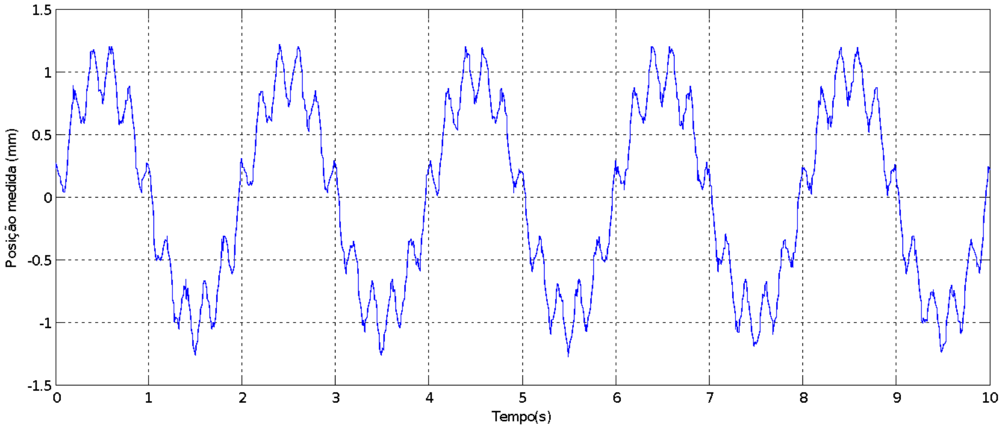
Questão 1: Q1 P1 2010



As vibrações de uma pequena estrutura mecânica deverão ser controladas de forma ativa. Foi aplicado um impulso na estrutura e verificou-se, por meio de um sistema de aquisição de dados de alta amostragem (>10kHz), o deslocamento acima. Pode-se notar a existência de dois modos de vibrar pouco amortecidos. Você dispõe de um hardware para controle antigo (computador+sistema de aquisição), que permite processamento de apenas 7 ciclos/s (7Hz). Assim, decidiu-se por controlar apenas o modo mais lento.

a) Esboce o espectro de freqüência do sinal original de resposta, como amostrado pelo sistema de alta amostragem.

b) Esboce o espectro de freqüência deste sinal, quando amostrado pelo seu sistema de controle antigo.

c) Para o controle do modo de vibrar mais lento, indique e justifique qual a melhor solução:

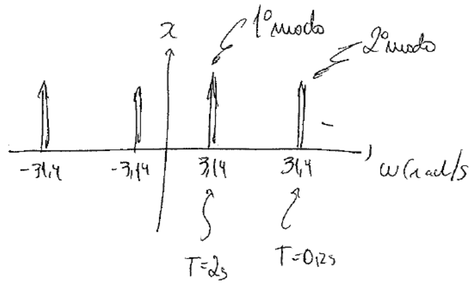
I) Utilizar um filtro analógico passa baixa com corte em aprox. 15rad/s logo na medida do sensor de posição, antes do sistema computacional de controle.

II) Utilizar um filtro digital passa baixa implementado no próprio computador, com freqüência de corte de 15rad/s

Solução

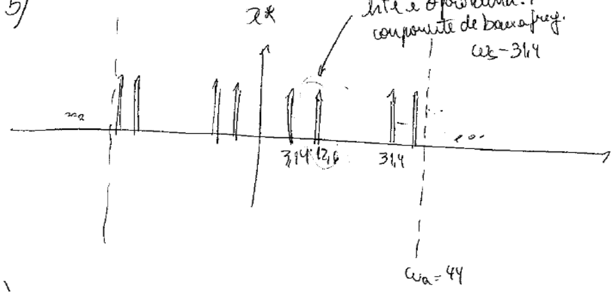
Q.1)

a)



amost. > 10kHz

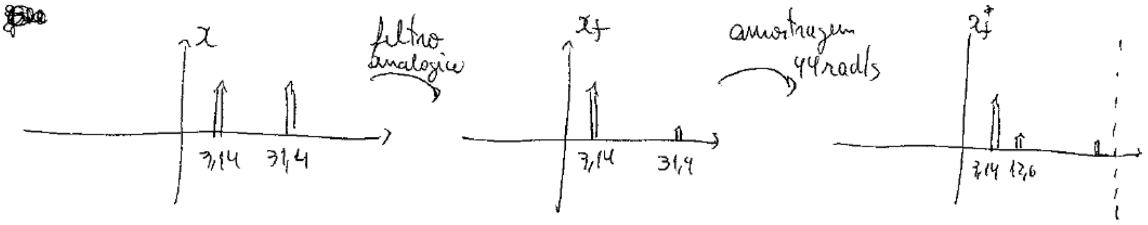
b)



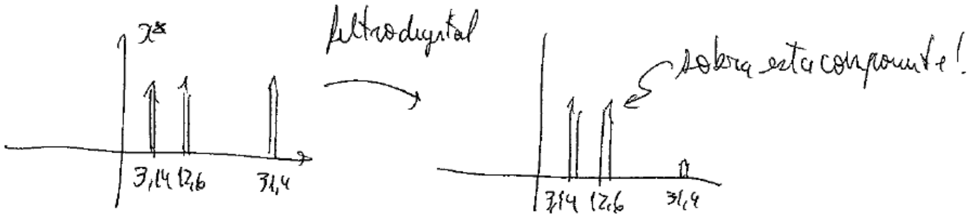
amost = 7Hz = 44rad/s = ωs

$\omega_a = 44$

c) Melhor alternativa é a (a), pois se o filtro for bom, atenua a componente de 31,4 rad/s

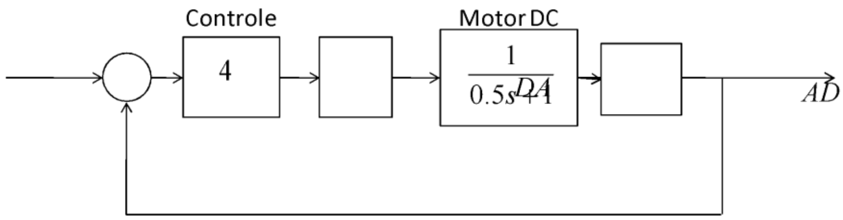


alternativa b não resolve pois filtra sinal já distorcido:



Questão 2 : (Q2 P1 2010)

Um motor DC (modelado como um sistema de primeira ordem com constante de tempo 0,5s) é servo-controlado por meio de um controle proporcional com ganho 4, conforme é ilustrado abaixo. Este controle será implementado em um sistema digital, com período de amostragem T. Obtenha o valor máximo de T para que o sistema em malha fechada mantenha-se estável. Justifique.



Q2) Modelo da planta discreta

$$G(s) = \frac{1}{0{,}5s+1} = \frac{2}{s+2}$$

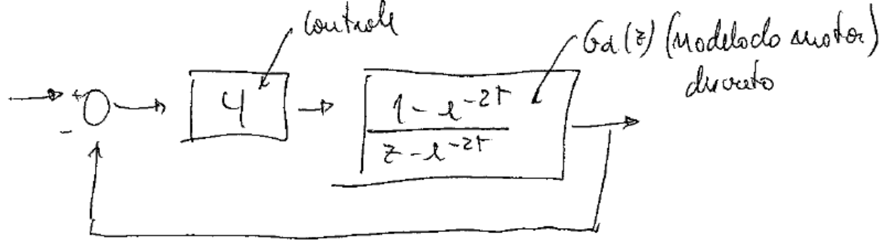
$$\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right) = \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s(s+2)}\right)\right) = \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2T} \cdot z^{-1}}$$

$\Rightarrow$ planta discretizada $\frac{z-1}{z} \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) = (z-1) \cdot \left(\frac{\cancel{z} - e^{-2T} \cancel{-z} + 1}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-2T})}\right) =$

$$\boxed{G_d(z) = \frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}}}$$

Assim, a malha de controle digital pode ser escrita como

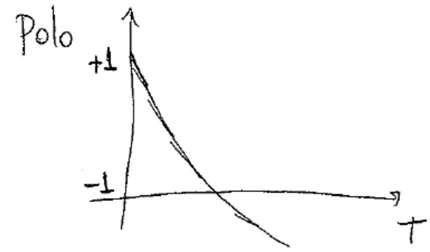


em MF $G_{MF}(z) = \dfrac{4\cdot\dfrac{(1-e^{-2T})}{z-e^{-2T}}}{1+\dfrac{4(1-e^{-2T})}{z-e^{-2T}}} = \dfrac{4(1-e^{-2T})}{z-e^{-2T}+4-4e^{-2T}} = \dfrac{4(1-e^{-2T})}{z-5e^{-2T}+4}$

pólos em MF: $5e^{-2T}-4$

P/ T pequeno (amostragem alta) pólo $\cong 1$

3



Será instável quando cruzar -1

$5e^{-2T}-4=-1$

$5e^{-2T}=3$

$e^{-2T}=0,6 \Rightarrow T=-\frac{1}{2}\ln 0,6$

$\boxed{T=0,255s}$

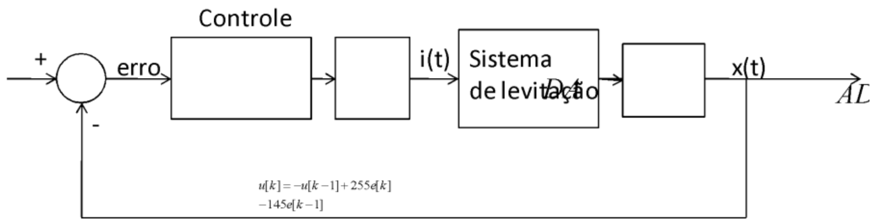
Para amostragens maiores que 0,255s, o servo motor ficará instável.

