Aula 02 - Funções

segunda-feira, 24 de agosto de 2020 17:52

Definição 1.1 Modelo matemático é constituído, em geral, por uma ou mais equações (funções) que descrevem a estrutura do modelo: variável dependente, variáveis independentes ou livres, inter-relações, suposições, parâmetros. Por outras palavras o modelo matemáico é uma representação sintética do fenômeno em estudo.

$f(x) = 5x+3 \qquad f(t) = 4t+2$

Exemplo 1.1 Na Agronomia é comum a condução de experimentos para verificar o efeito de um determinado nutriente ou fertilizante sob a produção de uma espécie. Há vários modelos teóricos disponíveis na Literatura[1], a função do 2^o grau é um desses:

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c \tag{1.1}$$

$a<0$

em que y representa a produção, em kg/ha, de uma determinada variedade; x representa a dose do nutrientre, em kg/ha e a, b e c são os parâmetros que irão particularizar a equação. O modelo 1.1, por ser uma função bem conhecida, apresenta algumas vantagens. Porém, uma desvantagem desse modelo é quando pretendemos utilizá-lo para prever uma produção dado um valor de x por extrapolação. Na função do 2^o grau, com $a < 0$, os valores de y descrescem "rapidamente" após o ponto de máximo, o que não corresponde bem à realidade experimental. Devido a isso, um modelo alternativo foi proposto por Mitscherlich:

$$y = A[1 - 10^{-c(x+b)}], \tag{1.2}$$

em que A, b e c são os parâmetros, representando, A: produção máxima teoricamente possível, b: quantidade do nutriente estudado existente no solo em forma assimilável e c: coeficiente de eficácia.

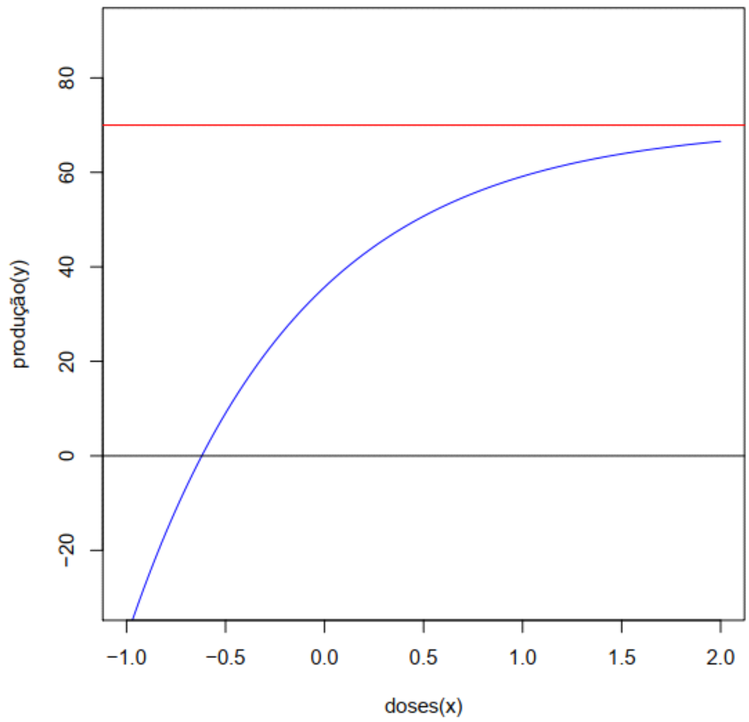


Figura 1.1: Gráfico da função $y = 70[1 - 10^{-0,5(x+0,62)}]$

Exemplo 1.2 Em Economia a quantidade demandada (Qd) e a quantidade ofertada (Qs) de um determinado bem ou serviço podem ser descritas como função do preço P desse produto. Nesse contexto, uma condição clássica é a construção de um modelo de equilíbrio de mercado, constituído de três equações, a terceira, nesse caso, é justamente a condição para que o equilíbrio se estabeleça. Suponha que tanto a demanda quanto a oferta sejam funções do 1^o grau. O modelo pode ser representado pelo conjunto:

