Teorema (Helmholtz): Seja $\vec{F}(\vec{r})$ um campo vetorial satisfazendo

$$\lim_{r\to\infty} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (1)$$

cujo divergente e rotacional são $D(\vec{r})$ e $\vec{C}(\vec{r})$, respectivamente

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = D(\vec{r}) \quad e \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{C}(\vec{r}) \qquad (2)$$

e tais que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{D(\vec{r})}{1/r^2} = 0 \quad e \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\vec{C}(\vec{r})}{1/r^2} = \vec{0} \qquad (3)$$

Ou seja, $D(\vec{r})$ e $\vec{C}(\vec{r})$ vão a zero no infinito mais rápido que $1/r^2$. Nestas condições, $\vec{F}(\vec{r})$ pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla}\times\vec{W} \qquad (4)$$

com

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{D(\vec{r}\,')}{\imath}\,d\tau' \quad e \quad \vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\imath}\,d\tau' \qquad (5)$$

$$\imath = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

Dito de outra forma, campos vetoriais que vão a zero no infinito, cujos divergente e rotacional também vão zero suficientemente rápido no infinito, ficam completamente determinados por seu divergente e rotacional.

—— // ——

Prova:

As condições expressas na eq. (3) garantem a convergência das integrais da eq. (5).

$$\int \frac{D(\vec{r}\,')}{r}\, d\tau' = \underbrace{\int_{4\pi} d\Omega \int_0^R dr'\, \frac{D(\vec{r}\,')}{r}\, r'^2}_{= I_1} + \underbrace{\int_{4\pi} d\Omega \int_R^\infty dr'\, \frac{D(\vec{r}\,')}{r}\, r'^2}_{= I_2}$$

com $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

A integral I_1 é claramente finita

Se tomarmos $R \gg |\vec{r}|$, para I_2 vale que $r \simeq r'$

$$I_2 \underset{R \gg |\vec{r}|}{\sim} \int_{4\pi} d\Omega \int_R^\infty \frac{D(\vec{r}\,')}{r'}\, r'^2 dr' = \int_{4\pi} d\Omega \int_R^\infty D(\vec{r}\,')\, r' dr'$$

$$\int_R^\infty D(\vec{r}\,')\, r' dr \sim \int_R^\infty \frac{r'}{r'^{\,2+\epsilon}}\, dr' \qquad (\epsilon > 0)$$

$$= \int_R^\infty r'^{\,1-1-\epsilon}\, dr' = -\frac{1}{\epsilon}\, r^{-\epsilon}\Big|_R^\infty$$

$$= \frac{1}{\epsilon R^\epsilon} < \infty$$

Logo, I_2 também é finita.

Uma discussão análoga mostra que $\int \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{r} d\tau'$ é finita.

O próximo passo é mostrar que o divergente do campo vetorial $\vec{F}$ dado pelas eqs. (4) e (5) é igual a $D(\vec{r})$, bem como seu rotacional é igual a $C(\vec{r})$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}U + \vec{\nabla}\times\vec{W}\right) = -\nabla^2 U + \cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{W})}$$

$$\vec{\nabla}\cdot \vec{\nabla}\times\vec{W} = \vec{\nabla}\cdot\left\{\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}-\frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial W_x}{\partial z}-\frac{\partial W_z}{\partial x}\right)\hat{y}\right.$$

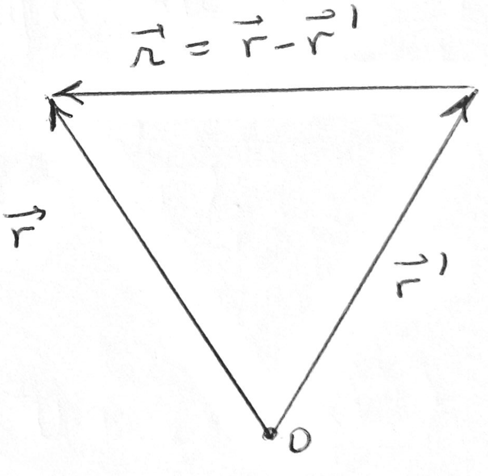
$$\left.+\left(\frac{\partial W_y}{\partial x}-\frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\hat{z}\right\}$$

$$=\cancel{\frac{\partial^2 W_z}{\partial x\,\partial y}}-\cancel{\frac{\partial^2 W_y}{\partial x\,\partial z}}+\cancel{\frac{\partial^2 W_x}{\partial y\,\partial z}}-\cancel{\frac{\partial^2 W_z}{\partial y\,\partial x}}+\cancel{\frac{\partial^2 W_y}{\partial z\,\partial x}}-\cancel{\frac{\partial^2 W_x}{\partial z\,\partial y}}$$

$= 0$ (divergente de rotacional é zero)

Então

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = -\nabla^2 U = -\nabla^2\left\{\frac{1}{4\pi}\int\frac{D(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\,d\tau'\right\}$$



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = -\frac{1}{4\pi}\int D(\vec{r}\,')\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)}_{=-4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')}d\tau' = \int D(\vec{r}\,')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d\tau'$$

$$= D(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times\left(-\vec{\nabla}U+\vec{\nabla}\times\vec{W}\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}U\right) + \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{W}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}\times\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right\}$$

$$= \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}-\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}\right]\hat{x}+\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}-\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}\right]\hat{y}$$

$$+\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}-\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}\right]\hat{z}$$

rotacional de gradiente é zero.

