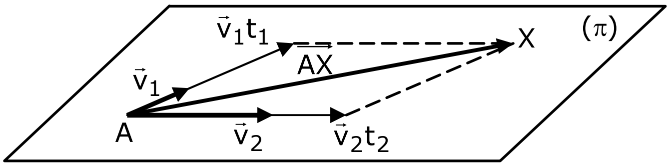
CAPÍTULO 6

PLANO

Definição: Seja A um ponto qualquer do plano (π) e $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dois vetores LI (ou seja, não paralelos), mas ambos paralelos ao plano (π). Seja X um ponto qualquer deste. Assim, os vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AX}\}$ são LD (coplanares). Logo existem escalares t_1 e $t_2 \in \Re$ tais que $\overrightarrow{AX} = \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2$.



Da expressão $\overrightarrow{AX} = \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2$ podemos escrever que $X - A = \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2$. Então a equação $X = A + \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2$, é chamada de ***equação vetorial*** do plano (π) para $\forall t_1$ e $t_2 \in \Re$, chamados de parâmetros.

O plano é constituído de pontos. Assim, para cada valor real de t_1 e t_2 substituídos na equação vetorial vamos obtendo os infinitos pontos X desde plano. Por exemplo. Considere o plano $(\pi): X = (2,1,2) + t_1(1,1,0) + t_2(-1,3,1)$, então:

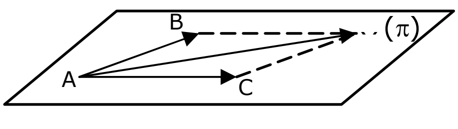
para $t_1 = 0$ e $t_2 = 0 \Rightarrow X = (2,1,2) + 0 \cdot (1,1,0) + 0 \cdot (-1,3,1) \Rightarrow X_1 = (2,1,2) \in (\pi)$;

para $t_1 = 1$ e $t_2 = -1 \Rightarrow X = (2,1,2) + 1 \cdot (1,1,0) + (-1) \cdot (-1,3,1) \Rightarrow X_2 = (4,-1,1) \in (\pi)$;

para $t_1 = -1$ e $t_2 = 2 \Rightarrow X = (2,1,2) + (-1) \cdot (1,1,0) + 2 \cdot (-1,3,1) \Rightarrow X_3 = (-1,6,4) \in (\pi)$;

Assim por diante.

Um axioma importante da geometria é aquele que diz "três pontos não colineares determinam um único plano". Assim, é possível escrever a equação vetorial de um plano dados três pontos não alinhados (não colineares) deste plano. Note que, pela definição anterior, para determinarmos um plano é necessário conhecermos um ponto e dois vetores LI (não paralelos) deste plano.



Portanto, dados três pontos não colineares A, B e C de um plano (π) podemos escrever $(\pi): X = A + \overrightarrow{AB}\cdot t_1 + \overrightarrow{AC}\cdot t_2$. A escolha do ponto e da orientação dos vetores não altera a determinação do plano, ou seja, poderíamos ter escolhido o ponto C e os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ para determinarmos o mesmo plano (π) da seguinte forma $(\pi): X = C + \overrightarrow{BC}\cdot t_1 + \overrightarrow{CA}\cdot t_2$.

6.1 Equações do Plano

Equações Paramétricas

Seja $X(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano (π). Sejam também e conhecidos o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vetores LI deste plano. Da equação vetorial $X = A + \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2$, $\forall t_1, t_2 \in \Re$, substituindo as coordenadas de cada elemento teremos:

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + (x_1, y_1, z_1)\cdot t_1 + (x_2, y_2, z_2)\cdot t_2 \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x_o + x_1 t_1 + x_2 t_2 \\ y = y_o + y_1 t_1 + y_2 t_2 \\ z = z_o + z_1 t_1 + z_2 t_2 \end{cases},$$

chamadas de ***equações paramétricas*** do plano, onde os parâmetros são os escalares t_1 e $t_2 \in \Re$.

