z^{-3}+\ldots \\ &= \frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3} = \frac{z^2+2z+3}{z^3}. \end{aligned} \tag{10.96}$$

Exercício 10.2

A resposta $y(k)$ de um sistema para uma entrada $u(k)$ do tipo impulso unitário está apresentada na Tabela 10.5. Determine a função de transferência $G(z) = Y(z)/U(z)$ e uma expressão para $y(k)$.

Tabela 10.5 Resposta $y(k)$

k	0	1	2	3	4	•	•	•
$y(k)$	2	1	0,5	0,25	0,125	•	•	•

Solução

Aplicando a definição de transformada $\mathcal{Z}$,

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 2+z^{-1}+0{,}5z^{-2}+0{,}25z^{-3}+0{,}125z^{-4}+\ldots \tag{10.97}$$

A Equação (10.97) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica com razão $0{,}5z^{-1}$ e primeiro termo igual a 2. Para $|z|> 1$, há convergência. Assim,

$$Y(z) = \frac{2}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{2z}{z-0{,}5}. \tag{10.98}$$

Como a entrada $u(k)$ é um impulso unitário, então $U(z) = 1$. Logo,

$$Y(z) = G(z) = \frac{2z}{z - 0{,}5} \,. \tag{10.99}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ (10.2) obtém-se

$$y(k) = 2(0{,}5)^k \,. \tag{10.100}$$

Exercício 10.3

Um sistema dinâmico é descrito pela equação de diferenças

$$y(k+2) - y(k+1) + 0{,}09y(k) = u(k), \quad \text{com } y(0) = y(1) = 0 \,. \tag{10.101}$$

Supondo que $u(k)$ é um degrau unitário determine:
a) a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y(k)$;
b) $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$.

Solução

a) Aplicando a propriedade (10.37) do avanço na Equação (10.101) obtém-se

$$z^2\left(Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}\right) - z\left(Y(z) - y(0)\right) + 0{,}09Y(z) = U(z) \,. \tag{10.102}$$

Como $y(0) = y(1) = 0$, então

$$Y(z)(z^2 - z + 0{,}09) = U(z) \,. \tag{10.103}$$

Como $u(k)$ é um degrau unitário, então $\mathcal{Z}[u(k)] = z/(z-1)$. Logo,

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}09)} \,. \tag{10.104}$$

b) Aplicando o teorema do valor final na Equação (10.104) obtém-se

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z}\,\frac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}09)} = \frac{1}{0{,}09} \cong 11{,}111 \,. \tag{10.105}$$

Exercício 10.4

Dado

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)} \,, \tag{10.106}$$

determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa.

Solução

• Por meio de expansão em série por divisão contínua

Escrevendo $F(z)$ com potências negativas de z obtém-se

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2} = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3}} \,. \tag{10.107}$$

Dividindo o numerador pelo denominador tem-se que

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
z^{-1} & +4z^{-2} & & & & & & 1 \; -3z^{-1} \; +4z^{-2} \; -2z^{-3} \\ \cline{8-8}
-z^{-1} & +3z^{-2} & -4z^{-3} & +2z^{-4} & & & & z^{-1} + 7z^{-2} + 17z^{-3} + 25z^{-4} + 21z^{-5} \ldots \\ \hline
 & +7z^{-2} & -4z^{-3} & +2z^{-4} & & & & \\
 & -7z^{-2} & +21z^{-3} & -28z^{-4} & +14z^{-5} & & & \\ \cline{2-5}
 & & +17z^{-3} & -26z^{-4} & +14z^{-5} & & & \\
 & & -17z^{-3} & +51z^{-4} & -68z^{-5} & +34z^{-6} & & \\ \cline{3-6}
 & & & +25z^{-4} & -54z^{-5} & +34z^{-6} & & \\
 & & & -25z^{-4} & +75z^{-5} & -100z^{-6} & +50z^{-7} & \\ \cline{4-7}
 & & & & +21z^{-5} & -66z^{-6} & +50z^{-7} &
\end{array}$$

$$F(z) = z^{-1} + 7z^{-2} + 17z^{-3} + 25z^{-4} + 21z^{-5} \ldots \tag{10.108}$$

Logo, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 7$, $f(3) = 17$, $f(4) = 25$, $f(5) = 21, \ldots$

• Por meio de programa de computador

Supondo que $F(z)$ é a função de transferência de um sistema e que sua entrada é o impulso $U(z) = 1$, então

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2}U(z) = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3}}\,U(z) \,. \tag{10.109}$$

Aplicando a propriedade (10.29) do atraso obtém-se

$$f(k) = 3f(k-1) - 4f(k-2) + 2f(k-3) + u(k-1) + 4u(k-2) \,. \tag{10.110}$$

Sabendo-se que $f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$ e que $u(k)$ é um impulso, então a Equação (10.110) pode ser implementada num programa de computador.