$$\begin{cases} Qd = a - bP; & (I) \\ Qs = -c + dP; & (II) \\ Qd = Qs. & (III) \end{cases}$$

em que a, b, c, d são os parâmetros. O problema, nesse caso, consiste em se determinar o valor P_0 que iguala a demanda e a oferta, ou seja, $P_0 = \dfrac{a+c}{b+d}$. Note que $b + d \neq 0$. Geometricamente equivale a encontrar o ponto de encontro entre as duas retas. Logicamente, dependendo das condições de demanda e oferta de mercado as equações (I) e (II) podem assumir outras formas e caracterizações.

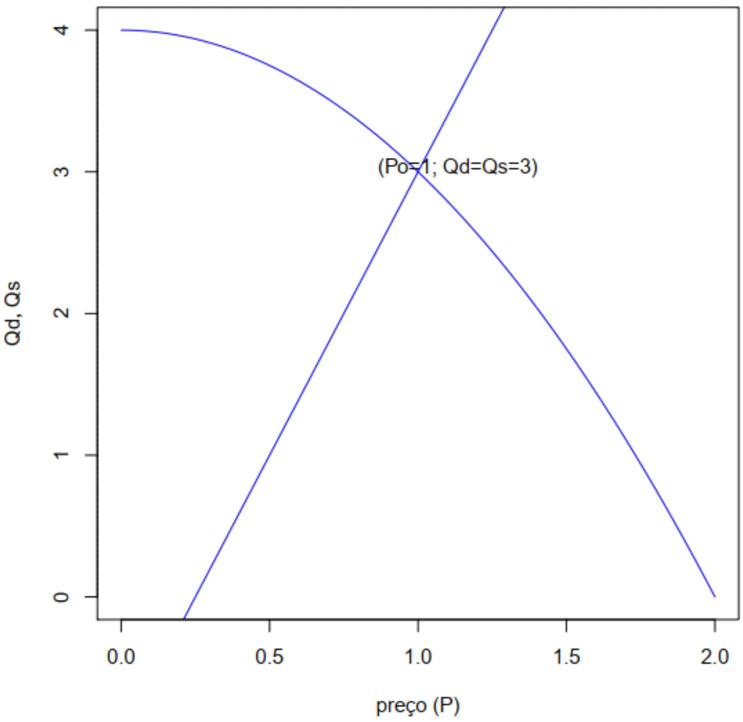
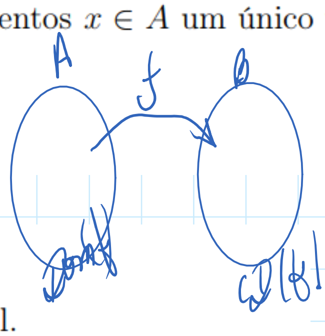


Figura 1.2: Ponto de equilíbrio de mercado em que $Qd = 4 - P^2$ e $Qs = 4P - 1$.

1.1 Funções

Definição 1.2 Função. Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma função definida em A e com valores em B é uma lei que associa a cada elementos $x \in A$ um único valor $y \in B$. Notação:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$



Observações

i) Quando $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ a função é dita real de variável real.

ii) O conjunto A é denominado domínio da função, enquanto que o conjunto B é o contradomínio.

iii) Quando não se especificarem os valores de $x \in A$, subentende-se que é o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 1.3 Conjunto Imagem. Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B, o conjunto imagem da função é definido por $\text{I}(f) = \{y \in B \mid y = f(x)\}$.

