EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II:
Funções de Duas Variáveis

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

Agenda

1. Função de uma variável
2. Função de várias variáveis
3. Domínio de funções de várias variáveis
4. Aplicação de funções de várias variáveis

<u>Referência</u>:

Cap 8: págs 219 a 226 (seções 8.1 a 8.7)

Cap 9: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

Agenda

1. Função de uma variável
2. Função de várias variáveis
3. Domínio de funções de várias variáveis
4. Aplicação de funções de várias variáveis

Referência:

Cap 8: págs 219 a 226 (seções 8.1 a 8.7)

Cap 9: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1. Funções de uma variável

- Uma função de um conjunto A em B é uma regra que associa, a cada objeto de A (domínio), um e somente um objeto de B (contra domínio). Nesse caso, escrevemos:

$$f: A \to B \qquad \text{ou} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y$$

Exemplos:

- Volume de água no reservatório da Cantareira (y), depende de: - volume de chuvas (x);

$$y = f(x)$$

- Produção de determinada fábrica depende de (y): - capital investido (x);

$$y = f(x)$$

- Preço jogo ingresso do Palmeiras (y): - número de jogos ganhos no campeonato (x);

$$y = f(x)$$

Agenda

1. Função de uma variável
2. Função de várias variáveis
3. Domínio de funções de várias variáveis
4. Aplicação de funções de várias variáveis

Referência:

Cap 8: págs 219 a 226 (seções 8.1 a 8.7)

Cap 9: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

2. Funções de várias variáveis

- Em muitas situações, o valor de uma variável depende do valor de duas ou mais outras variáveis.

Exemplos:

- Volume de água no reservatório da Cantareira, depende de: - volume de chuvas;
  - volume consumido pelos habitantes;
  - vegetação no entorno, etc.
- Produção de determinada fábrica depende de: - capital investido;
  - número de funcionários;
  - quantidade de insumos, etc.
- Preço jogo ingresso do Palmeiras: - número de jogos ganhos no campeonato;
  - qual campeonato; classificação no campeonato;
  - cidade em que irá ocorrer o jogo;
  - paixão do torcedor, etc.

2. Funções de várias variáveis *(continuação)*

- Em muitas situações, o valor de uma variável depende do valor de duas ou mais outras variáveis.

Exemplos:

- Volume de água no reservatório da Cantareira (z), depende de: - volume de chuvas (x);

  - volume consumido pelos habitantes (y);

  - vegetação no entorno (w), etc.

$$z = f(x, y, w)$$

- Produção de determinada fábrica depende de (z): - capital investido (x);

  - número de funcionários (y);

  - quantidade de insumos (w), etc.

$$z = f(x, y, w)$$

2. Funções de várias variáveis *(continuação)*

Exemplos:

- Preço jogo ingresso do Palmeiras (z): - número de jogos ganhos no campeonato (x);
  - qual campeonato; classificação no campeonato (y);
  - cidade em que irá ocorrer o jogo (w);
  - paixão do torcedor (k), etc.

$$z = f(x, y, w, k)$$

2. Funções de várias variáveis *(continuação)*

- Esse tipo de situação é representado na matemática por funções de várias variáveis.

- Neste curso vamos nos restringir às funções de duas variáveis:

> Toda função de duas variáveis $\boldsymbol{f(x,y)}$ representa a relação que associa a cada par ordenado $\boldsymbol{(x,y)\ \epsilon\ D_f}$ um e apenas um número real representado por z, de tal forma que $\boldsymbol{z = f(x,y)}$.

- O domínio, $\boldsymbol{D_f}$, de $\boldsymbol{f(x,y)}$ é o conjunto de todos os pares ordenados $\boldsymbol{(x,y)\ \epsilon\ R^2}$, para os quais o valor de $\boldsymbol{f(x,y)}$ pode ser determinado.

- Portanto, pode ser definida como:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{(x,y) \to z}$$

2. Funções de várias variáveis *(continuação)*

- Exemplo: seja a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f(x, y) = x^2 + y^2}$. O $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}^2$ e a imagem de $f(x, y)$ é o conjunto de todos os reais não negativos, $\boldsymbol{Im_f} = \mathbb{R}^+$.

- Para funções de mais de duas variáveis teremos:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, w) = z$$

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, w, k) = z$$

(...)

