Capítulo 10

Evaporação Nuclear

Um núcleo atômico excitado pode decair através da emissão de nêutrons, prótons em núcleos mais leves (como por exemplo, partículas alfa), num processo semelhante ao resfriamento de um fluido por evaporação. A teoria que descreve este processo é apresentada a seguir.

Considere um fluxo de nêutrons que se movem com energia entre ε e $\varepsilon+d\varepsilon$, dentro de um volume Ω na vizinhança de um núcleo, e seja $\sigma_c(\varepsilon)$ a seção de choque de captura do nêutron pelo núcleo $\underline{B}$, formando o núcleo $\underline{A}$. A probabilidade de interação pode ser escrita em função da seção de choque como

$$dP = \frac{\sigma_c}{a} = \frac{\sigma_c v dt}{\Omega},$$

onde $\underline{a}$ é a área transversal do fluxo de nêutrons, e $\underline{v} = \sqrt{2\varepsilon/m}$ é a velocidade dos nêutrons, sendo $\underline{m}$ a massa. Daqui temos a taxa de transição entre os estados de nêutron livre e ligado, W_{AB} , que é também a taxa de produção do núcleo $\underline{A}$ por captura de nêutron pelo núcleo $\underline{B}$, que fica

$$W_{AB} = \frac{dP}{dt} = \frac{\sigma v}{\Omega}. \tag{10.1}$$

A evaporação de nêutrons é o processo inverso ao da captura. Vimos que a Regra de Ouro de Fermi nos dá a taxa de transição para o processo de captura de nêutrons em função do elemento de matriz da interação, $\langle A|H_{int}|B\rangle$, como

$$W_{AB} = \frac{2\pi}{\hbar}\langle A|H_{int}|B\rangle^2 \rho_A(E_A), \tag{10.2}$$

onde $\underline{H_{int}}$ é o operador hamiltoniano da operação, e $\rho_A(E_A)$ é a densidade de estados do núcleo $\underline{A}$ na energia $\underline{E_A} = E_B + \varepsilon$, sendo E_B a energia inicial do núcleo $\underline{B}$.

Para o caso da evaporação de nêutrons, a regra de ouro resulta numa taxa de transição, W_{BA}, dada por

$$W_{BA} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle B|H_{int}|A\rangle|^2 \rho_B(E_B, \varepsilon) \tag{10.3}$$

onde $\rho_B(E_B, \varepsilon$ é a densidade de estados do sistema formado pelo núcleo final com energia $\underline{E_B}$ e pelo nêutron livre com energia ε. Comparando as equações (10.2) e (10.3) temos

$$W_{BA} = W_{AB}\frac{\rho_B(E_B, \varepsilon)}{\rho_A(E_A)}. \tag{10.4}$$

Sendo $\omega_A(E_A)$ a densidade dos níveis do núcleo $\underline{A}$ para energias de excitação E_A, $\omega_B(E_B)$ a densidade de níveis para o núcleo $\underline{B}$ na energia E_B, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_A(E_A) &= \omega_B(E_A) \\ \rho_B(E_B) &= \omega_B(E_B)\rho_n(\varepsilon) \end{aligned} \tag{10.5}$$

onde a densidade de estados do nêutron livre, $\rho_n(\varepsilon)$, é dada pela densidade de um gás de Fermi, isto é,

$$\rho_n(\varepsilon) = \frac{g\Omega m}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{2m\varepsilon}\, d\varepsilon \tag{10.6}$$

Substituindo (10.5) e (10.6) em (10.4) obtemos:

$$W_{BA}\, d\varepsilon = \frac{g\sigma_c\varepsilon m}{\pi^2\hbar^3}\frac{\omega_B(E_B)}{\omega_A(E_A)}\, d\varepsilon \tag{10.7}$$

A densidade de níveis pode ser relacionada à entropia $S = \ln\omega$, e portanto,

$$W_{BA}\, d\varepsilon = \frac{g\sigma_c\varepsilon m}{\pi^2\hbar^3}\exp\left[S(E_B) - S(E_A)\right]\, d\varepsilon \tag{10.8}$$

Podemos ainda escrever

$$S_B(E_B) = S_B(E_A - B_n - \varepsilon) = S_B(E_A - B_n) - \frac{d}{dE}S_B(E_A - B_n)\varepsilon + f(\varepsilon)$$

onde B_n é a energia de separação e $f(\varepsilon)$ é a função formada por todos os demais termos na expansão de S. Da termodinâmica temos $\dfrac{ds}{d\epsilon} = \dfrac{1}{T}$ onde $\underline{T}$ é a temperatura do sistema, então,

$$S_B(E_B) = S_B(E_A - B_n) - \frac{\varepsilon}{T_B(E_A - B_n)} + f(\varepsilon) \tag{10.9}$$

e o argumento da exponencial em (10.8) fica

$$S_B(E_A - B_n) - S_A(E_A) - \frac{\varepsilon}{T_B(E_A - B_n)} + f(\varepsilon)$$

Agora introduzimos a energia E^* definida por

$$S_B(E_A - B_n) - S_A(E_A) = -\frac{E^*}{T_A(E_A)} \tag{10.10}$$

Observe que $^* \approx B_n$ se $B_n \ll E_A$ e $S_B(E) \equiv S_A(E)$.
Substituindo (10.9) e (10.10) em (10.8), segue

$$W_{BA}\, d\varepsilon = \frac{g\sigma_c\varepsilon m}{\pi^2\hbar^3}\exp\left[-\frac{E^*}{T_A(E_A)}\right]\exp\left[-\frac{\varepsilon}{T_B(E_A - B_n)}\right]e^{f(\varepsilon)}. \tag{10.11}$$