Questão 3 (Q3 P1 2010)

O sistema de levitação magnética pode ser modelado como $mx'' = k_1x + k_2i$, onde m (0,02kg) é a massa em levitação, k_1 (20N/m) e k_2 (0,4N/A) são constantes físicas dependentes da configuração do sistema. Um projetista de controle possuía como objetivo fazer com que o sistema em malha fechada fosse estável, com amortecimento maior que 0,7 e tempo de estabilização (5%) inferior a 0,4s (lembre-se que este tempo equivale a 3/σ). A freqüência de amostragem do sistema de controle é 100Hz.

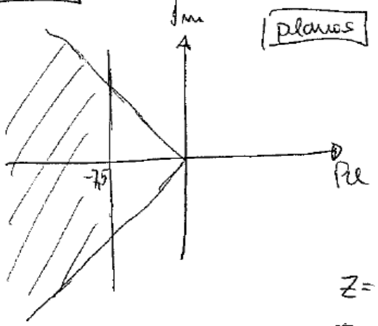
a) Mostre a região no plano s (contínuo) onde os pólos em malha fechada podem estar localizados. Indique esta região no plano z.

b) O projetista chegou à seguinte função de controle $u[k]=-u[k-1]+255e[k]-145e[k-1]$. Considere que o cálculo é suficientemente rápido que seja possível utilizar e[k] para atualizar a saída de controle u[k]. Este controle satisfaz os requisitos? Justifique



3ª Questão

a)

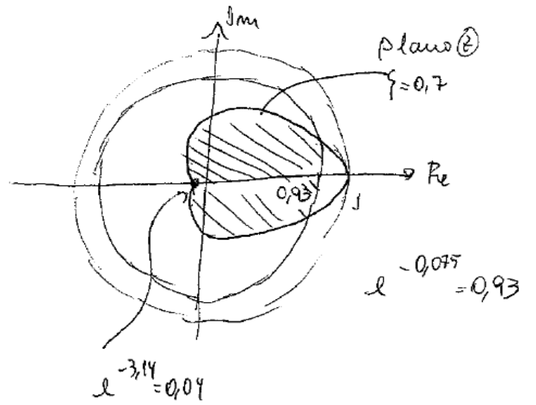


$\frac{3}{\sigma} = 0,4$

$\sigma = 7,5$

$z = e^{sT}$

$T = 0,01s$



b) **Planta contínua**

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{0,4}{0,02s^2 - 20} = \frac{20}{s^2 - 1000} = G(s)$$

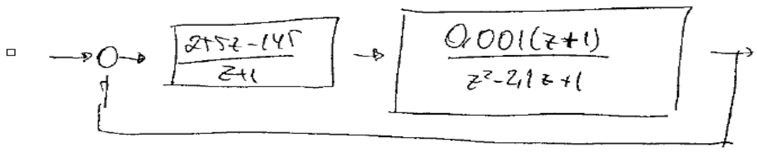
Planta discretizada $T = 0,01s$

$$\to \frac{X(z)}{I(z)} = \frac{0,001(z+1)}{z^2 - 2,1z + 1} \quad \cdots \quad \frac{X(z)}{I(z)} = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right\}$$

$$U(z) = -z^{-1} \cdot U(z) + 255\, E(z) - 145\, z^{-1} E(z)$$

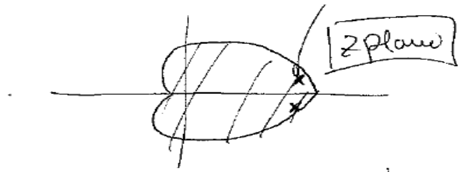
$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{255z - 145}{z + 1} = G_{cd}(z)$$

controle

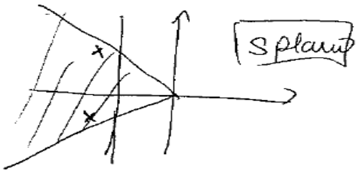


Malha fechada $= \dfrac{0,001(255z-145)}{z^2-2,1z+1+0,255z-0,145} = \dfrac{0,001(255z-145)}{z^2-1,845z+0,855}$

logo, pólos em malha fechada $= z_{1,2} = 0,9225 \pm 0,0632i$



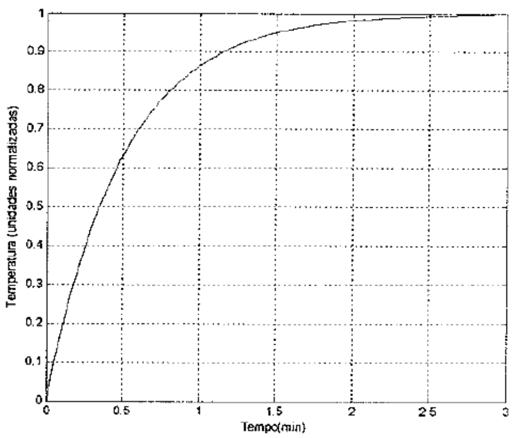
$s_{1,2} = \dfrac{1}{T}\ln z = \dfrac{1}{0,01}\ln z = \begin{cases} -7,8 \pm 6,84j \end{cases}$

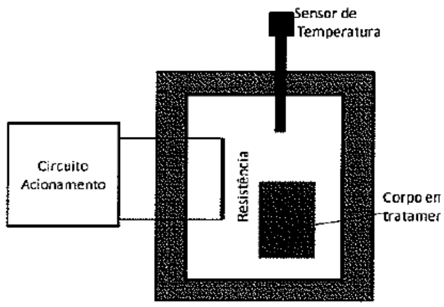


como os polos discretos estão dentro do "coração", o controle irá respeitar os requisitos.

Questão 4 (Q1 2011)

1ª. Questão (5 pontos) Um forno elétrico de pequeno porte é utilizado para tratamento térmico. Aplicou-se uma entrada em degrau (unitário) no circuito de acionamento das resistências elétricas, e a saída em temperatura do forno verificada foi:

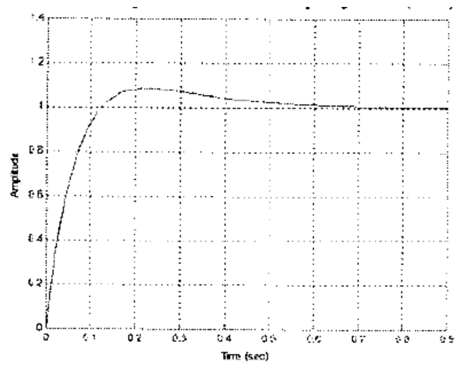




a) Qual um bom modelo de primeira ordem (contínuo) para o forno em malha aberta? Lembre-se que $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s+1}$, e o sistema atinge 63,2% da resposta em t=τ. (0,5)

b) Projete um controle PI da forma $Gc(s) = K_P \frac{T_i s+1}{T_i s}$ para garantir um tempo de estabilização 2% de 0,4min e ausência de sobressinal. (1,0) Lembre-se ($t_s^{2\%} = 4/\zeta\omega_n$)

c) Um projeto bem feito resultou a resposta a um degrau unitário na referência, em malha fechada, tal como o gráfico abaixo. Explique a causa do sobressinal e da pequena deterioração no tempo de resposta verificado, em relação ao especificado em projeto. (0,5)



d) Discretize o controlador considerando um tempo de amostragem de 0,1min. Utilize o método bilinear. Calcule os pólos em malha fechada do sistema no plano z, e os equivalentes no plano s. Esboce a resposta a uma entrada degrau unitário na referência, para o sistema de controle digital. OBS: Neste item você também deverá discretizar a planta.(1,5)
Explique e discuta os resultados.

