PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Estática –
Sistemas de Forças
(parte 1)

Prof. Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2020

PME3100 Mecânica I

2 – Estática

Como já mencionado, a Mecânica como ciência se propõe a estudar o comportamento de corpos sob a ação de forças. Na Estática, o foco se dá nas situações de equilíbrio, ou seja, quando não há variações no tempo. Em geral, os problemas se referem a determinar esforços numa dada configuração do sistema, ou determinar a configuração num dado conjunto de esforços.

Primeiramente, vamos definir algumas grandezas e conceitos fundamentais.

2.1 – SISTEMAS DE FORÇAS

2.1.1 – Forças e vetores aplicados

O conceito de força é, antes de tudo, intuitivo e experimental. Podemos dizer que é a medida quantitativa das interações entre corpos.

Para definir uma força, necessitamos:

Força	Intensidade Direção Sentido A ordem de aplicação não muda o resultado	Vetor $\vec{F}$	Vetor aplicado $(\vec{F}, P)$ $\vec{F} = \lambda(A - B)$
	Ponto de aplicação P		

Modelo físico: uma força não é aplicada em um ponto, na realidade, mas em uma área ou região (pequena ou não).

2.1.2 – Definição de sistemas de forças

Um sistema de forças é um conjunto de forças que agem num corpo.

2.1.3 – Resultante de um sistema de forças

A <u>resultante $\vec{R}$ de um sistema de forças</u> é o <u>vetor livre</u> definido pela soma de todas as forças do sistema.

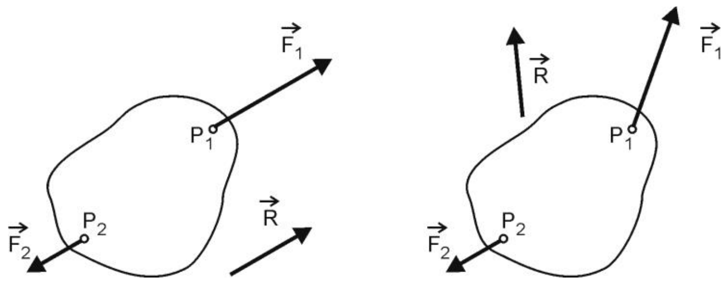


Figura 2.1.3.1 - Resultante

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{2.1}$$

A resultante não é uma força, porque a ela não está associado um ponto de aplicação.

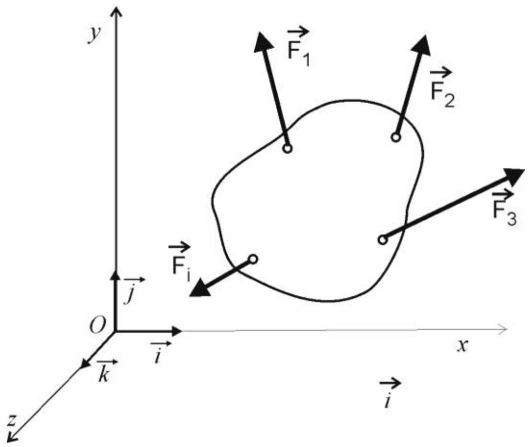
Pode-se trabalhar com suas componentes em um dado sistema de coordenadas, sendo:

$$\vec{F}_i = X_i\vec{\imath} + Y_i\vec{\jmath} + Z_i\vec{k}$$

$$\vec{R} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$$

temos:

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{cases}$$



2.1.4 – Momento

Se considerarmos uma força aplicada num ponto de um corpo e outro ponto qualquer, esta força pode ter a tendência de fazer o corpo girar em torno desse ponto. Podemos dizer que o momento é a medida dessa tendência.

<u>2.1.4.1 – Momento em relação a um ponto (polo)</u>

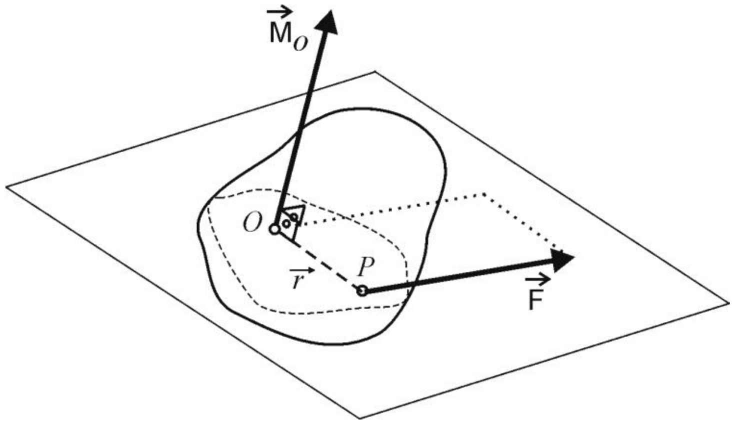


Figura 2.1.4.1 – Momento em relação a um ponto

Na figura, o vetor $\vec{M}_O$ é ortogonal ao vetor $\vec{r} = (P - O)$ e a $\vec{F}$.

