Series: (segunda semana)

Considere uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, a expressão

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

é chamada uma <u>série infinita</u> ou <u>serie</u>.

<u>Notação</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ou $\sum a_n$.

<u>Exemplo</u>: (1) Considere a sequência $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. Então a série associada é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

Podemos observar que essa serie tem uma soma finita: Pois a soma dos n-primeiros números naturais satisfaz que:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{relação conhecida.}}$$

Então é imediato que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

<u>Exemplo</u> (2): seja $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência. A serie associada é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Queremos saber se a serie tem uma soma finita. Para isso fazemos o seguinte: Construimos a sequência $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais, isto é:

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots\dots S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \dots\dots$$

Se podermos obter uma expressão compacta para essa sequência, poderemos determinar o limite. Mas achar tal expressão não sempre é possivel.

Mas neste exemplo, é possível [illegible]

$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$ e,

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ logo

$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow S_n = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$

Portanto $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

Portanto a soma dos termos da série dá 1.

<u>Definição de Convergência de série</u>:

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e denotemos por "S_n" o termo n-ésimo de uma seqüência $\{S_n\}$ definida por $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

(chamada de somas parciais)

1) Se $\{S_n\}$ é convergente e $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$, então dizemos que a série $\sum a_n$ é <u>convergente</u> e que:

$\lim_{n \to \infty} S_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$ "S" é chamado a <u>soma da série</u>".

2) Se $\lim_{n \to \infty} S_n$ não-existe, então a série $\sum a_n$ é chamada <u>divergente</u>.

<u>Exemplo 3</u>: <u>Série geométrica</u>:

Seja $a \neq 0$ real, e considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$, onde r é chamada a <u>razão da série</u>. TAL série é chamada de série <u>geométrica de razão r</u>.

Observe que $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{se } |r|<1 \\ \text{diverge quando } |r| \geq 1. \end{cases}$

Para provar isso, construímos 1º as somas parciais:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$. Logo

$S_n - rS_n = a - ar^n \Longrightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ se $r \neq 1$.

2º passo, analize $\lim_{n\to\infty} S_n$?

Como $r \neq 1$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(1-\lim_{n\to\infty} r^n)}{1-r} =$

$= \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{se } |r|<1 \\ +\infty, & \text{se } r>1 \\ \text{não existe} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$

do limite básico da 1º aula.

3º passo se $r=1$: temos que $S_n = an$, logo $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} an =$

$= \begin{cases} \infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0. \end{cases}$

Portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ converge se $|r|<1$ e diverge se $|r| \geq 1$

No caso da convergência temos que a série converge para $\frac{a}{1-r}$.

Exemplo 4: Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ converge ou diverge.

Observe que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^2} \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Logo ela é uma série geométrica, com razão $r = \frac{2}{3}$, e, $a = \frac{2}{9}$.

Como $r = \frac{2}{3} < 1 \Longrightarrow$ a série converge e sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo ⑤: A série harmônica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Vamos determinar se a série converge ou diverge:

1º passo: Sabemos que se $\lim_{n\to\infty} S_n = a$, a finito $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = a$.

pois a subsequência $\{S_{2^n}\}$ é da sequência convergente $\{S_n\}$.

Vamos mostrar que $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$, (i.e, ela é limitada superiormente).

Observe que $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$,

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$.

$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$.

Por indução matemática, segue-se que $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

logo $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} \geq \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty \Rightarrow$ a série diverge e, diverge para ∞, isto é: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Teorema: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prova: Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$. Como

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observação: A volta do teorema anterior é falsa: isto é: temos que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente.

Por exemplo, isso pode ser observado usando a série harmonica:

pois $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Corolário: (teste da divergência) (ou do termo geral):

se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não-existe ou $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplo 6:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não-existe.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctag}(n)$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctag}(n) = \frac{\pi}{2} \neq 0$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$.

observação: se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode convergir ou divergir.

pois: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é converge (série geométrica com $r = \frac{1}{2} < 1$) e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

mas: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ diverge a ∞, mas $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Propriedades das séries Convergentes:

teorema: se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes, com $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, então:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA$, onde c é uma constante.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$.