e) Se você fez o item anterior corretamente, deve ter verificado uma degradação muito grande da resposta em função da digitalização do controle com amostragem de 0,1min. Proponha um novo tempo de amostragem, calcule o novo controlador em z e escreva-o na forma de equação de diferenças, tendo como entrada o erro e(k) e a saída a ação de controle u(k). (1,5)

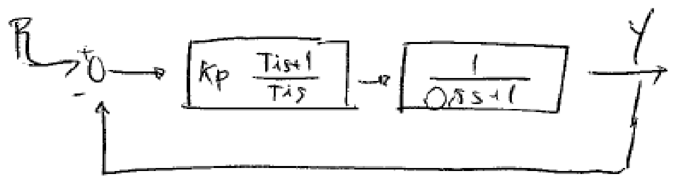
a) $\frac{Y}{U} = \frac{1}{0,5s+1}$ pois em $t = 0,5$ min $y \cong 63\%\, y_\infty$

e $y_\infty = 1$

b) $t_s^{2\%} = 0,4$ min, $M_p = 0\%$ $\Rightarrow$ $\xi = 1$

$\frac{4}{\xi\omega_n} \overset{*}{=} 0,4 \Rightarrow \omega_n = 10$ rad/s

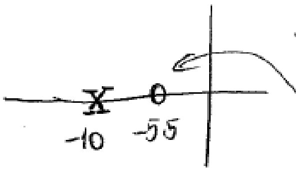
* esta expressão não é exata para $\xi = 1$, mas será considerada.



$$\frac{Y}{R} = \frac{K_p(T_i s+1)}{s^2(0,5T_i) + s(T_i + K_p T_i) + K_p} = \frac{K_p(T_i s+1)}{s^2 + s\cdot\left(\frac{1+k_p}{0,5}\right) + \frac{2K_p}{T_i}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{1+K_p}{0,5} & \Rightarrow K_p = 9 \\ \omega_n^2 = \frac{2K_p}{T_i} & \Rightarrow T_i = 0,18 \end{cases}$$

c)



em Malha Fechada

o zero deteriora a resposta, aumentando o sobressinal e tempo de resposta.

d)

$$G_{cd} = \frac{11,5z-6,5}{z-1} \quad \text{(Tustin)}$$

$$G_{Planta\,d} = \frac{0,1813}{z-0,8187} \quad \text{(equivalente discreto planta)}$$

$\Rightarrow$ em malha fechada

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{2,085z-1,178}{z^2+0,2619z-0,3595}$$

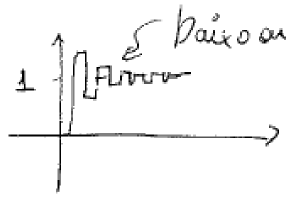
polos $z=-0,74$
$z=0,48$

equivalem em S a:

$$s = \frac{1}{T}\ln z \Rightarrow \begin{cases} -2,9+31,4j \\ -7,31 \end{cases} \rightarrow \omega_n = 31 \text{ rad/s} \rightarrow T_n \cong 0,2 \text{ seg}$$

$\xi = 0,09$

baixo amortecimento



e)

$\omega_B = 10$ rad/s

$$T_A \cong \frac{1}{20} \cdot \frac{2\pi}{\omega_B} = 0,03 \text{ seg}$$

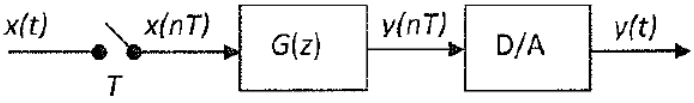
$$G_{cd} = \frac{9,75z-8,25}{z-1} \rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{9,75-8,25z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$u(k)-u(k-1) = 9,75e(k)-8,25(e(k-1))$$

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + 9,75e(k) - 8,25e(k-1)}$$

Questão 5 (Q2 2011)

Dado o sistema esquematizado abaixo, onde $T = 0{,}1$s. Pede-se:



a) Se $x(t) = \cos(6\pi t)$ e $G(z) = 1$, faça um esboço dos espectros de freqüências de $x(t)$, $y(nT)$. (1,0)

b) Faça um esboço dos espectros de freqüências de $y(t)$, sendo o D/A composto por um segurador de ordem zero (ZOH). (1,5)

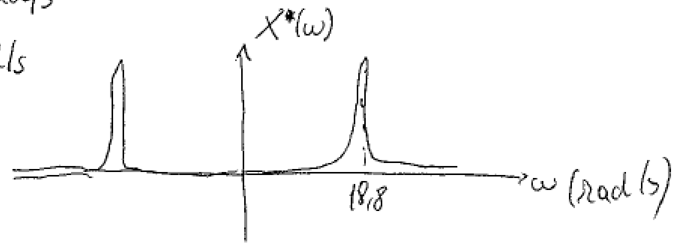
c) Se $G(z)$ é um filtro passa baixa ideal com freqüência de corte de 5Hz, qual será o conteúdo de freqüência de $y(t)$? (1,0)

2)

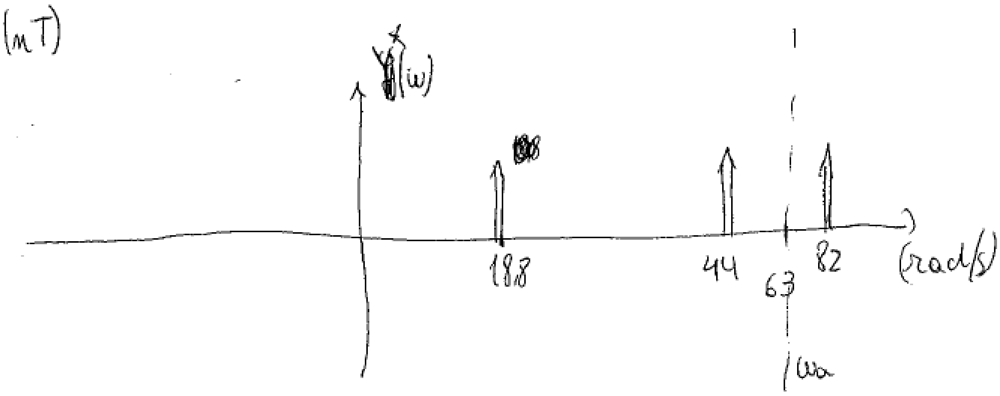
$T = 0{,}1s \Rightarrow \omega_a = 63 rad/s$

$x(t) = \cos(\underbrace{6\pi}_{18{,}8 rad/s} t)$

a)

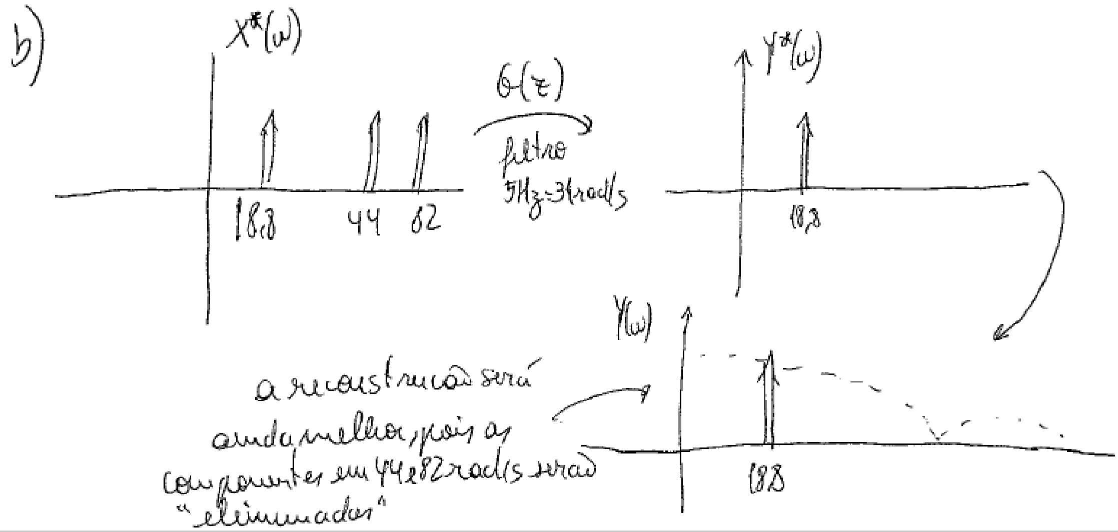


y(nT)



y(t) → o ZOH "modula" o espectro de Y*(ω)

reduz picos do espectro em 44 e 82 rad/s



Questão 6 (Q3 P1 2011)