Equação Geral

Como os vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AX}\}$ são coplanares, então, pela condição de coplanaridade temos: $[\overrightarrow{AX}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$. O desenvolvimento deste determinante resultará numa expressão da forma $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$ chamada de ***equação geral*** do plano.

Equação Segmentária

Da equação geral do plano (π) podemos escrever: $ax + by + cz = -d$. Se $d \neq 0$, vem: $\dfrac{a}{-d}x + \dfrac{b}{-d}y + \dfrac{c}{-d} = \dfrac{-d}{-d}$. Se $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{-\frac{d}{a}} + \dfrac{y}{-\frac{d}{b}} + \dfrac{z}{-\frac{d}{c}} = 1$.

Fazendo $p = -\dfrac{d}{a}, q = -\dfrac{d}{b}$ e $r = -\dfrac{d}{c}$, temos a ***equação segmentária*** do plano: $\mathbf{\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} + \dfrac{z}{r} = 1}$.

Os pontos $P(p,0,0)$, $Q(0,q,0)$ e $R(0,0,r)$ são as interseções do plano (π) com os eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respectivamente. O plano (π) ao "passar" pelo $\Re^3$ deixa "traços". Esses traços são as retas, interseção com os planos coordenados xy, xz e yz. Os traços do plano (π) são as retas: $(r_{PQ}): X = P + \overrightarrow{PQ} \cdot t$; $(r_{PR}): X = P + \overrightarrow{PR} \cdot t$ e $(r_{QR}): X = Q + \overrightarrow{QR} \cdot t$.

A equação segmentária nos ajuda a visualizar um esboço do plano (π) no $\Re^3$. A Figura (1) representa um esboço do plano (π) um pouco mais elaborado, no entanto, poderíamos esboçar o plano (π) como na Figura (2), a qual exibe somente o octante determinado pelos valores p, q e r. Assim, o "triângulo" PQR representa somente a parte do plano (π) que é visível quando observado do octante determinado pelos valores p, q e r.

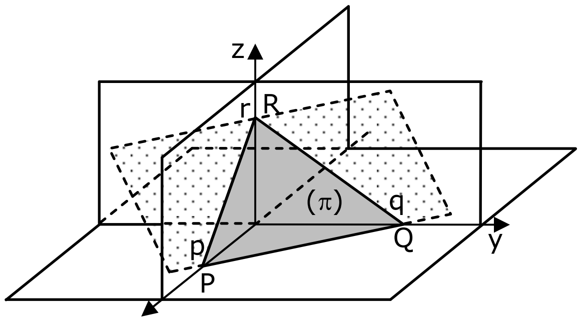


Figura (1)

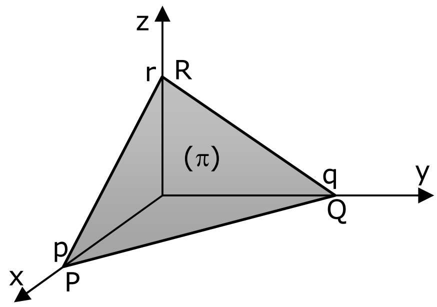
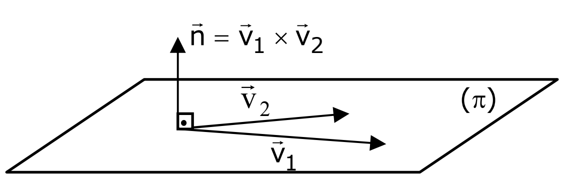


Figura (2)

6.2 Vetor Normal ao Plano

Seja um plano $(\pi): X = A + \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2$. O vetor $\vec{n}$ normal (ortogonal) ao plano (π) é ortogonal a qualquer vetor do plano, em particular aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ da equação vetorial. Do produto vetorial entre dois vetores, tem-se que $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é um vetor normal ao plano. Demonstrar-se que as coordenadas do vetor normal são iguais aos coeficientes a,b e c da equação geral do plano, ou seja, se $(\pi): ax + by + cz + d = 0$ então $\vec{n} = (a,b,c)$.