Exemplo 1.3 Nas funções a seguir, identificar o domínio:

a. $y = x + 1$

$f(x) = x + 1$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = \text{Im}(f)$

b. $y = \dfrac{3}{x+1}$

$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

c. $y = \sqrt{x - 3}$

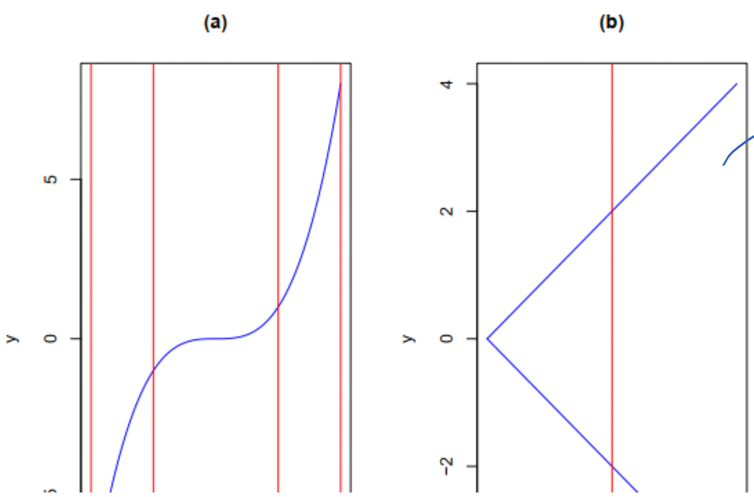
$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

$x - 3 \geqslant 0$

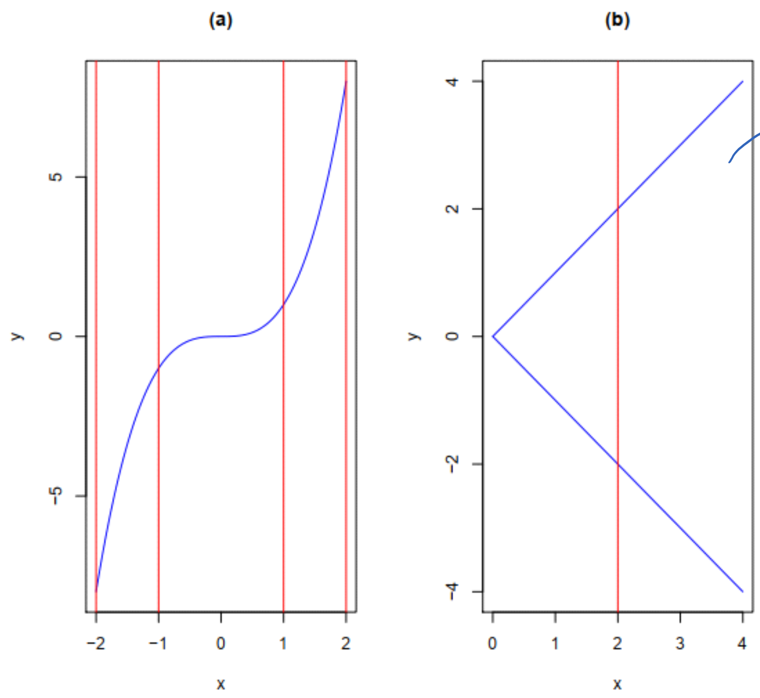
$x \geqslant 3$

Definição 1.4 Gráfico de uma função. Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B, o gráfico da função, $\text{G}(f)$, é constituído de todos os pontos (x, y) tais que:

$$\text{G}(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$



não é uma função



não é uma função

Figura 1.3: Exemplo de gráfico de uma função (a) e de um gráfico de uma relação que não é função (b).

Definição 1.5 Monotonicidade. Seja $y = f(x)$ uma função real e (a, b) um subintervalo do domínio dessa função, se:

a) $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) < f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente crescente em (a, b);

b) $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) > f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente decrescente em (a, b);

Observação: Quando a função é crescente ou descrecente um todo seu domínio diz-se que ela é absolutamente monótona.