Resolva a seguinte equação de diferenças:

$$2x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) = u(k)$$

com x(k)=0 para k<0 e $u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2.. \\ 0, & k < 0 \end{cases}$

Solution By taking the z transform of the given difference equation,

$$2X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Solving this last equation for $X(z)$, we obtain

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\,\frac{1}{2-2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{z^3}{(z-1)(2z^2-2z+1)}$$

Expanding $X(z)$ into partial fractions, we get

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z^2+z}{2z^2-2z+1} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-1+z^{-1}}{2-2z^{-1}+z^{-2}}$$

Notice that the two poles involved in the quadratic term in this last equation are complex conjugates. Hence, we rewrite $X(z)$ as follows:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2}\,\frac{1-0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} + \frac{1}{2}\,\frac{0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

By referring to the formulas for the z transforms of damped cosine and damped sine functions, we identify $e^{-2aT} = 0.5$ and $\cos \omega T = 1/\sqrt{2}$ for this problem. Hence, we get $\omega T = \pi/4$, $\sin \omega T = 1/\sqrt{2}$, and $e^{-aT} = 1/\sqrt{2}$. Then the inverse z transform of $X(z)$ can be written as

$$\begin{aligned} x(k) &= 1 - \tfrac{1}{2}e^{-akT}\cos \omega kT + \tfrac{1}{2}e^{-akT}\sin \omega kT \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cos\frac{k\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \sin\frac{k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

from which we obtain

$$x(0) = 0.5$$
$$x(1) = 1$$

Questão 7 (Q1 P1 2009)

Resolver a equação de diferenças pelo método da transformada Z e analisar a estabilidade do sistema discreto correspondente:

y[k+2]-2y[k+1]+y[k]=2u[k]

Onde u[k] é uma rampa unitária , y[0]=1 e y[1]=0;

$$z^2 Y - z^2 - 2zY + 2z + Y = \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Y(z) = \frac{z(z^3 - 4z^2 + 5z)}{(z-1)^4} = \frac{z(z-1)^3}{(z-1)^4} - \frac{\cancel{z}(z-1)^2}{(z-1)^4} + \frac{2z}{(z-1)^4}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{\cancel{z}}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)^4} *$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$y(k) = 1(k) - K.1(k) + \frac{K(K-1)(K-2)}{3} = \underline{\left(1 - K + \frac{K(K-1)(K-2)}{3}\right).1(t)}$$

$$* = \frac{2z^{-3}}{(1-z^{-1})^4} \xrightarrow[(26)\,\text{OGATA}]{\text{inversa}} 2\frac{K(K-1)(K-2)}{3!}$$

K=0 y[0]=1

K=1 y[1]=0

K=2 y[2]=-1

K=3 y[3]=0

K=4 y[4]=5

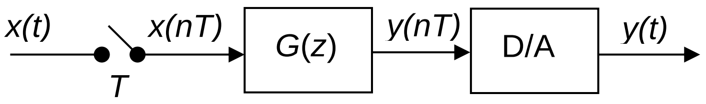
y[5]=16

y[6]=35

pólos: $\underline{z=1 \Rightarrow \text{instável}}$

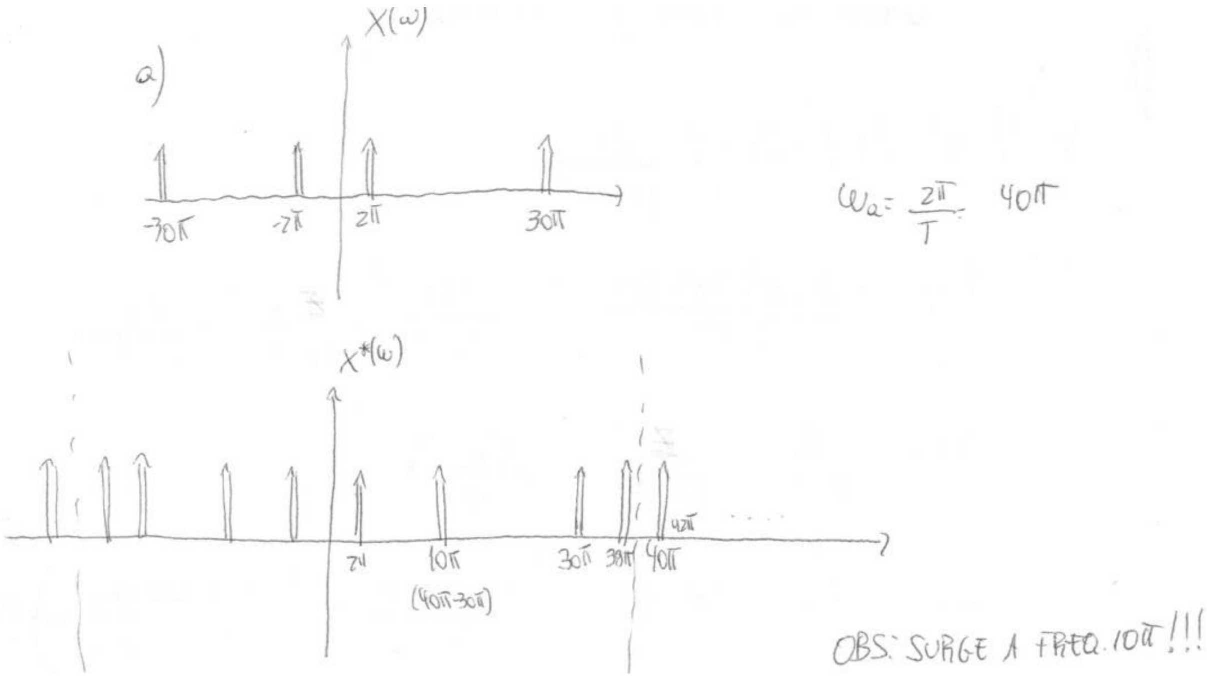
Questão 8 (Q2 P1 2009)

Dado o sistema esquematizado abaixo, onde T = 0,05s. Pede-se:



a) Se $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(30\pi t)$ e $G(z) = 1$, faça um esboço das funções no tempo e dos espectros de freqüências de $x(t)$, $y(nT)$

b) Se o objetivo do sistema será trabalhar com as componentes de freqüência do sinal original de até 10Hz, um filtro G(z) passa baixa ideal com freqüência de corte de 12Hz resolverá o problema? Justifique. Caso não resolva, qual a solução proposta ?



b) Filtrando-se o sinal de forma discreta (após amostragem) não resolve o problema, pois a componente de 10Hz que surgiu da amostragem será mantida.

O sinal deve ser filtrado antes da amostragem (filtro analógico).

Questão 9 (Q3 P1 2009)

Dado sistema em tempo contínuo representado pela sua função de transferência abaixo:

$$G(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+2)}.$$

Pede-se:

a) Ache a função de transferência do sistema em tempo discreto para um período de amostragem de 0.1s.

b) Obtenha uma fórmula fechada para a seqüência de saída do sistema $y(nT)$ para uma entrada na forma de impulso. Além disso, liste a seqüência de saída para n = 2, 3 e 4.

c) Obtenha a equação de diferenças equivalente a $G(z)$. Confirme a sua resposta da parte (b) usando esta equação de diferenças para calcular a resposta a impulso para os valores de n acima.

a) $G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right\}$

$$\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right) = \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)\right) = \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right)\right) = \frac{2}{1-e^{-T}z^{-1}} - \frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{2(z-1)}{z(1-e^{-T}z^{-1})} - \frac{2(z-1)}{z(1-e^{-2T}z^{-1})} = \frac{0,1722(z-1)}{z^2 - 1,7235 + 0,7408}$$

CONT
Zero = 0
polos = -1 ; -2

Discreto
$e^{-0 \cdot T} = 1$ ✓
$e^{-0,1} = 0,9048$ ✓
$e^{-0,2} = 0,8187$ ✓

b) $$G(z) = \frac{0,1722(z-1)}{z^2 - 1,7235z + 0,7408} = \frac{0,1722(z-1)}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

$$= \frac{A}{(z-e^{-T})} + \frac{B}{(z-e^{-2T})} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -0,1903 \\ B = 0,3625 \end{array}$$

$$\Rightarrow G(z) \cdot z = -\frac{0,1903}{1-e^{-T} \cdot z^{-1}} + \frac{0,3625}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Z^{-1}(G(z) \cdot z) = -0,1903 \cdot e^{-kT} + 0,3625 \cdot e^{-2kT}$$

mas supondo $y(0) = 0$

$$Z^{-1}(G(z)z) = y(k+1) \Rightarrow y(k) = -0,1903 e^{-(k-1) \cdot T} + 0,3625 e^{-2(k-1)T}$$