Exemplo (1): Dado um plano (π) que contém os pontos $A\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$, $B(0,2,1)$ e $C(0,1,2)$, determine para o plano (π):

a) A equação Vetorial
b) Equações Paramétricas
c) Equação Geral
d) Equação Segmentária

e) O vetor normal f) Os traços

Solução:

a) Tomando o ponto $B(0,2,1)$ e os vetores $\overrightarrow{BA} = \left(-2,-\frac{3}{2},0\right)$ e $\overrightarrow{CB} = (0,1,-1)$, a equação vetorial é: $(\pi): X = B + \overrightarrow{BA} \cdot t_1 + \overrightarrow{CB} \cdot t_2 \Rightarrow$ $X = (0,2,1) + \left(-2,-\frac{3}{2},0\right)t_1 + (0,1,-1)t_2$.

b) Equações Paramétricas: $(\pi): \begin{cases} x = -2t_1 \\ y = 2 - \frac{3}{2}t_1 + t_2 \\ z = 1 - t_2 \end{cases}$, $\forall t_1, t_2 \in \Re$.

c) Fazendo $X(x,y,z)$ e tomando ponto $B(0,2,1)$, temos que os vetores $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são coplanares, Logo: $[\overrightarrow{BX},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}] = \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 4y - 4z + 12 = 0$ que é a equação geral do plano.

d) Da equação geral temos: $3x - 4y - 4z + 12 = 0 \Rightarrow 3x - 4y - 4z = -12 \Rightarrow$ $\frac{3}{-12}x - \frac{4}{-12}y - \frac{4}{-12}z = \frac{-12}{-12} \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ que a equação segmentária.

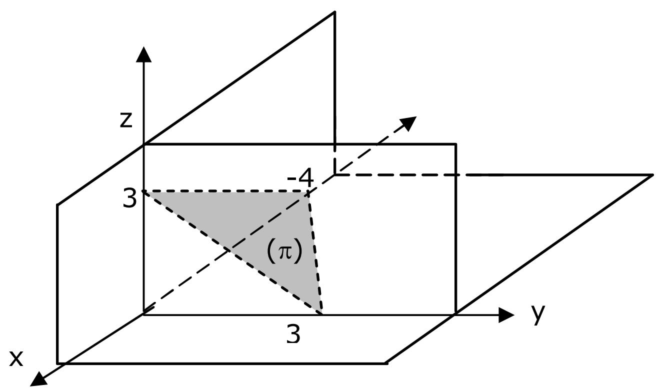
e) Da equação geral $3x - 4y - 4z = -12$ vem que $\vec{n} = (3,-4,-4)$ é o vetor normal ao plano.

f) Da equação segmentária $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ temos que: $\begin{cases} p = -4 \\ q = 3 \\ r = 3 \end{cases}$. Então: $P(p,0,0) = (-4,0,0)$, $Q(0,q,0) = (0,3,0)$ e $R(0,0,r) = (0,0,3)$. Portanto, os traços sobre os planos coordenados são as reta:

$(r_{PQ}): X = P + \overrightarrow{PQ} \cdot t \Rightarrow X = (-4,0,0) + (4,3,0) \cdot t$

$(r_{PR}): X = P + \overrightarrow{PR} \cdot t \Rightarrow X = (-4,0,0) + (4,0,3) \cdot t$

$(r_{QR}): X = Q + \overrightarrow{QR} \cdot t \Rightarrow X = (0,3,0) + (0,-3,3) \cdot t$



6.3 Casos particulares de planos

1) Plano passando pelo origem: Se o plano passa pela origem, então O(0,0,0) pertence ao plano. Na equação geral do plano temos $0x + 0y + 0z + d = 0 \Rightarrow d = 0$. Todo plano passando pela origem o termo independente é zero, logo sua equação é do tipo: **ax+by+cz=0**.