Exemplo 1.4 Estude a monotonicidade das funções em $\mathbb{R}$:

a. $y = x + 2$

$\left.\begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\} x_1 < x_2$

$f(x_1) = 1 < f(x_2) = 2$

$f(x)$ é crescente neste intervalo

$\boxed{y=0}$ $\quad x+2=0$

$\boxed{x=-2}$

-2

b. $y = x^2 - 5x + 6$

b. $y = x^2 - 5x + 6$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $\Big\}$ $f(x_1) = 6$, $f(x_2) = 2$

$x_1 < x_2$ $\quad f(x_1) > f(x_2)$ decrescente

$x_1 = 3$, $x_2 = 5$ $\quad f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 6$

$x_1 < x_2$ $\quad f(x_1) < f(x_2)$ crescente

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$$

Definição 1.6 Paridade. Seja a função:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

$f(-x) = f(x)$ par

$f(-x) = -f(x)$ ímpar

Admita que $\forall\ x \in A\ \exists\ -x \in A$. Nessas condições:

a) Se $f(x) = f(-x)$, então $y = f(x)$ é uma função par;

b) Se $-f(x) = f(-x)$, então $y = f(x)$ é uma função ímpar.

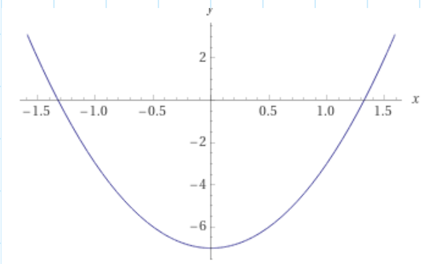
Observação: O gráfico de uma função par tem como eixo de simetria o eixo Oy, já o gráfico das funções ímpares são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

Exemplo 1.5 Estude a paridade das funções a seguir.

$a)\ f(x) = 4x^2 - 7$

$f(-x) = 4(-x)^2 - 7 = 4x^2 - 7 = f(x)$

é par

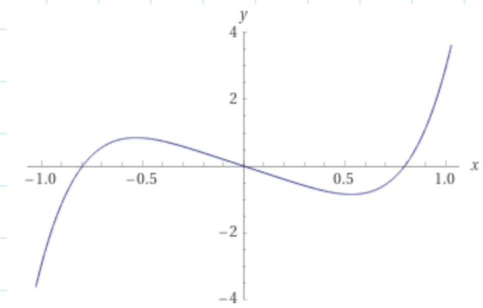


$b)\ f(x) = 5x^5 - 2x$

$f(-x) = 5(-x)^5 - 2(-x)$

$= -5x^5 + 2x = -f(x)$

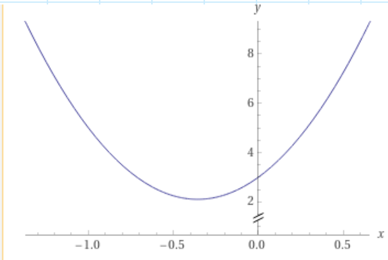
é ímpar



$c)\ f(x) = 7x^2 + 5x + 3$

$$f(-x) = 7(-x)^2 + 5(-x) + 3$$
$$= 7x^2 - 5x + 3 \neq f(x) \neq -f(x)$$

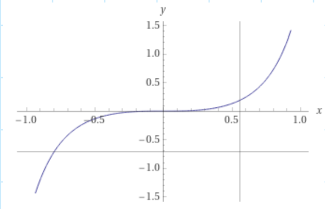
$\therefore$ não tem paridade



$d)\ f(x) = x^3 + x^7$

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^7$$
$$= -x^3 - x^7 = -(x^3 + x^7) = -f(x)$$

$\therefore$ é ímpar



Definição 1.7 Função Composta. Considere três conjuntos não vazios, A, B e C e duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que:

$$g : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \quad \text{e} \quad f : \begin{cases} B \to C \\ g(x) \mapsto f(g(x)) \end{cases}$$

Dessa forma, $f(g(x))$ é denominada função composta de f em g e denota-se $fog(x)$. Note que o domínio de $fog(x)$ é determinado pelos valores reais de x para os quais $g(x)$ exista, tais que $g(x)$ estarão no domínio de f.