$k=0 \Rightarrow y(0)=0$
$k=1 \Rightarrow y(1) = 0,1722$
$k=2 \Rightarrow y(2) = 0,12459$
$y(3) = 0,08718$
$y(4) = 0,05796$

c) $G(z) = \dfrac{0,1722(z^{-1} - z^{-2})}{1 - 1,7235 z^{-1} + 0,7408 z^{-2}}$

$Y(z) - 1,7235 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + 0,7408 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) = -0,1722 \cdot z^{-2} \cdot U(z) + 0,1722 \cdot z^{-1} U(z)$

com $U(z) = 1$ (impulso)

$y(k) - 1,7235 \cdot y(k-1) + 0,7408 \cdot y(k-2) = -0,1722 \cdot \delta(k-2) + 0,1722 \cdot \delta(k-1)$

↓

$k=0 \rightarrow y(0) = 0$

$k=1 \rightarrow y(1) = 0,1722$

$k=2 \rightarrow y(2) = 0,12479$

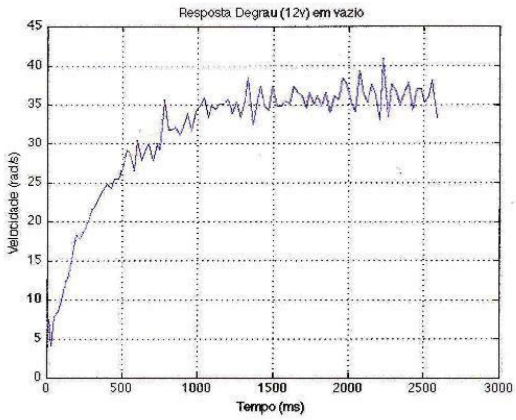
$k=3 \rightarrow y(3) = 0,08718$

⋮

Questão 10 (Q1 P1 2012)

Esta questão versa sobre o projeto de um sistema de controle digital para um moto-redutor DC de 12V, dotado de um encoder. A figura (a) abaixo ilustra o motor com uma roda montada em seu eixo. A figura (b) contém o resultado do ensaio de entrada em degrau (12V) aplicado em t=0s. A velocidade foi obtida a partir de um sistema de aquisição desenvolvido com Arduino[1].

(a)



(b)

a) (Valor 0,5) Obtenha a função de transferência $\frac{\Theta(s)}{V(s)}$, sendo $\Theta(s)$ o ângulo (em rad) do eixo de saída do moto-redutor e $V(s)$ a tensão aplicada. Justifique todos os passos e hipóteses.

A partir deste item, independentemente de ter ou não resolvido o item (a), assuma $\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{2,9}{s(0,3s+1)}$

b) (Valor 1,5) Projete um controlador PD da forma $K_P(1 + T_D s)$ considerando o tempo de amostragem de T=50ms e que o sistema deverá possuir, em malha fechada, tempo de estabilização 2% menor que 0,5s e sobressinal menor que 10%. Considere, desde a fase inicial de projeto, o atraso introduzido pelo ZOH. Dica: Utilize o diagrama de polos e zeros e a técnica de lugar das raízes, notando que o controlador apenas introduz um zero ao sistema em malha aberta.

c) (Valor 1,5) Obtenha o controlador PD digitalizado, na forma de transformada z e na forma de equação de diferenças, considerando-se:

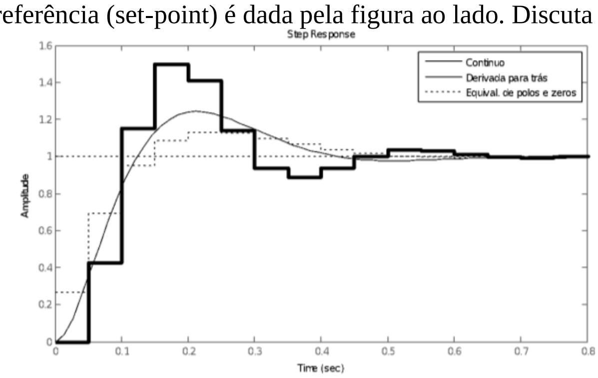
c1) Equivalência de polos e zeros

[1] Este resultado foi obtido pelos alunos Arthur Melani, Fábio Andrade, Henrique Lisboa, Jefferson Freitas, Luiz Santos, Rodrigo Carnier e Thiago Pereira, no PI7 de 2011.

c2) Regra de derivação para trás ($s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$)

Qual das técnicas é fisicamente implementável? Justifique.

d) (Valor 0,5) Considerando-se que você tenha feito os itens (b) e (c) corretamente, a resposta do servo-motor a uma entrada em degrau na referência (set-point) é dada pela figura ao lado. Discuta os gráficos observados.



a) $\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{2,9}{(0,3s+1)}$ Ω: vel. rotação (rad/s)

V: tensão armadura (V)

pois $K \cong \frac{35 \text{ rad/s}}{12V} = 2,9 \text{ rad/s/V}$

$\Omega(\tau) = 0,632 \cdot 35 = 22,2 \text{ rad/s}$

$\Rightarrow \tau \cong 300 \text{ms}$

$\Rightarrow \frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{2,9}{(0,3s+1) \cdot s}$ pois $\theta(s) = \frac{\Omega(s)}{s}$ (integração)

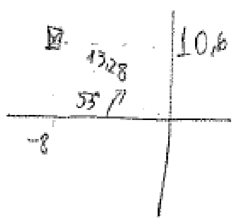
b) $t_s = 0,5s$ $\Rightarrow$ $\frac{4}{\zeta \omega_n} = 0,5 \Rightarrow \zeta \omega_n = \sigma = 8$

$M_p \leq 10\%$

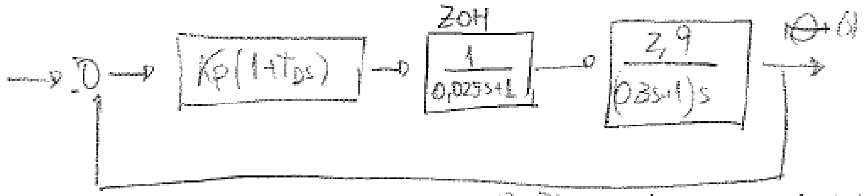
$\exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0,1 \Rightarrow \zeta = 0,6$

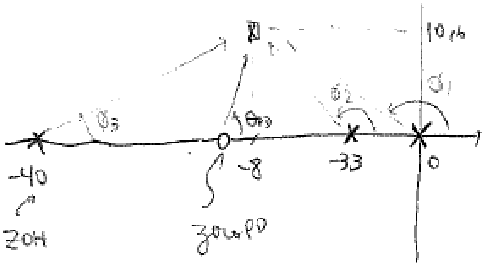
polos desejado

$-8 \pm 10,6j$



Projeto controle PD, considerando $t_s = 50ms$





COND. FASE

$\phi_1 = 127°$

$\phi_2 = 114°$

$\phi_3 = 18°$

$-259° \Rightarrow 79° = \theta_{PD}$

$\Rightarrow$ zero PD $= -10$

$\boxed{PD = K_p.(1+0{,}1s)}$

COND MODULO

$K_p \left| (1+0{,}1s) \cdot \left(\frac{1}{0{,}025s+1}\right) \cdot \left(\frac{2{,}9}{(0{,}3s+1)s}\right) \right| = 1$

$\Downarrow$

$\boxed{K_p = 12{,}4}$

c) $G_c(s) = PD = \frac{V(s)}{E(s)} = 12{,}4(1+0{,}1s)$

· equivalência polos e zeros $\Rightarrow$ zero $= -10 \xrightarrow{z=e^{sT}} 0{,}606$ (s → z)

$G_c(z) = K_z \left(\frac{z}{0{,}606} - 1\right)$

$G_c(z)\big|_{z=1} = G_c(s)\big|_{s=0} \Rightarrow 0{,}65 K_z = 12{,}4$

$K_z = 19{,}1$.