Obviamente a probabilidade de emissão de um nêutron com energia entre ε e $\varepsilon + d\varepsilon$ é igual à de transição do núcleo A para o núcleo B. Então a taxa de produção de nêutrons, $W_n(\varepsilon)\, d\varepsilon$ fica

$$W_n(\varepsilon)\, d\varepsilon) = k\sigma_c(\varepsilon)\varepsilon\exp\left[-\frac{\varepsilon}{T_B}\right]e^{f(\varepsilon)} \tag{10.12}$$

Para avaliarmos $f_(\varepsilon)$, notemos que para um gás de Fermi temos

$$E = \frac{T^2}{a},$$

e portanto,

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{aE}}$$

Se aproximarmos $f(\varepsilon)$ ao termo de segunda ordem na expansão de $S(\varepsilon)$, obtemos

$$f(E) \approx \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{d^2S}{dE^2}\right)_{E_A-B_n} = -\frac{\varepsilon^2}{4}a(aE)^{-3/2} = -\frac{\varepsilon^2}{4(E_A-B_n)T_B}$$

Para uma temperatura $T_B(E_A - B_n)$, a energia média é $\hat{\varepsilon} = 2T_B(E_A - B_n)$, então

$$\eta = \frac{\hat{\varepsilon}}{4(E_A-B_n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{(E_A-B_n)}\right)^{1/2} \ll 1,$$

e portanto,

$$|f(E)| = \left| -\eta\frac{\varepsilon}{T_B}\right| << \frac{\varepsilon}{T_B}$$

e portanto, da expressão (10.12), temos

$$W_n(\varepsilon)\,d\varepsilon = k\sigma_c(\varepsilon)\varepsilon\exp\left[-\frac{\varepsilon}{T_B}\right] \tag{10.13}$$

A largura de emissão de nêutrons, Γ_n, é definida por

$$\Gamma_n = \hbar\int_0^\infty W_n(\varepsilon)\,d\varepsilon \;\cong \hbar k\bar{\sigma_c}\int_0^\infty \varepsilon\exp\left[-\frac{\varepsilon}{T_B}\right]d\varepsilon, \tag{10.14}$$

onde $\bar{\sigma_c}$ é o valor médio de $\sigma_c(\varepsilon)$ dado pela distribuição maxwelliana, isto é,

$$\bar{\sigma_c} = \frac{\int_0^\infty \sigma_c(\varepsilon)\varepsilon\exp\left[-\frac{\beta}{T_B}\right]}{\int_0^\infty \varepsilon\exp\left[-\frac{\beta}{T_B}\right]}$$

A integral em (10.14) é facilmente calculada por partes, já que

$$\int \varepsilon e^{-\beta\varepsilon}\,d\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{\beta}e^{-\beta\varepsilon} + \int\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\beta}\,d\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{\beta}e^{-\beta\varepsilon} - \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\beta^2} = -\left(\varepsilon+\frac{1}{\beta}\right)\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\beta}$$

então,

$$\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon}\,d\varepsilon = \frac{1}{\beta^2}$$

e portanto, de (10.14) temos

$$\Gamma_n = \hbar k \bar{\sigma}_c T_B^2,$$

ou, substituindo o valor de k,

$$\Gamma_n = \frac{gm\bar{\sigma}_c}{\pi^2\hbar^3} \exp\left[-\frac{E^*}{T_A(E_A)}\right] T_B^2(E_A - B_n). \tag{10.15}$$

Para o caso da evaporação de partículas carregadas, através de raciocínios semelhantes obtemos resultados iguais aos das equações 10.13 e 10.15, substituindo-se, porém, B_n por$B_p + V_p$, onde B_p é a energia de separação da partícula e V_p o potencial coulombiano para essa partícula na superfície do núcleo.

Exercícios

10.1 *Considere uma partícula de carga elétrica $q = Z'e$, onde e é a carga do elétron, sendo emitida por um núcleo de número de massa A e número atômico Z. Nesse caso, o potencial coulombiano na superfície do núcleo é $V = \dfrac{ZZ'e}{r}$.*

a) Mostre que, neste caso a expansão (10.8) fica

$$S_B(E_B) = S_B(E_A - E_0 - V) - \frac{(\varepsilon - V)}{T_B(E_A - E_0 - V)} - f(\varepsilon - V)$$

b) Mostre que a distribuição de energia da partícula carregada, p, é:

$$\begin{aligned} W_P(\varepsilon)\, d\varepsilon =& \sigma_0 \frac{gm}{\pi^2\hbar^3} \exp\left[S_B(E_A - E_0 - V) - S_A(E_A)\right] \\ & \times (\varepsilon - V) \exp\left[-\frac{(\varepsilon - V)}{T_B(E_A - B_n - V)}\right] e^(- f(\varepsilon - V)\, d\varepsilon. \end{aligned}$$

c) Mostre que a largura de decaimento é:

$$\Gamma_p = \sigma_0 \frac{gm}{\pi^2\hbar^2} T_B^2(E_A - E_0 - V) \exp\left[S_B(E_A - E_0 - V) - S_A(E_A)\right].$$