Exemplo 1.7 Considere as funções definidas em $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x$. Calcule $f(g(3))$ e $g(f(-1))$. Encontre as leis das funções $fog(x) = f(g(x))$ e $gof(x) = g(f(x))$.

$$g(3) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$f(6) = 6^2 + 1 = 37$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$
$$g(f(-1)) = g(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f(g(x)) = (2x)^2 + 1$$
$$f \circ g(x) = 4x^2 + 1$$

$$g(f(x)) = 2(x^2 + 1)$$
$$g \circ f(x) = 2x^2 + 2$$

Definição 1.8 Classificação das funções. Seja a função:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

Pode-se classificá-la em:

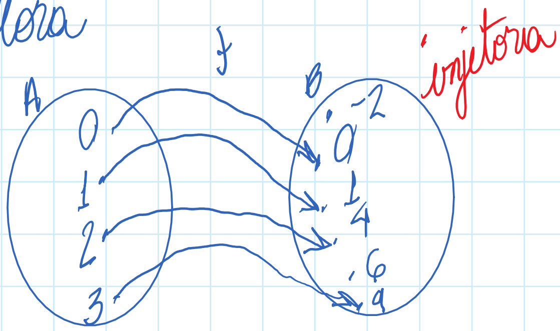
a) **Injetora**: Se $\forall\ x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$ verifica-se $f(x_1) \neq f(x_2)$;

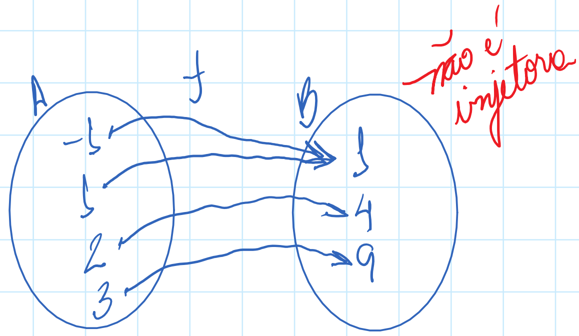
b) **Sobrejetora**: Se $\forall\ y \in B$, existe ao menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$;

c) **Bijetora**: Se $y = f(x)$ for simultaneamente injetora e sobrejetora.

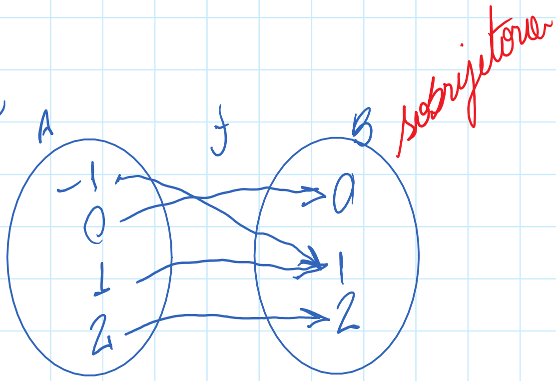
Observação: Na função injetora pontos distintos do domínio têm imagens distintas no contradomínio. Na função sobrejetora o contradomínio coincide com o conjunto imagem.

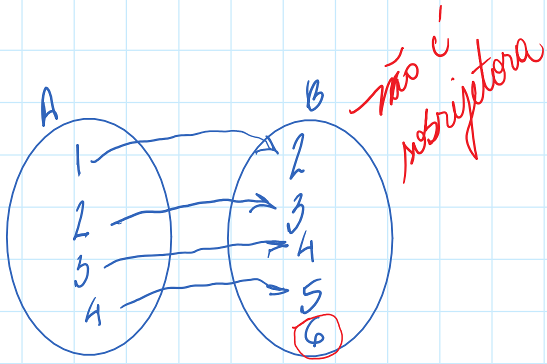
injetora





sobrejetora





Bijetora $\to$ injetora e sobrejetora

Exemplo: *Dados os conjuntos A e B e a função $f: A \to B$, verifique se f é injetora, sobrejetora ou bijetora.*

a) $A = \{1, 2, 3, 5\}$ $\qquad B = \{1, 3, 5, 9\}$ $\qquad f(x) = 2x - 1$

injetora ?

