1. Espaços Vetoriais

26/08/2020

Slide 12

Contraexemplo: $V = \mathbb{R}^2$ é um EV em relação às operações abaixo?

$$* \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$* \quad k(a,b) = (ka, b), \quad k \in \mathbb{R}$$

Para que o conjunto seja um EV:

$$* \ 1^{\circ} \text{ requisito} \begin{cases} (i) & \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad \underline{\vec{u} + \vec{v} \in V} \\ (ii) & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \underline{\alpha \vec{u} \in V} \end{cases}$$

→ OK!

* 2° requisito { 8 axiomas, $\underline{A_1 \text{ a } M_4}$, satisfeitos / verificados.

2° requisito

A4) $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$, $\quad \vec{v} = (a,b)$, $\underline{a, b \in \mathbb{R}}$

$$-\vec{v} = -1\,\vec{v} = (-a, b)$$

$$\therefore \quad (a,b) + (-a,b) = (-a,b) + (a,b) = (0,0)$$

$$(0, 2b) = (0, 2b) = (0,0) \quad (F)$$

EXERCÍCIOS - Slide 14

1) Para que o conjunto seja um EV:

$$* \ 1^{\circ} \text{ requisito} \begin{cases} (i) & \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad \underline{\vec{u} + \vec{v} \in V} \\ (ii) & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \underline{\alpha \vec{u} \in V} \end{cases}$$

* 2° requisito { 8 axiomas, $\underline{A_1 \text{ a } M_4}$, verificados.

1º requisito

$V = \{ (x_1, x_2) \; ; \; x_1 x_2 \geqslant 0 \}$ → Quando $x_1 x_2 \geqslant 0$ no $\mathbb{R}^2$?

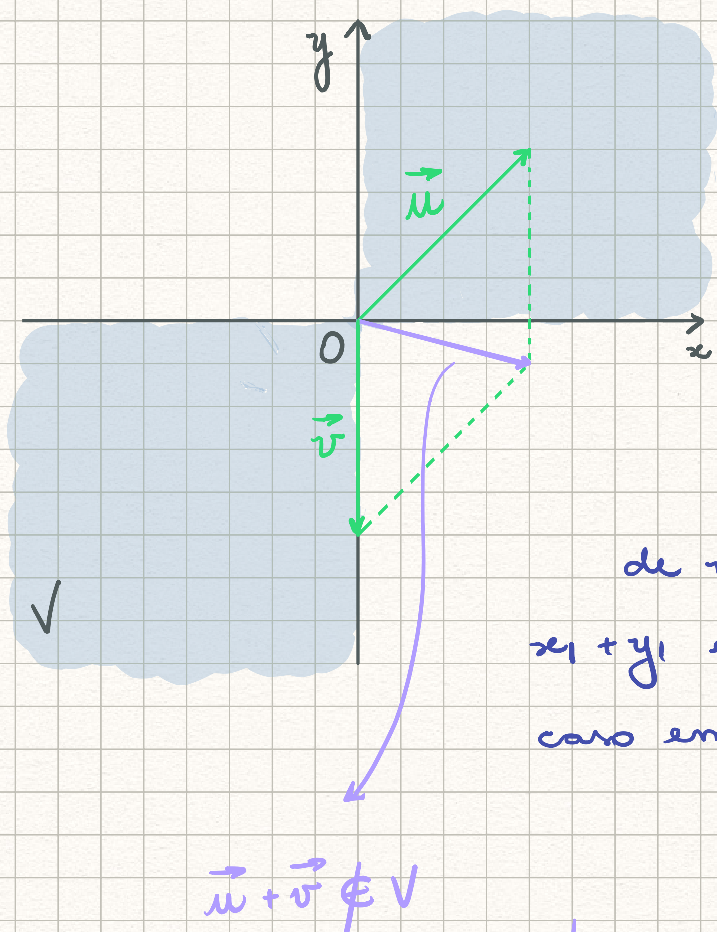
$x_1 x_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

SE E SOMENTE SE

x_1	x_2
+	+
−	−
0	±
±	0
0	0

qq vetor com essas características ∈ conjunto

∴ vetores de V estão no 1º e 3º quadrantes!



$\vec{u} = (x_1, x_2)$;

$\vec{y} = (y_1, y_2)$

Só é possível garantir que os pares x_1, x_2 e y_1, y_2 têm coordenadas de mesmo sinal; podendo ocorrer $x_1 + y_1$ e $x_2 + y_2$ de sinais contrários, caso em que $\vec{u} + \vec{v} \notin V$.

Logo, V não é um EV, pois não satisfaz o 1º requisito.

2) $V = \{ (x_1, x_2) \; ; \; x_i \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$, de acordo com as operações:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$
$$K(x_1, x_2) = (Kx_1, 0)$$

* 1º requisito se verifica, pois se 2 vetores forem somados ou 1 vetor for multiplicado por escalar, o vetor resultante sempre $\in V = \mathbb{R}^2$.

* 2º requisito: Axiomas; $\vec{u} = (x_1, x_2)$; $\vec{v} = (y_1, y_2)$; $\vec{w} = (z_1, z_2)$.

A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$$((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2))$$
$$(x_1, x_2) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$$
$$(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \text{(V)}$$

A2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$$
$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \quad \text{(F)}$$

A3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

$$(x_1, x_2) + (0,0) = (0,0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$
$$(x_1, x_2) = (0,0) = (x_1, x_2) \quad \text{(F)}$$

A4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$; $-\vec{u} = (-1)\vec{u} = (-x_1, 0)$

$$(x_1, x_2) + (x_1, 0) = (x_1, 0) + (x_1, x_2) = (0,0)$$
$$(x_1, x_2) = (x_1, 0) = (0,0) \quad \text{(F)}$$

M1) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

$a((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = a(x_1, x_2) + a(y_1, y_2)$

$a(x_1, x_2) = (ax_1, 0) + (ay_1, 0)$

$(ax_1, 0) = (ax_1, 0)$ (V)

M2) $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

$(a+b)(x_1, x_2) = a(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)$

$((a+b)x_1, 0) = (ax_1, 0) + (bx_1, 0)$

$((a+b)x_1, 0) = (ax_1, 0)$ (F)

M3) $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u}) = b(a\vec{u})$

$(ab)(x_1, x_2) = a(b(x_1, x_2)) = b(a(x_1, x_2))$

$(abx_1, 0) = a(bx_1, 0) = b(ax_1, 0)$

$(abx_1, 0) = (abx_1, 0) = \underbrace{(ba\,x_1, 0)}_{(abx_1, 0)}$ (V)

M4) $1\vec{u} = \vec{u}$

$1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

$(x_1, 0) = (x_1, x_2)$ (F)

$\mathbb{R}^2$ definido de acordo com estas operações, não é um EV.

Falham os axiomas: A_2, A_3, A_4, M_2, M_4. //