2) Plano paralelo a um dos eixos coordenados: Quando na equação geral do plano o coeficiente de uma das variáveis for nulo, o plano é paralelo a eixo coordenado correspondente a esta variável. Assim:

a) $ax+by+0z+d=0$ ou $ax+by+d=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow$ plano paralelo ao eixo Oz

b) $ax+0y+cz+d=0$ ou $ax+cz+d=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow$ plano paralelo ao eixo Oy

c) $0x+by+cz+d=0$ ou $by+cz+d=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ plano paralelo ao eixo Ox

3) Plano que passa por um dos eixos coordenados: Quando na equação geral do plano o coeficiente de uma das varáveis e o termo independente forem nulos (d=0), representa que ele passa (contém) pelo eixo coordenado correspondente a esta variável. Assim:

a) $ax+by=0 \Rightarrow c=d=0 \Rightarrow$ plano passa pelo eixo Oz

b) $ax+cz=0 \Rightarrow b=d=0 \Rightarrow$ plano passa pelo eixo Oy

c) $by+cz=0 \Rightarrow a=d=0 \Rightarrow$ plano passa pelo eixo Ox

4) Plano paralelo a um dos planos coordenados: Quando na equação geral do plano os coeficientes de duas variáveis forem nulos, representa que ele é paralelo ao plano coordenado formado por estas pelas variáveis. Assim:

a) $ax+d=0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow$ plano paralelo ao plano yz

b) $by+d=0 \Rightarrow a=c=0 \Rightarrow$ plano paralelo ao plano xz

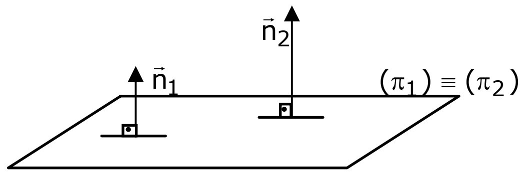
c) $cz+d=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow$ plano paralelo ao plano xy

6.4 Posição relativa entre Planos

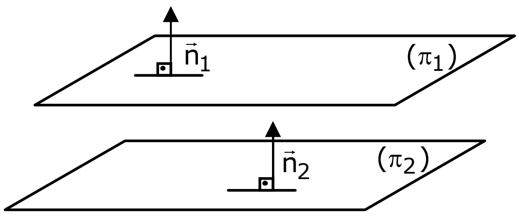
Há duas posições relativas entre dois planos: paralelos e concorrentes. Existem dois casos particulares: coincidentes (é um caso particular entre planos paralelos) e perpendiculares (é um caso particular entre planos concorrentes).

Sejam $(\pi_1): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e e $(\pi_2): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ as equações de dois planos com seus respectivos vetores normais $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Analisando as posições relativas entre dois planos vem:

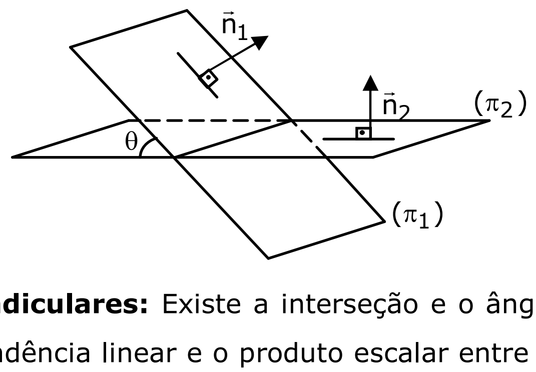
1) Planos Coincidentes: São planos superpostos e o ângulo entre eles é θ = 0°. Analisando a dependência linear entre os vetores normais, vem que: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LD (paralelos) e vale a relação: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$



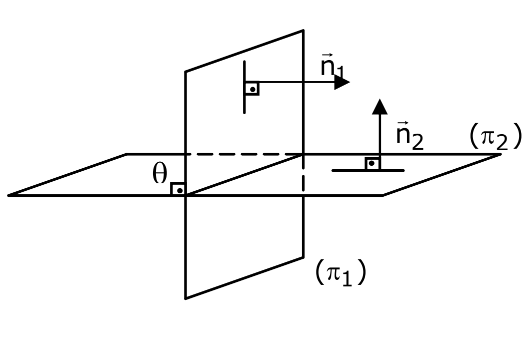
2) Planos Paralelos: São planos disjuntos (não existe interseção entre eles) e o ângulo entre eles é θ = 0°. Analisando a dependência linear entre os vetores normais, vem que: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LD (paralelos) e vale a relação: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$



3) Planos Concorrentes: Existe a interseção e o ângulo entre eles é $\theta \neq$ 90°. Analisando a dependência linear e o produto escalar entre os vetores normais, vem que: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LI (não paralelos) e $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$.