$\therefore$ Bijetora

injetora
sobrejetora } $\therefore$ Bijetora

b) $A = \{0, 1, \sqrt{2}, 2\}$ $\quad B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ $\quad f(x) = x^2 - 1$

$\therefore$ injetora

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

c) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ $\quad B = \{0, 1, 16\}$ $\quad f(x) = x^4$

$\therefore$ sobrejetora

Definição 1.9 Função inversa. Seja, por definição, uma função:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

bijetora. Então, sem perda de generalidade, $y = f(x)$ admite função inversa, tal que:

$$f^{-1} : \begin{cases} B \to A \\ y \mapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

Observação: Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo 1.9 A função inversa de:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$$

é

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto x = y - 1 \end{cases}$$

$f(x) = x + 1$

$y = x + 1$

$x = y + 1$

$\boxed{y^{-1} = x - 1}$

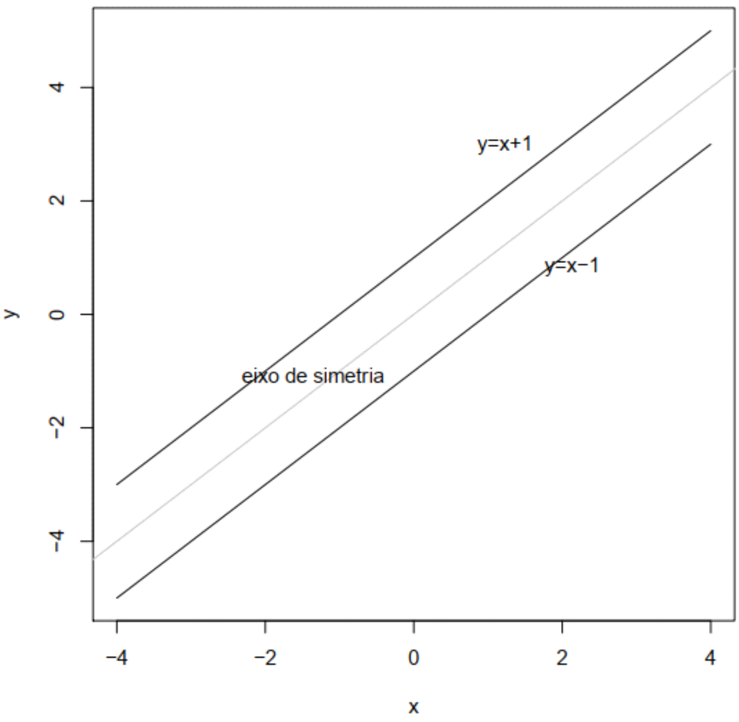


Figura 1.5: Gráficos das funções $f(x) = x + 1$ e de $f^{-1}(x) = x - 1$.

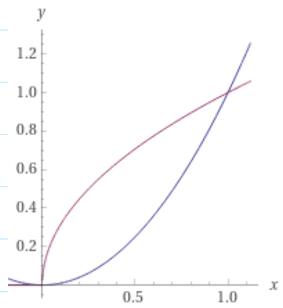
1. Encontre a função inversa de $f(x) = x^2$ $\Rightarrow x \geq 0$

$y = x^2$

$x = y^2$

$\boxed{y^{-1} = \sqrt{x}}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$



1.1.1 Função do 1^0 grau

Definição 1.10 Função do 1^0 grau. A função

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax + b \end{cases}$$

$a > 0$ $\quad$ $a < 0$

com $a, b \in \mathbb{R}$ é uma função do 1^0 grau.