<u>Definição:</u> o momento de um sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ em relação ao ponto (polo) O é o vetor:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \tag{2.2}$$

OBS.: O momento de um sistema de forças não é necessariamente ortogonal a nenhuma força nem à resultante.

Teorema de Varignon (forças concorrentes): "O momento de um sistema de forças concorrentes (isto é, de mesmo ponto de aplicação P) em relação a um polo O qualquer, é igual ao momento em relação a O da resultante do sistema, suposta aplicada no ponto de concurso das forças".

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P - O) \wedge \vec{F}_i = (P - O) \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = (P - O) \wedge \vec{R}$$

Fórmula de mudança de polo:

Sendo O e O' dois pontos distintos:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R} \tag{2.3}$$

A demonstração é imediata:

$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O') \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} [(P_i - O) + (O - O')] \wedge \vec{F}_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$

Observações:

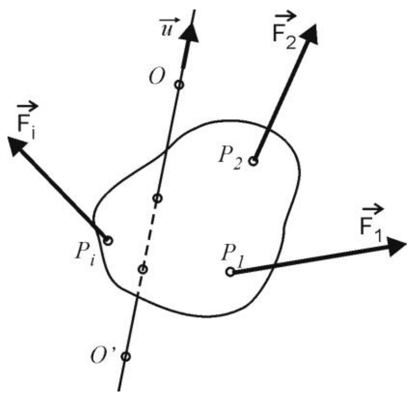
(a) Se $\vec{R} = \vec{0}$, o momento independe do polo.

(b) Se $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$, qualquer que seja O', então $\vec{R} = \vec{0}$.

(c) Se $\vec{R} \neq \vec{0}$, então $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$ se e somente se $(O - O') \parallel \vec{R}$.

(d) $\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$, ou seja, a projeção do momento de um sistema na direção da resultante é invariante para mudança de polo.

2.1.4.2 – Momento em relação a um eixo



eixo: reta orientada $O\vec{u}$, onde $\vec{u}$ é um versor ($|\vec{u}| = 1$)

Figura 2.1.4.2 – Momento em relação a um eixo

Definição: o momento de um sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ em relação ao eixo $O\vec{u}$ é o número real:

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \tag{2.4}$$

Sendo O' outro ponto qualquer do eixo, usando a fórmula de mudança de polo:

$$M'_u = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = \left[\vec{M}_O + \underbrace{\underbrace{(O - O')}_{\parallel \vec{u}} \wedge \vec{R}}_{\perp \vec{u}} \right] \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

Assim, o momento M_u é invariante em relação a pontos do eixo.

Propriedade: O momento do sistema de forças é a soma dos momentos de cada força em relação ao eixo $O\vec{u}$:

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = \left[\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \right] \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \left[(P_i - O) \wedge \vec{F}_i \cdot \vec{u} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{M}_{Oi} \cdot \vec{u} \right] = \sum_{i=1}^{n} M_{ui}$$

2.1.4.3 – Componentes de $\vec{M}_O$

Dados:

- uma força $(\vec{F}, P)$;
- um polo *O*;
- um sistema de eixos *Oxyz* de versores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Seja:

$$\vec{F} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$$
$$P - O = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$
$$\vec{M}_O = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k}$$

Temos:

(a) $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_x = yZ - zY \\ M_y = zX - xZ \\ M_z = xY - Xy \end{cases}$

Para um sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$:

$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i - z_i Y_i$

.

.

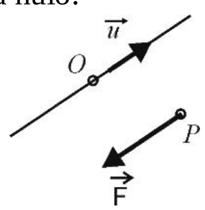
etc.

(b) M_x, M_y e M_z são os momentos da força em relação aos eixos *Ox*, *Oy* e *Oz*, respectivamente.

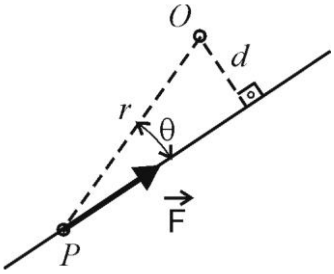
Observações:

A) Se uma força for paralela a um eixo, seu momento em relação a este será nulo:

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{M}_O \cdot \vec{u} = 0$$



B) O módulo do momento de uma força em relação a um ponto é o produto do módulo da força pela distância da linha de ação da força ao ponto ("braço da força"):



$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\vec{M}_O\right| = |P - O| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot |\sin\theta| =$$
$$= \left|\vec{F}\right| \cdot \underbrace{|r \sin\theta|}_{d} = \left|\vec{F}\right| \cdot d$$