4) Planos Perpendiculares: Existe a interseção e o ângulo entre eles é θ = 90°. Analisando a dependência linear e o produto escalar entre os vetores normais, vem que: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LI (não paralelos) e $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$



Resumo: Sejam $(\pi_1): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $(\pi_2): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ as equações de dois planos com seus respectivos vetores normais $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

1) Planos Coincidentes: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LD (paralelos) e $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$.

2) Planos Paralelos: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LD (paralelos) e $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$.

3) Planos Concorrentes: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LI (não paralelos) e $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$.

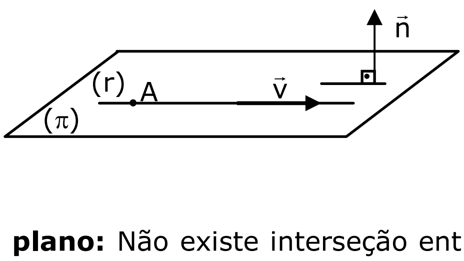
4) Planos Perpendiculares: $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ LI (não paralelos) e $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

6.5 Posição Relativa entre Reta e Plano

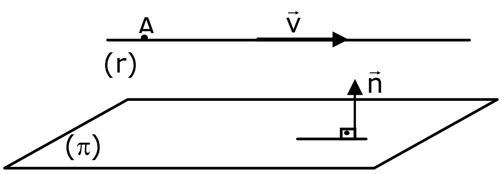
Há duas posições relativas entre uma reta e um plano: reta paralela ao plano e reta concorrente ao plano. Existem dois casos particulares: reta contida no plano (é um caso particular de reta paralela ao plano) e reta perpendicular ao plano (é um caso particular de reta concorrente ao plano).

Sejam uma reta $(r): X = A + t \cdot \vec{v}$, $\forall t \in \Re$ e um plano de equação geral $(\pi): ax + by + cz + d = 0$. Tem-se que $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal ao plano (π). Analisando as posições relativas entre uma reta e um plano vem:

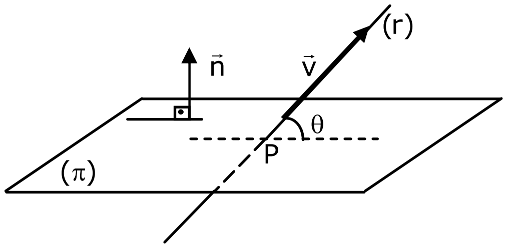
1) Reta contida no plano: Existe a interseção entre a reta (r) e o plano (π), que neste caso é a própria reta (r) e o ângulo entre a reta e plano é $\theta = 0°$. Nestas condições vem que: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \in (\pi)$.



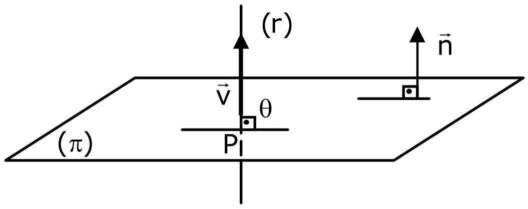
2) Reta paralela ao plano: Não existe interseção entre a reta (r) e o plano (π) e o ângulo entre eles é $\theta = 0°$. Nestas condições vem que: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \notin (\pi)$.



3) Reta concorrente ao plano: Existe a interseção entre a reta (r) e o plano (π), que neste caso é um ponto P e o ângulo entre eles é $\theta \neq 90°$. Nestas condições vem que: $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ e $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ LI (não paralelos).



4) Reta perpendicular ao plano: Existe a interseção entre a reta (r) e o plano (π), que neste caso é um ponto P e o ângulo entre eles é $\theta = 90°$. Nestas condições vem que: $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ e $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ LD (paralelos).