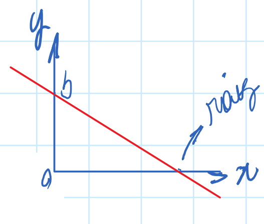
Observações:

raiz: $y = 0$

$ax + b = 0$

$ax = -b$

$x = -\frac{b}{a}$

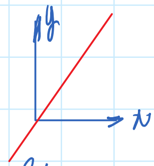


i. A raiz da função é dada por $x = -\dfrac{b}{a}$;

$x = -\frac{b}{a}$

i. A raiz da função é dada por $x = -\dfrac{b}{a}$;

ii. O gráfico da função é uma reta, que tem inclinação determinada por $a = \tan(\alpha)$ (coeficiente angular), isto é a é a tangente do ângulo de inclinação da reta. Essa reta intercepta o eixo Oy no ponto $(0, b)$;

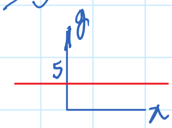


$y = 2x$

iii. Se $b = 0$ tem-se a função linear, $y = ax$, cuja reta passa pela origem do sistema cartesiano;

iv . Se $a = 0$ tem-se a função constante, $y = b$, cuja reta é paralela ao eixo Ox;

$y = 5$



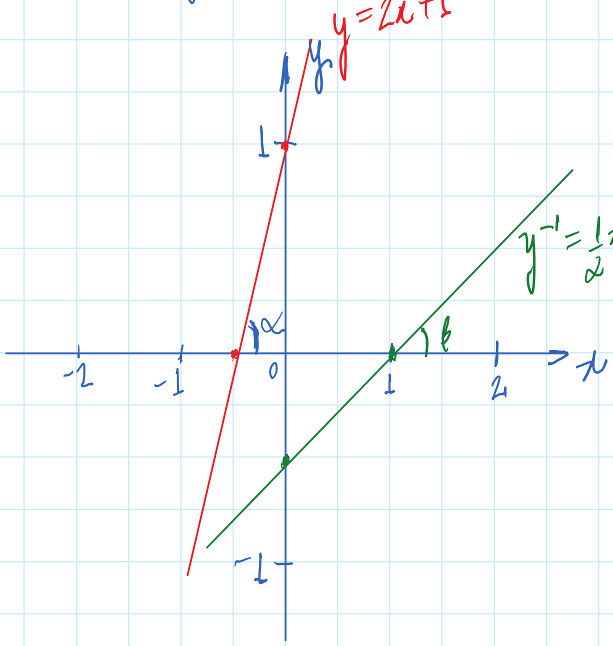
v. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ a função é denominada afim;

vi. Se $a > 0$ a função é absolutamente crescente em $\mathbb{R}$, se, porém $a < 0$ a função é absolutamente decrescente;

vii. Da forma como definida em (1.10) a função é bijetora e, portanto, admite inversa.

Exemplo 1.10 Dada a função $y = 2x + 1$, esboce o gráfico, determine o ângulo de inclinação da reta e encontre sua função inversa.

$D(f) = \mathbb{R}$



intercepto no eixo y $\Rightarrow x = 0$

$y = 1$

intercepto no eixo x $\Rightarrow y = 0$

$2x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

inversa: $x = 2y + 1$

$2y = x - 1$

$y = \frac{x-1}{2}$

$y^{-1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$y = 0$ $\quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$x = \frac{1}{2} \cdot 2$ $\quad x = 1$

Coeficiente angular: $tg\,\alpha = \frac{CO}{CA}$

$tg\,\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$ $\quad \alpha = 63{,}43^{\circ}$