A seguir é apresentado o trecho de um programa, escrito na linguagem C, que calcula os valores da sequência $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Tabela 10.6 Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$

```
fk_1=0;
fk_2=0;
fk_3=0;
for (k=0;k<=10;k++)
{
  if (k==1) uk_1=1;
       else uk_1=0;
  if (k==2) uk_2=1;
       else uk_2=0;
  fk=3*fk_1-4*fk_2+2*fk_3+uk_1+4*uk_2;
  fk_3=fk_2;
  fk_2=fk_1;
  fk_1=fk;
}
```

k	$u(k-1)$	$u(k-2)$	$f(k)$
0	0	0	0
1	1	0	1
2	0	1	7
3	0	0	17
4	0	0	25
5	0	0	21
6	0	0	−3
7	0	0	−43
8	0	0	−75
9	0	0	−59
10	0	0	37

- **Por meio de expansão em frações parciais**

$F(z)/z$ pode ser expandida em frações parciais do seguinte modo

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1-j)} + \frac{a_2^*}{(z-1+j)} \tag{10.111}$$

sendo a_2^* o complexo conjugado de a_2.

$$a_1 = \left[(z-1)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1} = \left[(z-1)\frac{z+4}{(z^2-2z+2)(z-1)}\right]_{z=1} = 5\,, \tag{10.112}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \left[(z-1-j)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1+j} \\ &= \left[(z-1-j)\frac{z+4}{(z-1-j)(z-1+j)(z-1)}\right]_{z=1+j} = \frac{5+j}{2j^2} = -2{,}5-0{,}5j\,, \end{aligned} \tag{10.113}$$

$$a_2^* = -2{,}5+0{,}5j. \tag{10.114}$$

Portanto,

$$F(z) = \frac{5z}{z-1} + (-2{,}5-0{,}5j)\frac{z}{z-1-j} + (-2{,}5+0{,}5j)\frac{z}{z-1+j}\,. \tag{10.115}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ obtém-se

$$f(k) = 5 + (-2{,}5-0{,}5j)(1+j)^k + (-2{,}5+0{,}5j)(1-j)^k\,. \tag{10.116}$$

Como

$$\begin{aligned} (1+j)^k &= (\sqrt{2}\,e^{\frac{j\pi}{4}})^k = (\sqrt{2})^k\,e^{\frac{j\pi k}{4}}\,, \\ (1-j)^k &= (\sqrt{2}\,e^{\frac{-j\pi}{4}})^k = (\sqrt{2})^k\,e^{\frac{-j\pi k}{4}}\,, \end{aligned} \tag{10.117}$$

então,

$$\begin{aligned} f(k) &= 5 + (-2{,}5-0{,}5j)(\sqrt{2})^k\left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right] \\ &\quad + (-2{,}5+0{,}5j)(\sqrt{2})^k\left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) - j\,\text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{10.118}$$

Logo,

$$f(k) = 5 - 5(\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + (\sqrt{2})^k\,\text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\,,\ \text{com}\ k = 0,1,2,\dots \tag{10.119}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 7 \\ f(3) &= 17 \\ f(4) &= 25 \\ f(5) &= 21 \\ f(6) &= -3 \\ f(7) &= -43 \\ f(8) &= -75 \\ f(9) &= -59 \\ f(10) &= 37 \end{aligned}$$

Quando a função $F(z)$ possui polos complexos conjugados pode-se realizar a expansão de acordo com termos tabelados, ou seja,

$$F(z) = \frac{z^2+4z}{(z^2-2z+2)(z-1)} = \frac{5z}{z-1} + \frac{R(z)}{z^2-2z+2}\,. \tag{10.120}$$

Necessariamente,

$$R(z)(z-1) + 5z^3 - 10z^2 + 10z = z^2 + 4z \tag{10.121}$$

ou

$$R(z) = \frac{-5z^3 + 11z^2 - 6z}{z-1} = -5z^2 + 6z\,. \tag{10.122}$$

Logo,

$$F(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{(5z^2-6z)}{z^2-2z+2}\,. \tag{10.123}$$