$\Rightarrow \boxed{G_c(z) = 31{,}5z - 19{,}1}$

Escrevendo em termos de eq. de diferenças:

$\frac{V(z)}{E(z)} = 31{,}5z - 19{,}1 \Rightarrow \boxed{v(k) = 31{,}5\, e(k+1) - 19{,}1\, e(k)}$

impossível pois $v(k)$ depende de $e(k+1)$

Solução: equivalente discreto de $G_c(s)$ usando derivação para trás

$$s \sim \frac{z-1}{Tz} \Rightarrow G_c(z) = 12,4 \cdot \left(1 + 0,1 \cdot \frac{z-1}{0,05z}\right)$$

$$G_c(z) = 12,4 \cdot \left(\frac{z+2z-2}{z}\right) = 12,4 \cdot \left(\frac{3z-2}{z}\right)$$

$$G_c(z) = 12,4 \cdot \left(\frac{3-2z^{-1}}{1}\right) = \frac{V(z)}{E(z)}$$

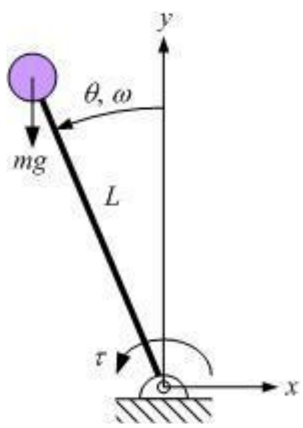
$$\Rightarrow \boxed{v(k) = 37,2 \cdot e(k) - 24,8 \cdot e(k-1)}$$

causal pois $v(k)$ só depende de $e(k)$ e $e(k-1)$

d) Pode-se ver a distorção da resposta devido à digitalização (derivada para trás) o que era esperado pois a frequência de amostragem (125 rad/s) é aproximadamente 9 vezes maior que BW, não seguindo a recomendação de ws = 20Bw. Com a equivalência de polos e zeros a resposta ficaria boa, mas implicaria que o controle deveria prever o erro adiante no tempo.

Questão 11 (Q2 P1 2012)

Uma das técnicas de estabilização de um pêndulo invertido (e que pode se generalizar para outros sistemas que em malha aberta são instáveis) é através do controle proporcional.



Considerando m=1kg, L=0.2m; g=10m/s^2; c=1N.m/rad/s, a função de transferência que relaciona o ângulo do pêndulo ao torque aplicado em sua base é dada por $\frac{\Theta(s)}{\tau(s)} = \frac{25}{(s-1.86)(s+26.9)}$.

Mostre que realizando um controle proporcional $\tau(s) = -4.\Theta(s)$, o sistema será estável se o tempo de amostragem do sistema de controle for 0.5s, porém instável se o tempo de amostragem for 1.0s.

DICA: faça a malha de controle e digitalize-a.

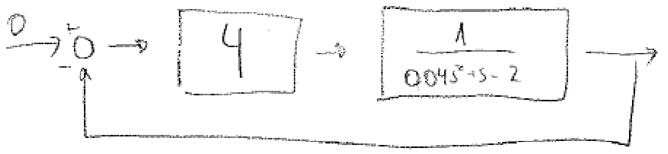
2) $mL^2\ddot{\theta} = -c\cdot\dot{\theta} + mgl\sin\theta + \tau$

$\theta \approx \sin\theta$

$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgl\sin\theta = \tau$

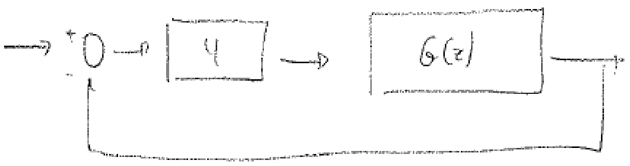
$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgl} = \frac{1}{0{,}04s^2+s-2} = \frac{25}{(s-1{,}86)(s+26{,}9)}$$

$\tau(s) = -2mgl\theta = -4\theta$



contínua

discreto



$$G(z) = \frac{z-1}{z}\cdot \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right\}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{25}{s(s-1{,}86)(s+26{,}9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1{,}86} + \frac{C}{s+26{,}9} = \frac{-0{,}5}{s} + \frac{0{,}46}{s-1{,}86} + \frac{0{,}03}{s+26{,}9}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{z-1}{z}\cdot\left\{\frac{-0{,}5}{1-z^{-1}} + \frac{0{,}46}{1-e^{1{,}86T}z^{-1}} + \frac{0{,}03}{1-e^{-26{,}9T}\cdot z^{-1}}\right\}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\cdot\left\{\frac{-0{,}5z}{z-1} + \frac{0{,}46z}{z-e^{+1{,}86T}} + \frac{0{,}03z}{z-e^{-26{,}9T}}\right\}$$

$T=0{,}5$: $G(z) = \dfrac{0{,}68z+0{,}08}{z^2-2{,}5z}$

$T=1{,}0$: $G(z) = \dfrac{2{,}51z+0{,}21}{z^2-6{,}4z}$

Em malha fechada:

$$G_{MF} = \frac{4G}{1+4G}$$

$$T = 0{,}3s: \quad \frac{2{,}74z + 0{,}33}{z^2 + 0{,}217z + 0{,}33}$$

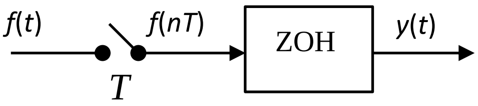
$$\text{polos: } -0{,}1 \pm 0{,}56j$$

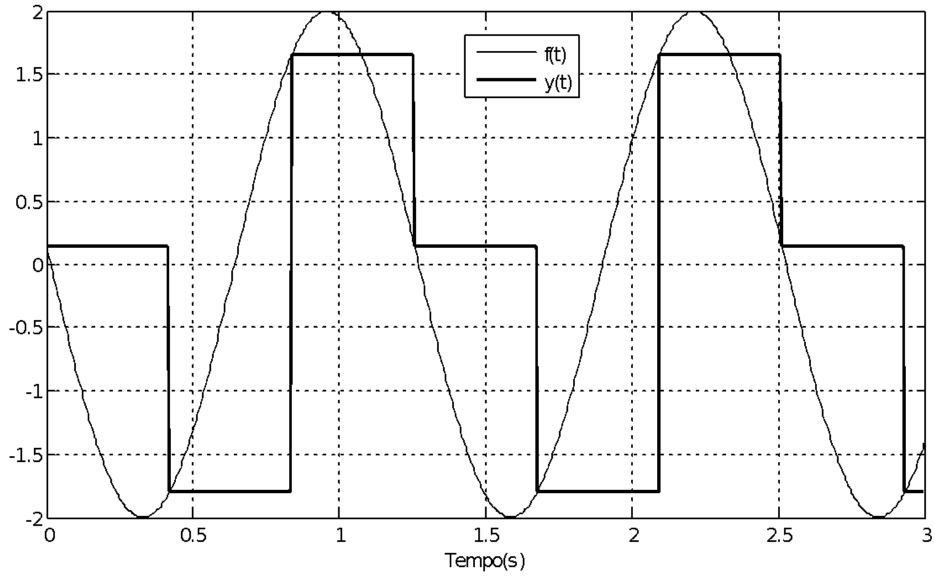
$$|\text{polos}| = 0{,}57 < 1 \Rightarrow \underline{\text{ESTÁVEL}}$$

$$T = 1{,}0s = \frac{10z + 0{,}83}{z^2 + 3{,}6z + 0{,}83}$$

$$\text{polos} = \begin{matrix} -3{,}35 \rightarrow |-3{,}35| > 1 \Rightarrow \\ -0{,}24 \end{matrix} \quad \underline{\text{INSTÁVEL}}$$