$\beta = 26{,}57^{\circ}$

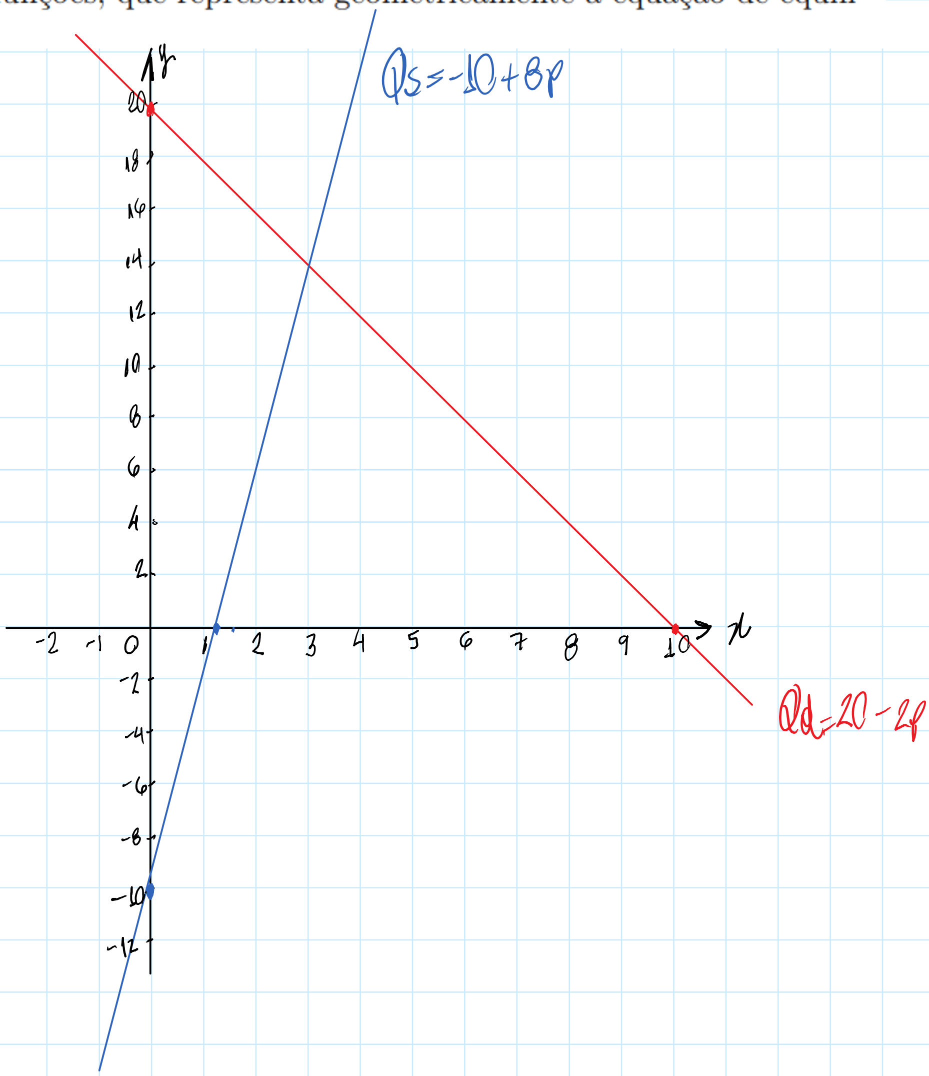
$\tan^{-1}(2) = 63{,}43^{\circ}$

$tg\,\beta = \frac{1}{2}$

Exemplo 1.11 Considere um problema de equilíbrio linear de mercado com uma única mercadoria de preço variável P. Sejam também as funções Qd, que representa a função de demanda e Qs, que representa a oferta dessa mercadoria. Admita:

$$\begin{cases} Qd = 20 - 2P; & (I) \\ Qs = -10 + 8P; & (II) \\ Qd = Qs. & (III) \end{cases}$$

Represente nos mesmos eixos cartesianos as funções de demanda e oferta. Estabeleça o ponto de encontro entre as funções, que representa geometricamente a equação de equilíbrio III.



$\overbrace{Qd}^{y} = 20 - 2p$

$\begin{cases} p = 0 \\ y = 20 \end{cases}$

$20 - 2p = 0$

$2p = 20$

$p = 10$

$\begin{cases} p = 10 \\ y = 0 \end{cases}$

$Qs = -10 + 8p$

$\begin{cases} p = 0 \\ y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} p = 5/4 \\ y = 0 \end{cases}$

$8p - 10 = 0$

$p = \frac{10}{8}$

$p = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$Qd = Qs$

$20 - 2p = -10 + 8p$

$$20 + 10 = 8p + 2p$$

$$10p = 30$$

$$\boxed{p = 3} \Rightarrow$$ ponto de encontro das funções de oferta e demanda