Teorema: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

Prova: Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ fosse convergente. Mas observo que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n + a_n) - a_n]$. Logo como $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ são convergentes $\Rightarrow$ pelas propriedades da séries que a subtração das convergente, mas a substração delas é exatamente a série $\sum b_n$, a qual por hipotese é divergente. Portanto temos uma contradição.

Exemplo 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n \right)$ diverge.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$ diverge.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{8^n} \right)$ converge, e converge para o valor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^{n-1}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \right) + \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{1-\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{\left(\frac{7}{8}\right)} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}.$$

Observe que: Se $\sum_1 a_n$ e $\sum_1 b_n$ são divergentes $\Rightarrow$ a série soma ou substração pode ser convergente ou divergente,

Pois se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1} n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)$ então:

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ converge à 0. e,

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n + 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n = 3\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge a ∞.

Critérios para convergência de série com termos positivos:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é série de termos positivos se $\forall n$, $a_n \geq 0$.

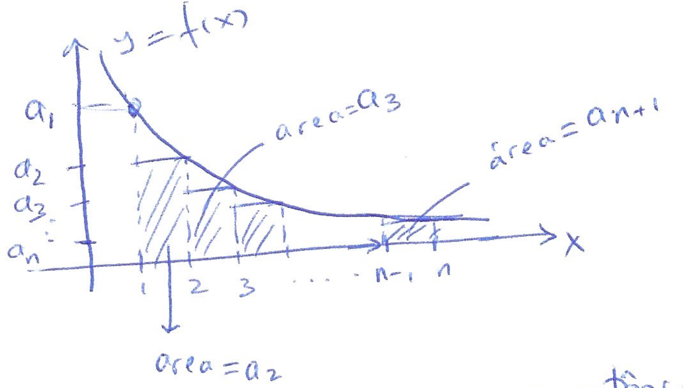
O teste da integral: Seja $f: [1,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ contínua e decrescente. Defina $a_n = f(n)$.

1) se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ é convergente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2) se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ é divergente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Prova: A prova segue-se facilmente dos dois seguintes passos:

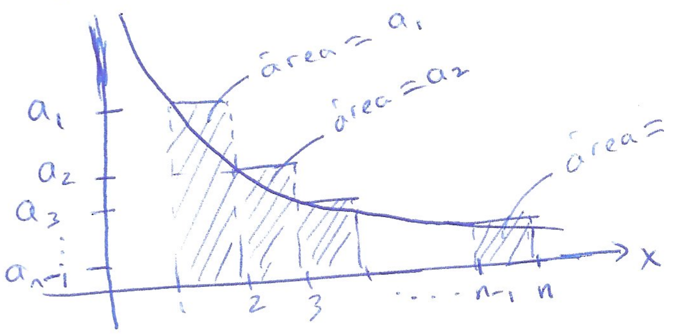
1^{o})



Logo temos:

$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx.$

Analogamente se pegamos os retângulos acima da curva:



Logo temos:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx.$

2^{o}) a) se $\int_1^{\infty} f(x)dx = M \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + M$. Logo $\forall n$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada superiormente. Além disso, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ é crescente pois: $S_n \leq S_{n+1}$, $\forall n$. Logo pelo teorema da seqüência monotônica $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\int_1^\infty f(x)dx$ é divergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \infty$ pois $f(x) \geq 0$. Logo como $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \int_1^n f(x)\,dx$

desenho (2).

então temos que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

Exemplo (10): Determinar os valores de $p \in \mathbb{R} / \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ converge ou diverge.

Solução: 1)- se $p < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \Rightarrow$ pelo critério de divergência segue-se que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ diverge se $p<0$.

se $p=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^\infty 1$, a qual diverge pois pelo critério da divergencia, como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ a serie diverge.