Resumo: Sejam uma reta $(r): X = A + t \cdot \vec{v}$ e um plano $(\pi): ax + by + cz + d = 0$ com seu vetor normal $\vec{n}$.

1) Reta contida no Plano:	$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \in (\pi)$.
2) Reta paralela ao Plano:	$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \notin (\pi)$.
3) Reta concorrente ao Plano:	$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ e $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ LI (não paralelos)
4) Reta perpendicular ao Plano:	$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ e $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ LD (paralelos)

Exemplo (2): Verificar a posição relativa entre os planos $(\pi_1): 2x + 3y - 4 = 0$ e $(\pi_2): 2x + 9y + 4z = 0$. Determine a interseção, se houver.

Solução: Os vetores normais aos planos são $\vec{n}_1 = (2,3,0)$ e $\vec{n}_2 = (2,9,4)$. Como $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ são LI e $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$, os planos são concorrentes, existe a interseção entre eles que é uma reta. Para determinar a interseção devemos resolver o sistema linear com a equação dos dois planos e expressar duas dessas variáveis em função de uma terceira. Assim: $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 2x + 9y + 4z = 0 \end{cases}$. Da primeira equação temos: $2x = -3y + 4$ (*). Vamos substituir este valor de 2x na segunda equação:

$-3y+4+9y+4z=0 \Rightarrow \quad \Rightarrow z=\dfrac{-3y-2}{2}$ (**). De (*) e (**) segue que:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3y+4}{2} \\ z=\dfrac{-3y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2x-4}{-3} \\ y=\dfrac{2z+2}{-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{2x-4}{-3}=y=\frac{2z+2}{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{2x}{2}-\frac{4}{2}}{\frac{-3}{2}}=y=\frac{\frac{2z}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{-3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{\frac{-3}{2}}=y=\frac{z+1}{\frac{-3}{2}}.$$ Logo a reta interseção de (π_1) e (π_2) é (r): $\dfrac{x-2}{\frac{-3}{2}}=y=\dfrac{z+1}{\frac{-3}{2}}$, cujo vetor diretor é $\vec{v}=\left(-\dfrac{3}{2},1,-\dfrac{3}{2}\right)$ Como o vetor diretor de uma reta pode ser qualquer vetor paralelo a ela, então fazendo $\vec{w}=-2\cdot\vec{v}=-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2},1,-\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{w}=(3,-2,3)$. Portanto, a reta (r) pode ser escrita como: (r): $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Exemplo (3): Verificar a posição relativa da reta $(r): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{2}$ e o plano $(\pi): x+3y+2z-1=0$. Determine a interseção, se houver.

Solução: Da reta temos: $(r): \begin{cases} A(1,2,4) \\ \vec{v}=(1,3,2) \end{cases}$. Da equação do plano, tem-se: $\vec{n}=(1,3,2)$. Como $\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$ e $\{\vec{v},\vec{n}\}$ LD, a reta é perpendicular ao plano e a interseção entre eles é um ponto. Da reta temos: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3} \Rightarrow x=\dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{2} \Rightarrow z=\dfrac{2y+8}{3} \end{cases}$.

Substituindo na equação do plano temos: $\left(\dfrac{y+1}{3}\right)+3y+2\left(\dfrac{2y+8}{3}\right)-1=0 \Rightarrow \quad y=-1$.

Portanto, $(r)\cap(\pi)=P(0,-1,2)$.

Exemplo (4): Determine a equação do plano (π) que contém o ponto A(1,1,-2) e é perpendicular a reta $(r): \dfrac{x}{3}=-y=\dfrac{z-1}{-3}$.

Solução: Este exemplo é relativamente simples, mas importante, pois, ele mostra outra forma de determinar a equação de um plano, ou seja, quando tivermos um vetor normal ao plano e um ponto dele é possível determinar sua equação geral. De fato, se reta é perpendicular ao plano, seu vetor diretor é um vetor normal ao plano. Então, seja $\vec{n} = \vec{v} = (3,-1,-3)$. Assim, na equação geral do plano teremos: $ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow 3x - y - 3z + d = 0$. Para determinarmos o termo independente d, basta substituir o ponto A na equação do plano, pois, se $A \in (\pi)$ então ele satisfaz a equação do plano. Logo, $3(1) - (1) - 3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = -8$. Portanto, a equação do plano é $3x - y - 3z - 8 = 0$.