- Alternativamente, é possível ter funções de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: exemplo: firma que utiliza n insumos para produzir m produtos. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{(x, y, w) \to (z, v)} \qquad \boldsymbol{3\ insumos \to\ 2\ produtos}$$

Agenda

1. Função de uma variável
2. Função de várias variáveis
3. Domínio de funções de várias variáveis
4. Aplicação de funções de várias variáveis

Referência:

Cap 8: págs 219 a 226 (seções 8.1 a 8.7)

Cap 9: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

3. Domínio de funções de duas variáveis

- Exemplo 1: seja a função $f(x, y) = \frac{3x^2+5y}{x - y}$

a) Determine o domínio de f(x,y);

b) Calcule f(1, -2)

Respostas:

a) $D_f \Rightarrow$ $x - y \neq 0$ $\Rightarrow x \neq y$

$D_f = \{(x, y) \in R^2 / x \neq y\}$

b) $f(1, -2) = \frac{3(1)^2+5(-2)}{(1) - (-2)} = \frac{3 - 10}{3} = \frac{-7}{3}$

Teremos, então, a tripla ordenada (x, y, z): **(1, -2, -7/3)**

3. Domínio de funções de duas variáveis *(continuação)*

- Exemplo 2: seja a função $f(x, y) = xe^y + \ln x$

a) Determine o domínio de f(x,y)

Respostas:

a) $\boldsymbol{D_f} \Rightarrow$

$e^y \Rightarrow y \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{R}$;

$\ln x \Rightarrow$ lembrar da definição de função logarítmica: x tem que ser maior que zero

$\boldsymbol{D_f} = \{(x, y) \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{R}^2 / x > 0\}$

(como o y pode ser qualquer valor real, não precisa especificar no domínio)

Agenda

1. Função de uma variável
2. Função de várias variáveis
3. Domínio de funções de várias variáveis
4. Aplicação de funções de várias variáveis

Referência:

Cap 8: págs 219 a 226 (seções 8.1 a 8.7)

Cap 9: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

4. Aplicação de funções de duas variáveis

- **Aplicação 1**: Suponha que a função de produção de uma fábrica seja dada pela função Cobb Douglas:

$$Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

em que K é o capital investido e L é o número de funcionários.

a) Determine a quantidade produzida pela fábrica, sabendo que K = 512.000 e L = 1.000.

$$Q(512.000, 1000) = 60(512000)^{\frac{1}{3}}\ (1000)^{\frac{2}{3}}$$

$Q(512.000, 1000)$ = 60. 80. 100 = **480.000 unidades**

b) Mostre que, duplicando-se o K e o L, a produção calculada em a) também duplicará.

$$Q(2.512.000, 2.1000) = 60(2.512000)^{\frac{1}{3}}\ (2.1000)^{\frac{2}{3}} = \ 60\,(2)^{\frac{1}{3}}(512000)^{\frac{1}{3}}\ (2)^{\frac{2}{3}}(1000)^{\frac{2}{3}}$$

$Q(512.000, 1000)$ = 60. 2. 80. 100 = **960.000 unidades** **=> retornos constantes de escala**

4. Aplicação de funções de duas variáveis *(continuação)*

- **Aplicação 2**: Uma loja de vinhos mantém, em seus estoques, duas qualidades de vinho tinto: um da Califórnia e outro da África do Sul. A demanda de cada qualidade depende não só do preço dos próprios vinhos mas também do preço do vinho concorrente. Os resultados das vendas indicam que se cada garrafa de vinho da California e África forem vendidos, respectivamente por \$x e \$y, a demanda por vinho da California será:

$$D_{California}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{300} - \mathbf{20x} + \mathbf{30y} \quad \text{garrafas por mês}$$

e do vinho da África do Sul será:

$$D_{Asul}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{200} + \mathbf{40x} - \mathbf{10y} \quad \text{garrafas por mês}$$

Qual será a receita mensal total que a loja obterá com a venda desses vinhos?

$$Rec\ Total(\mathrm{x},\mathrm{y}) = D_{Calif} * P_{Calif} + D_{ASul} * P_{ASul}$$

4. Aplicação de funções de duas variáveis *(continuação)*

Qual será a receita mensal total que a loja obterá com a venda desses vinhos?

$$Rec\ Total(x, y) = D_{Calif} * P_{Calif} + D_{ASul} * P_{ASul}$$

$$Rec\ Total(x, y) = (300 - 20x + 30y).x + (200 + 40x - 10y).y$$

$$Rec\ Total(x, y) = 300x - 20x^2 + 30xy + 200y + 40xy - 10y^2$$

$$\boldsymbol{Rec\ Total(x, y) = 300x - 20x^2 + 70\,xy + 200y - 10y^2}$$