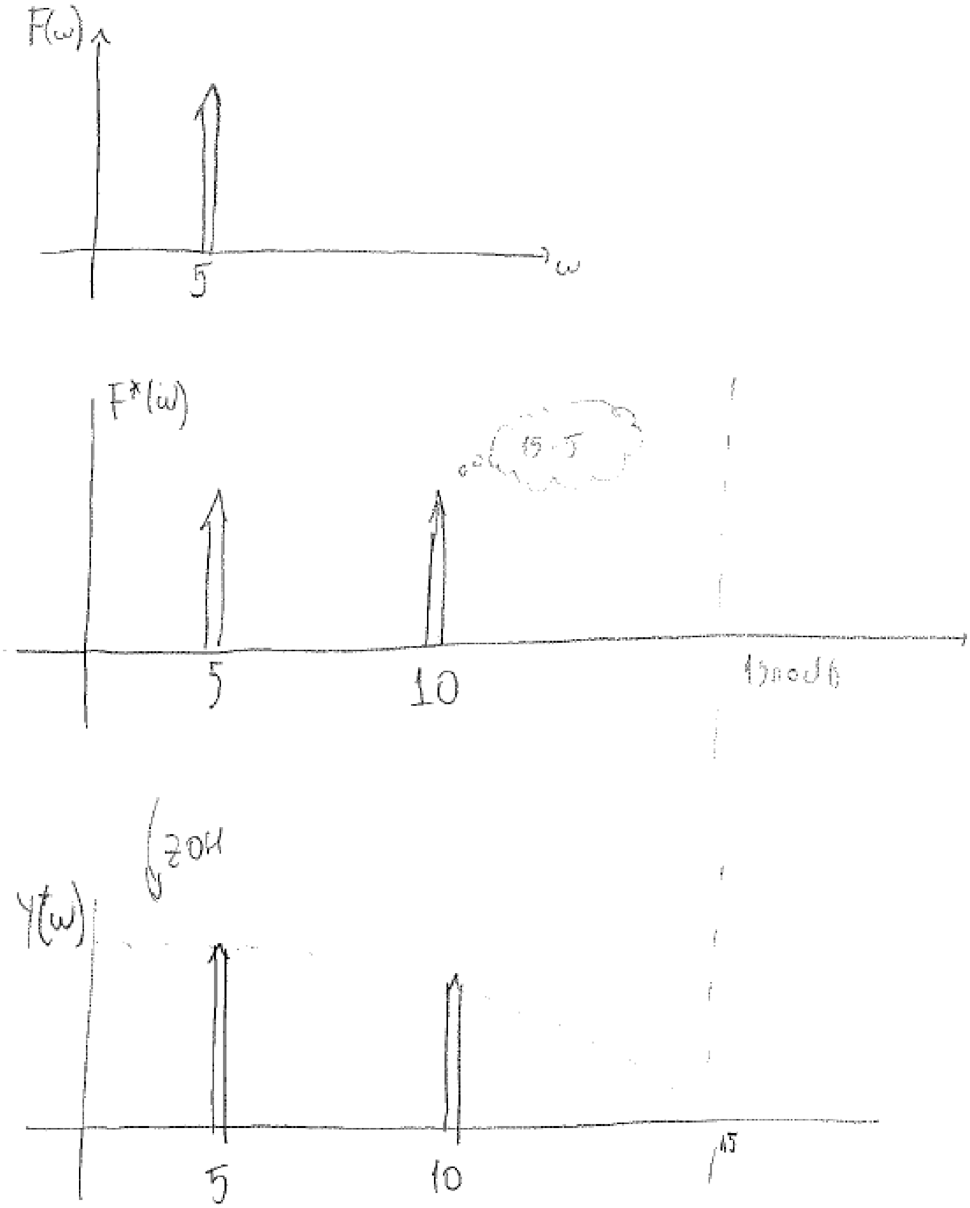
Questão 12: (Q3 P1 2012) O sinal *f*(*t*)=2cos(5*t*) é amostrado com freqüência de 15 rad/s e enviado através de um reconstrutor de ordem zero, como mostra a figura abaixo.



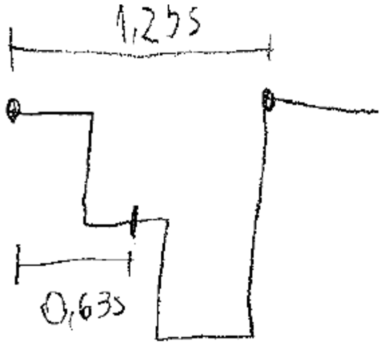


Desenhe esquematicamente o espectro dos sinais f(t) e *y*(*t*) e explique o significado de cada componentes utilizando os sinais no tempo dados acima.

3)

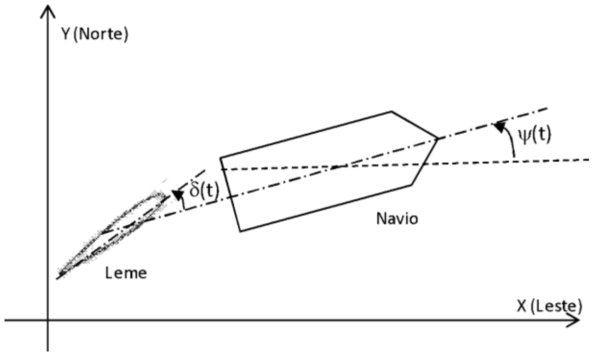


Observa-se que a componente de 10 rad/s está ainda fortemente presente no sinal y(t), responsável pelas oscilações no período 0.63s que se sobrepõem às oscilações em 1.25s que são as principais.

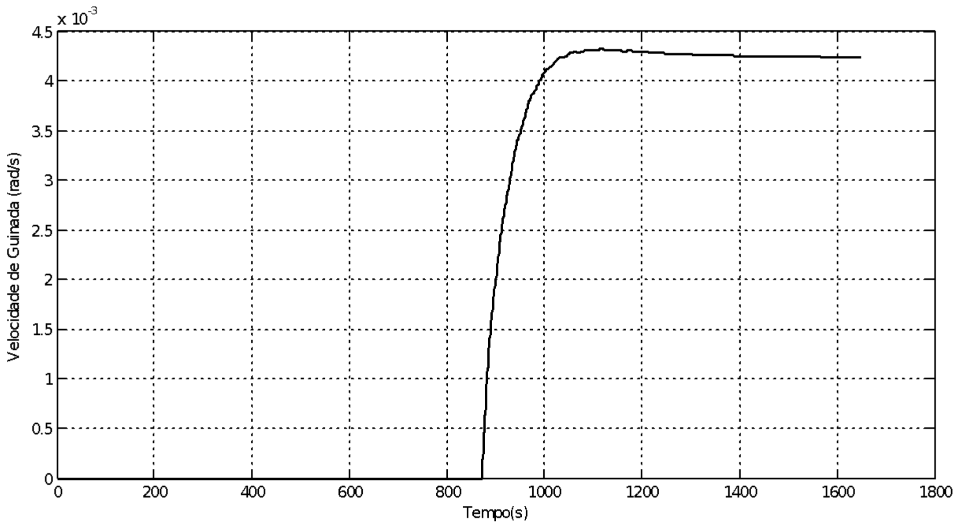


Questão 14 (Q1 P1 2013)

Esta questão versa sobre o projeto de um sistema de controle digital para um piloto automático de navio conteineiro. O sistema controla o aproamento (ψ) do navio através do comando de ângulo de leme (δ). A figura abaixo mostra as variáveis do problema.



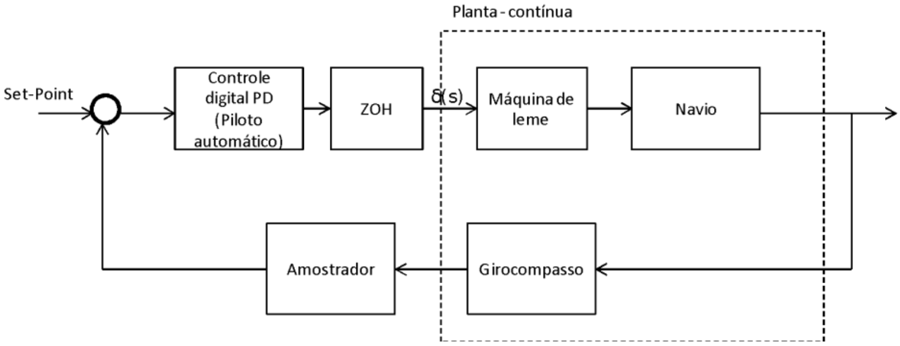
a) (1,0) Um modelo simplificado para o projeto de controle é dado por $\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$. Os parâmetros K (ganho) e T (constante de tempo) logicamente dependem da velocidade de cruzeiro e de outras variáveis, mas serão assumidos constantes na presente abordagem linear de projeto de controle. Fez-se uma prova de mar na qual o navio avançava a 10 nós (aproximadamente 5m/s) e em um instante definido (870s) aplicou-se 5º de leme (0,087rad). A figura abaixo mostra a evolução temporal da velocidade de guinada ($\dot{\psi}$). A partir desta curva, identifique os parâmetros K e T, justificando os cálculos.