Então

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{W} = -\nabla^2\vec{W}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{W}\right)$$

$$-\nabla^2\vec{W} = -\nabla^2\left\{\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{r}\,d\tau'\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\vec{C}(\vec{r}\,')\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}d\tau' = \vec{C}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{W} = \vec{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{C}(\vec{r}')}{\mathscr{r}}\,d\tau'\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{C}(\vec{r}')}{\mathscr{r}}\right]d\tau'$$

Como

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{A} + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad (\text{lista } 1a)$$

temos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{W} = \frac{1}{4\pi}\int\vec{C}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

Mas

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \vec{\nabla}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\hat{z}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\hat{y} - \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\hat{z} = -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$$

Portanto

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{W} = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

Como

$$\vec{\nabla}'\cdot\left[\frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\right] = \frac{1}{\mathscr{r}}\vec{\nabla}'\cdot\vec{C}(\vec{r}\,') + \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$$

temos

$$\int \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)d\tau' = \int \vec{\nabla}'\cdot\left[\frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\right]d\tau' - \int \frac{1}{\mathscr{r}}\underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\vec{C}(\vec{r}\,')}\,d\tau'$$

= 0, porque para ser candidato a rotacional, o campo C precisa ter divergente nulo.

Pelo Teorema da divergência

$$\int \vec{\nabla}'\cdot\left[\frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\right]d\tau' = \oint_S \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\cdot d\vec{a}\,'$$

$$I \equiv \oint_S \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\cdot d\vec{a}\,' \sim \oint_S \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{r'}\cdot d\vec{a}\,' \leqslant \oint \frac{|\vec{C}(\vec{r}\,')|}{r'}\,da'$$

$$I < \max_S\left(|\vec{C}(\vec{r}\,')|\right)\oint \frac{da'}{r'} = \max_S\left(|\vec{C}(\vec{r}\,')|\right)\frac{4\pi r'^2}{r'}$$

$$I < 4\pi \max_S\left(|\vec{C}(\vec{r}\,')|\right) r' \xrightarrow{r'\to\infty} 0$$

Logo

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\nabla^2 \vec{W} = \vec{C}(\vec{r})$$

Mas quem garante que a decomposição

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{W}$$

é única ?

Se $\vec{G}$ é um campo vetorial com divergente e rotacional identicamente nulos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0 \quad e \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0} \quad \forall \vec{r}$$

então $\vec{F} + \vec{G}$ possui o mesmo $\vec{\nabla}\cdot$ e $\vec{\nabla}\times$ que $\vec{F}$.

Exemplo de campo $\vec{G}$:

$$\vec{G} = yz\,\hat{x} + zx\,\hat{y} + xy\,\hat{z}$$

Um campo com essas propriedades satisfaz a seguinte equação

$$\vec{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{G})}_{=0} = -\nabla^2\vec{G} + \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{G})}_{0} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\vec{G} = \vec{0} \quad \text{(equação de Laplace)}$$

Entretanto, como estamos interessados em campos que vão a zero no infinito

$$\lim_{r\to\infty} \vec{G}(\vec{r}) = \vec{0}$$

então para satisfazer $\nabla^2\vec{G} = \vec{0}$, $\vec{G}$ deve ser nulo em todo o espaço. Provaremos esse resultado mais adiante neste curso.

Um campo vetorial $\vec{F}$ é dito irrotacional se

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \text{em todo o espaço}$$

Nessas condições, o Teorema de Helmholtz garante que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Na verdade, todas as afirmações a seguir são equivalentes

* $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \forall \vec{r}$
* $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ é independente da trajetória que une $\vec{a}$ e $\vec{b}$
* $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ p/ qquer circuito fechado C
* $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, onde U é uma função escalar.

Um campo vetorial $\vec{F}$ é dito solenóide se

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \text{ em todo espaço}$$

Nessas condições, o teorema de Helmholtz garante que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Todas as afirmações a seguir são equivalentes

* $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad \forall \vec{r}$

* $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}$ só depende da curva suporte de S

* $\oint \vec{F} \cdot d\vec{a} = 0$ p/ qualquer superfície fechada

* $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$