- se $p = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ a qual diverge. (serie harmônica)

- se $1 \neq p > 0$. Então $f: [1,\infty) \to (0,\infty)$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é continua e decrescente. Logo podemos aplicar o critério da integral:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty x^{-p}dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\Big|_1^\infty =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \text{finito se } 1-p<0 \\ \text{infinito se } 1-p>0. \end{cases}$$

Conclusão: Pelo critério da integral temos em definitiva que:

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p>1$, e, é divergente se $p \leq 1$.

e

é divergente se $p \leq 1$.

$\downarrow$

ela é chamada uma p-serie.

Exemplo (11) A série $\sum_{n=1}$ [illegible] pelo critério da integral temos que: sendo $f: [1, \infty) \to (0, \infty)$

$f(x) = x e^{-x}$ que é positiva e decrescente pois:

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x) \leq 0$ pois $x \geq 1$, portanto f é decrescente. Agora calculamos a integral imprópria:

$$\int_1^{\infty} x e^{-x}\, dx \underset{\downarrow}{=} -xe^{-x}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_1^{\infty} =$$

$u = x \quad dv = e^{-x}$

$du = dx \quad v = -e^{-x}$

$$= -e^{-x}(x+1)\Big|_1^{\infty} = -\left[0 - \frac{2}{e}\right] = \frac{2}{e}.$$ Logo a série converge.

Observação: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\, dx$, onde $a_n = f(n)$.

Mostraremos mais na frente que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mas

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \neq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Os testes de comparação: A ideia é determinar a convergência ou divergência de uma série comparando-a com outra série que o seja. Neste caso é importante um bom conhecimento de séries básicas.

Exemplo (12): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$. Para o termo n-ésimo da série sabemos que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n$. Logo têm sentido "tomar séries na desigualdade", e obtemos que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente então concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ é também convergente.

Teorema do teste de Comparação: Suponha $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

1- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente e $a_n \leq b_n$ $\forall n$, ou para $n \geq n_0$,

então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente e $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ou para $n \geq n_0$,

então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Prova: Provaremos o item 2: Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$

onde $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Além disso $\{t_n\}$ é crescente pois estamos somando números positivos.

Como $a_n \geq b_n \Rightarrow S_n \geq t_n$, onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, portanto

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplos (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ converge pois: $\frac{1}{n^2+n+1} \geq 0$ $\forall n$.

isto é a série é uma série de números positivos. Além disso,

$\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente pois

é uma p-série com $p = 2 > 1$, então segue-se do teorema de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ converge.

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ converge, pois ela é uma série de termos positivos.

Além disso, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente $(p = \frac{3}{2} > 1)$

$\Rightarrow$ segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ converge.

Exemplo (15): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge pois $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$, $n \geq 3$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ pelo critério de comparação segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Teorema de comparação do limite: Sejam $a_n > 0$, $b_n > 0$.

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ onde $c > 0 \Rightarrow$ ambas as séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergem ou ambas as séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ divergem.

Nota: 1) Se $c = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2) Se $c = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Contraexemplos: Se $c = 0$: Seja $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = 1$. Logo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, i.e, $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverge.

Prova do teorema: Como $c > 0$, sejam m, M com $0 < m < c < M$. Por definição de limite, $m < \frac{a_n}{b_n} < M$ para $n > N \Rightarrow$ $m b_n < a_n < M b_n$, $\forall n > N$. Logo pelo critério de comparação, segue-se o afirmado.

Exemplo (16): A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ converge.

pois considerando $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$, i.e, $b_n = \frac{1}{2^n}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 > 0,$$

logo pelo teorema de comparação do limite, segue-se que como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

Exemplo 17: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

pois escolhendo $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, e, $b_n = \frac{1}{n}$ temos que

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 > 0$, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge,

segue-se do teorema de comparação do limite que a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Exemplo 18: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Considere $a_n = \frac{1}{n2^n}$ e $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Logo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n2^n}\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Como a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge $\Longrightarrow$ segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ converge.

Exemplo 19: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$ é convergente. pois escolhendo

$a_n = \frac{n-1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ temos que:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 > 0$, logo

pelo critério de comparação do limite, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge,

segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$ diverge.