Da tabela de transformadas $\mathcal{Z}$ (10.57) obtém-se

$$\mathcal{Z}\left[e^{-at}\cos\omega t\right] = \frac{z^2 - ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}\,, \tag{10.124}$$

$$\mathcal{Z}\left[e^{-at}\,\text{sen}\,\omega t\right] = \frac{ze^{-aT}\,\text{sen}\,\omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}\,. \tag{10.125}$$

Escrevendo a Equação (10.123) de modo a utilizar as funções tabeladas (10.124) e (10.125), obtém-se

$$F(z) = \frac{5z}{z-1} - 5\frac{(z^2-z)}{z^2-2z+2} + \frac{z}{z^2-2z+2}\,. \tag{10.126}$$

Comparando as Equações (10.124), (10.125) e (10.126) tem-se que

$$e^{-2aT} = 2 \Rightarrow e^{-aT} = \sqrt{2}\,. \tag{10.127}$$

$$e^{-aT}\cos\omega T = 1 \Rightarrow \cos\omega T = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{10.128}$$

Logo,

$$\omega T = \frac{\pi}{4}\,. \tag{10.129}$$

Portanto, a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $F(z)$ é dada por

$$f(k) = 5 - 5e^{-akT}\cos(\omega kT) + e^{-akT}\,\text{sen}\,(\omega kT)\,,\ \text{ou} \tag{10.130}$$

$$f(k) = 5 - 5(\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + (\sqrt{2})^k\,\text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\,,\ \text{com}\ k = 0,1,2,\dots \tag{10.131}$$

10.7 Exercícios propostos

Exercício 10.5

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ das funções seno e cosseno amortecido, definidos por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \operatorname{sen} \omega t & t \geq 0\,, \\ 0 & t < 0\,, \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega t & t \geq 0\,, \\ 0 & t < 0\,. \end{cases}$$

Exercício 10.6

Supondo um período de amostragem $T = 1$ s, determine a transformada $\mathcal{Z}$ da função $f(t)$ da Figura 10.7.

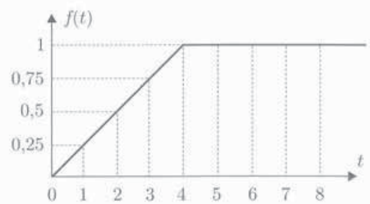

Figura 10.7 Função $f(t)$.

Exercício 10.7

Considere um sistema com entrada $u(k)$ e saída $y(k)$. Quando a entrada é um impulso unitário a saída é o sinal apresentado na Figura 10.8.

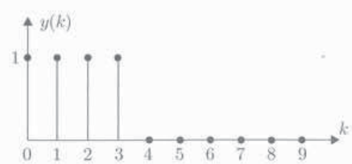

Figura 10.8 Saída $y(k)$ para entrada impulso unitário.

a) Determine a resposta $y(k)$ da saída quando a entrada $u(k)$ for um degrau unitário.
b) Desenhe o gráfico da sequência $y(k)$ correspondente.

Exercício 10.8

Dado um sistema dinâmico descrito pela equação de diferenças

$$y(k+2) - 1{,}3y(k+1) + 0{,}4y(k) = u(k)\,, \text{ com } y(0) = y(1) = 0\,,$$

sabendo-se que $u(k)$ é um degrau unitário, calcule:
a) a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y(k)$;
b) $\lim_{k \to \infty} y(k)$.

Exercício 10.9

Dado

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^3}\,,$$

determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa por meio de
- expansão em série por divisão contínua;
- programa de computador;
- expansão em frações parciais.

Exercício 10.10

Dada a função de transferência

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,,$$

sabendo-se que a entrada $U(z)$ é do tipo degrau unitário, determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa da saída $Y(z)$ por meio de
- expansão em série por divisão contínua;
- programa de computador;
- expansão em frações parciais.

Exercício 10.11

Determine a solução $f(k)$ da seguinte equação de diferenças

$$f(k+2) + 3f(k+1) + 2f(k) = 0, \text{ com } f(0) = 0\,,\ f(1) = 1.$$

Verifique o resultado obtido, calculando $f(k)$ para $k = 0, \ldots, 5$ por meio dos métodos da divisão contínua e por meio de um programa de computador.

Exercício 10.12

Dado um sistema dinâmico descrito pela equação de diferenças

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k)\,, \text{ com } y(0) = y(1) = 0\,,$$

sabendo-se que $u(k) = k$, determine a solução $y(k)$.

Verifique o resultado obtido calculando $y(k)$ para $k = 0, \ldots, 5$ por meio dos métodos da divisão contínua e por meio de um programa de computador.