<u>Exercícios Propostos</u>

1) Dados os planos $(\pi_1): -7x + y + 4z + 9 = 0$ e $(\pi_2): x + 3y + z - 6 = 0$, verificar a posição relativa entre eles. Determine a interseção, se houver.

Resp: perpendiculares e $(\pi_1) \cap (\pi_2)$ é a reta $\frac{x-3}{-1} = y = \frac{z-3}{-2}$

2) Determine a equação do plano (θ) que é paralelo ao plano $(\pi): x - 2y + 4z - 7 = 0$ e passa pelo ponto P(-1,0,-1). Resp: $(\theta): x - 2y + 4z + 5 = 0$

3) Determine a equação do plano (θ) definido pelas retas $(r): \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{2} = z - 2$ e $(s): 2x - 10 = y - 5 = -z$. Resp: $(\theta): 2x - 3y - 2z + 5 = 0$

4) Achar as equações simétricas da reta que passa pela origem, é paralela ao plano $(\pi): 3x - 2y + z - 2 = 0$ e intercepta a reta $(r): x - 1 = \frac{y+2}{3} = z$.

Resp: $\frac{x}{9} = \frac{y}{17} = \frac{z}{7}$

5) Determine na forma simétrica a equação da reta que passa pelo ponto P(2,3,-1) e é paralela aos planos $(\pi_1): 2x - 3y + z - 1 = 0$ e $(\pi_2): x + 2y + 3z + 8 = 0$.

Resp: $\frac{x-2}{11} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-7}$

COMENTÁRIOS IMPORTANTES

1) Não existem planos reversos e nem ortogonais. Da mesma forma, não existe reta reversa ao plano e nem reta ortogonal ao plano. Portanto, cuidado com as afirmações feitas a respeito das posições relativas entre planos e entre retas e planos.

2) O vetor normal $\vec{n}$ a um plano (π) é facilmente obtido da equação geral. Porém, qualquer outro vetor $\vec{w}$ paralelo a $\vec{n}$, ou seja: $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{n}$, também é um vetor normal ao plano (π). Assim, qualquer vetor $\vec{w}$ normal ao plano pode ser usado para a construção da equação geral do plano (π).

3) Deve-se notar que um plano é constituído de pontos. Como estamos introduzindo os conceitos vetoriais para definirmos e trabalhamos com os planos, é muito comum, quando utilizamos suas equações, confundir o que são pontos do plano e o que são vetores paralelos ou contidos no plano. Por exemplo: Considere o plano de equação geral (π): $2x - y + 4z - 7 = 0$, logo seu vetor norma é $\vec{n} = (2,-1,4)$. Como é comum representar um vetor expressando somente suas coordenadas por $\vec{v} = (x, y, z)$, isso pode causar confusão com as coordenadas x, y e z dos pontos do plano, ou seja, as coordenadas x, y e z que aparecem na equação geral (bem como nas outras equações) $2x - y + 4z = 0$, são as coordenadas dos pontos do plano e não de um vetor paralelo ou contido nele. Um vetor $\vec{v}$ só será paralelo ou estará contido no plano se $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. No entanto, para que um ponto pertença ao plano é necessário que ele satisfaça a equação do plano. Note que o ponto $P(2,1,1) \in (\pi)$, pois: $2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 7 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, mas o vetor $\vec{v} = (2,1,1)$ não é paralelo ao plano, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7 \neq 0$. Já o vetor $\vec{w} = (1,6,1)$ é paralelo ao plano, pois $\vec{n} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 0$, mas o ponto de coordenadas $Q(1,6,1) \notin (\pi)$, pois: $2 \cdot 1 - 1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 - 7 = 0 \Rightarrow -7 = 0$ o que é uma contradição.