Modelagens em biotecnologia (Aplicações matemáticas)

Cálculo II – Aula 3

Profa. Dra. Patricia Targon Campana

Grupo de Biomateriais e Espectroscopia

pcampana@usp.br

Sala 339C – Titanic

ramal: 3091-8883

tumblr. sciencenebula.tumblr.com

facebook /Campana.PT

twitter @profaPCampana

“uma situação do mundo real que pode ser atacada por meio da matemática é chamada uma aplicação matemática” (Machado 2016).

Às vezes não conhecemos uma função, mas temos informações sobre sua taxa de mudança, ou seja, sua derivada. Vamos aprender como, a partir disso, escrever um novo tipo de equação: a Equação Diferencial (E.D.) e a partir dela, obter informações sobre a função original.

Por exemplo, podemos usar o que sabemos sobre a derivada de uma função populacional (sua taxa de mudança) para prever a população no futuro.

Começaremos com uma descrição verbal do problema para então escrevermos uma equação diferencial.

Exemplo 1: Pesca

Começamos investigando o efeito da pesca em uma população de peixes. Suponha que não haja pesca. Se assim for, a população de peixes aumenta a uma taxa contínua de 20% ao ano. Agora, vamos supor que os que peixes também estão sendo pescados a uma taxa constante de 10 milhões de peixes/ano.
Nossa pergunta é:
Como é que a população de peixes mudará com o tempo?

Taxa de variação da população de peixes	=	Taxa de aumento devido à taxa de reprodução	–	taxa de peixes removidos devido à pesca

Suponha que a população de peixes, em milhões, seja P e sua derivada seja dP/dt, onde t é o tempo em anos. Se deixada sozinha, a população de peixes aumenta a uma taxa contínua de 20% ao ano, então temos:

Taxa de aumento devido à reprodução = 20% População atual = 0,20 P milhões peixes/ano.

Taxa de peixes removidos devido à captura =10 milhões peixes/ano.

taxa de variação da população de peixes

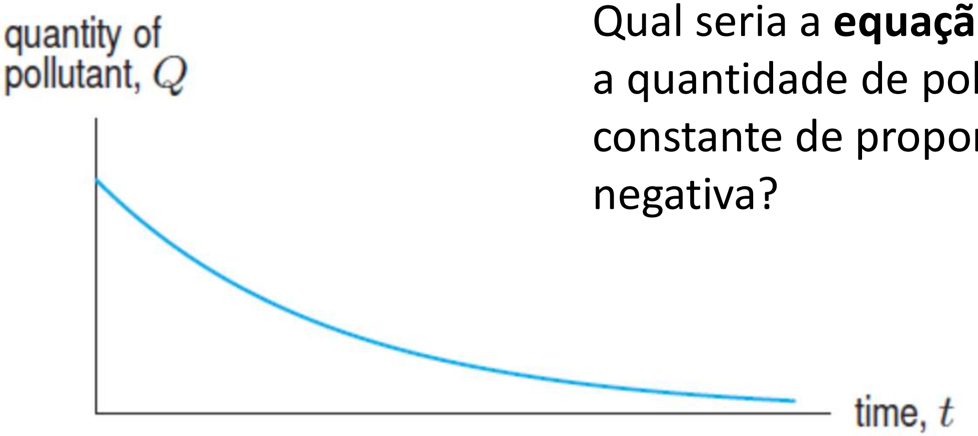
$$\frac{dP}{dt} = 0.20P - 10$$

Esta é uma equação diferencial que modela como a população de peixes muda com o tempo e a pesca.

Exemplo 2: Poluição em um Lago

Neste exemplo vamos supor que a água limpa flui para um lago poluído, e existe um córrego de escoamento, de forma que se nenhum novo poluente é adicionado, o nível de poluição no lago diminuirá com o tempo.

A quantidade de poluente no lago diminui a uma taxa proporcional à quantidade de poluentes nele presente, de acordo com gráfico:



Qual seria a **equação diferencial para modelar** a quantidade de poluente no lago? A constante de proporcionalidade é positiva ou negativa?

Vamos usar a equação diferencial para explicar por que o gráfico é decrescente e côncavo, como na figura.

Seja Q a quantidade de poluente presente no lago no tempo t. A taxa de mudança de Q é proporcional a Q, então dQ / dt é proporcional a Q.

Assim, a equação diferencial é

$$\frac{dQ}{dt} = kQ.$$

Nenhum novo poluente sendo adicionado = quantidade Q diminui ao longo do tempo = dQ/dt é negativo e constante de proporcionalidade k é negativa.

k é negativo e Q é positivo = kQ é negativo. Assim, dQ/dt é negativo, portanto, o gráfico de Q em relação a t está diminuindo.

Q está diminuindo à medida que t aumenta e k é fixo = kQ e a derivada dQ/dt diminuem. Assim, o gráfico de Q fica mais horizontal com o aumento do tempo = concavidade para cima.

Exemplo 3: Evolução da quantidade de uma droga no corpo

Um paciente submetido a uma cirurgia recebe o antibiótico vancomicina por via intravenosa a uma taxa de 85 mg por hora. A taxa em que a droga é excretada do corpo é proporcional à quantidade inicialmente presente, com proporcionalidade constante 0,1 se o tempo estiver em horas.

Qual seria a equação diferencial que descreve a variação na quantidade, Q em mg, de vancomicina no corpo com o passar do tempo?

A quantidade de vancomicina, Q, está aumentando a uma taxa constante de 85 mg/hora e está diminuindo a uma taxa de 0,1 vezes Q. A administração de 85 mg/hora faz uma contribuição positiva para a taxa de mudança dQ/dt. A excreção a uma taxa de 0,1Q contribui negativamente para dQ/dt.

Assim:

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{85}_{\text{Taxa de entrada}} - \underbrace{0.1Q}_{\text{Taxa de saída}}$$

O que acontece com a taxa de mudança de Q se a quantidade ministrada for Q = 100 mg

$$\frac{dQ}{dt} = 85 - 0.1(100) = 75 \text{ mg/hour}$$

Quando Q = 100 mg, a taxa de mudança de Q é positiva, ou seja, Q vai aumentar.

Referências

- Machado, Ivana Maria Fernandes. Matemática aplicada: o uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos. / Ivana Maria Fernandes Machado. Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Química, Instituto Federal de Goiás, Campus Anápolis, 2016. Orientador: Prof. Me. Thársis Silva Souza. Anápolis: IFG, 2016.
- Hughes-Hallett, Deborah. 2014 Applied calculus