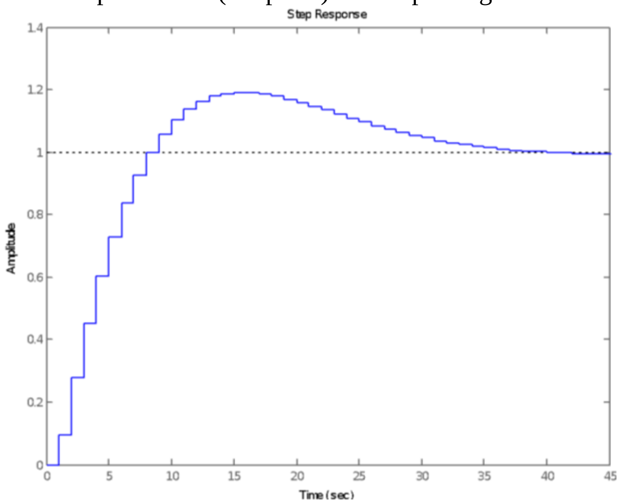
A partir deste item, independentemente de ter ou não resolvido o item (a), assuma $\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{0,05}{s(47s+1)}$

b) (Valor 1,5) Projete um controlador PD da forma $K_P(1 + T_D s)$ considerando o tempo de amostragem de t_s= 1 seg e que o sistema deverá possuir, em malha fechada, tempo de estabilização 2% menor que 40s e sobressinal menor que 10%. Considere, desde a fase inicial de projeto, o atraso introduzido pelo ZOH. Mostre, no espaço analógico s, que seu projeto está correto, através da verificação da posição dos polos em malha fechada.

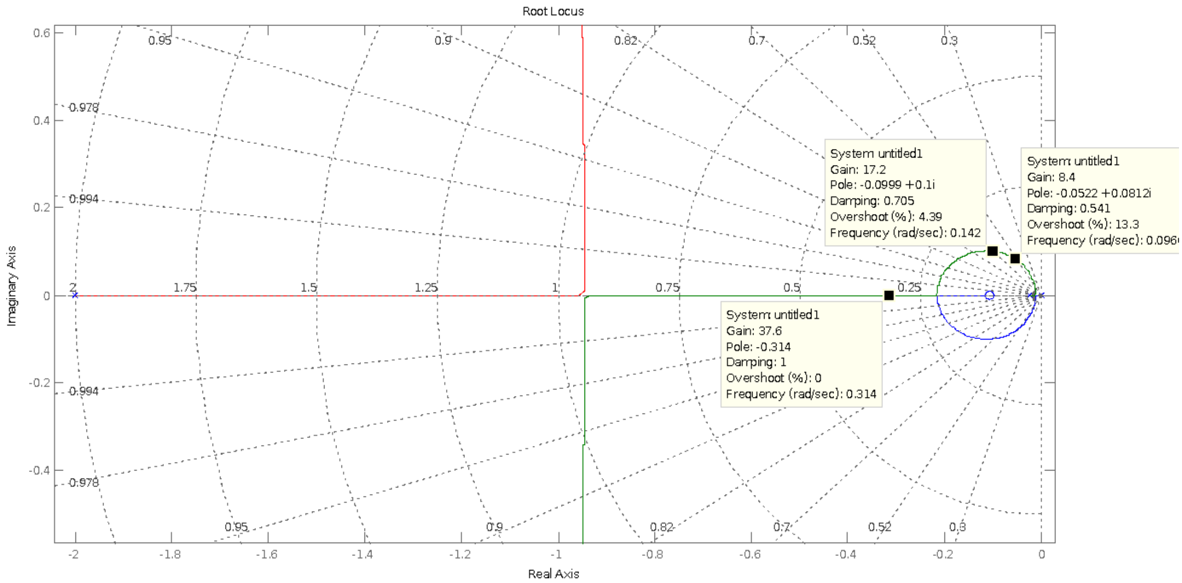
c) (Valor 1,0) Obtenha o controlador PD digitalizado, na forma de transformada z e na forma de equação de diferenças, considerando-se a regra de derivação para trás ($s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$). A malha de controle digital é dada abaixo:



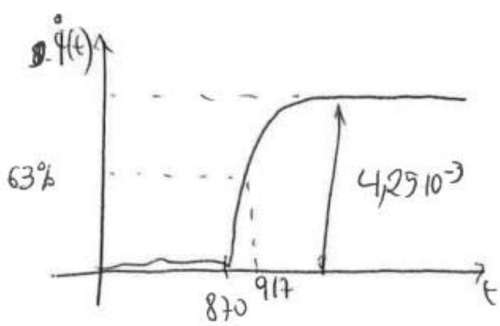
d) (Valor 1,5) Considerando-se que você tenha feito os itens (b) e (c) corretamente, a resposta do navio a uma entrada em degrau na referência de aproamento (set-point) é dada pela figura abaixo.



Sabe-se que em velocidades de avanço maiores (15 a 20 nós) o leme é mais eficiente, pois o jato de água induzido pelo propulsor sobre o leme é mais intenso. Ao contrário, em velocidades menores (5 nós) o leme é menos eficiente. Isto equivale a um maior ou menos ganho da planta K para velocidades de navegação maiores ou menores respectivamente. Abaixo apresenta-se o diagrama de lugar das raízes para o controlador projetado, a fim de auxiliá-lo na resposta. Esboce o comportamento da resposta a degrau caso o mesmo controlador PD (projetado para navegação a 10 nós) seja utilizado para controlar o aproamento do navio quando navegando a 20 nós (considere que o ganho K dobra nesta velocidade) ou a 5 nós (considere que o ganho K é reduzido a metade nesta situação). Justifique e embase teoricamente sua resposta.



1 a)



$$\frac{K}{Ts+1} = \frac{s\cdot\psi(s)}{\delta(s)}$$ ← vel. guinada

T = cte de tempo = 917 − 870 = 47 seg

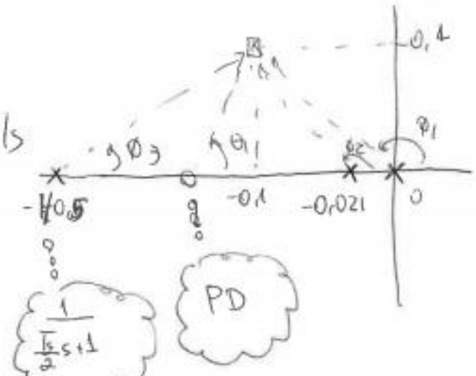
$K = \frac{4{,}25\cdot 10^{-3}}{0{,}087} = 0{,}05$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{0{,}05}{s(47s+1)}}$$

b) polos desejados

$\xi = 0{,}7$

$\frac{4}{\xi\omega_n} = 40 \Rightarrow \omega_n = 0{,}142$ rad/s



$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \theta_1 = -180$

$\Rightarrow \theta_1 = 86° \Rightarrow$ PD: $K_p(9{,}347s+1)$

$\Rightarrow \boxed{\text{PD}: 17{,}2(9{,}347s+1)}$

$$\left| K_p\cdot(9{,}34s+1)\frac{0{,}05}{s(47s+1)}\cdot\frac{1}{0{,}55s+1}\right|_{s=-0{,}1+0{,}1j} = 1 \Rightarrow K_p = 17{,}2$$

Verificação: polos em MF: pol. característico)

$$s(47s+1)(0{,}55s+1) + 0{,}86(9{,}347s+1) = 0$$

$$\Rightarrow s = \begin{cases} -0{,}1 \pm 0{,}1j \ \checkmark \\ -1{,}82 \leftarrow \text{NÃO DOMINANTE!} \end{cases}$$

OK

c) $PD = 17{,}2(9{,}35s+1)$ $\quad s \rightarrow \frac{z-1}{z}$

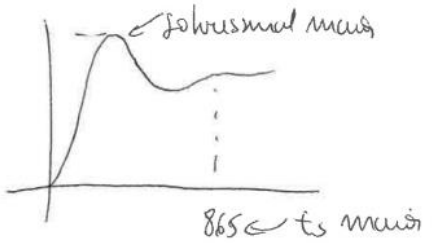
$$PD(z) = \frac{178z - 161}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(z)}{E(z)} = \frac{178.z - 161}{z} = 178 - 161\,z^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(k) = 178.E(k) - 161.E(k-1)} \quad \text{com } E(k) = \psi_{SP}(k) - \psi(k)$$

d) O aumento ou diminuição de K equivale a aumentar ou diminuir K´, pois ambos se multiplicam na função de malha aberta:

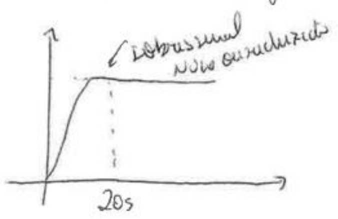
Loga, para v = 5 nós, teremos um ganho de metade, considerando aproximadamente 8 pelo gráfico. Logo $\xi = 0.54$



$$t_s = \frac{4}{0{,}5.0{,}096} = 83s$$

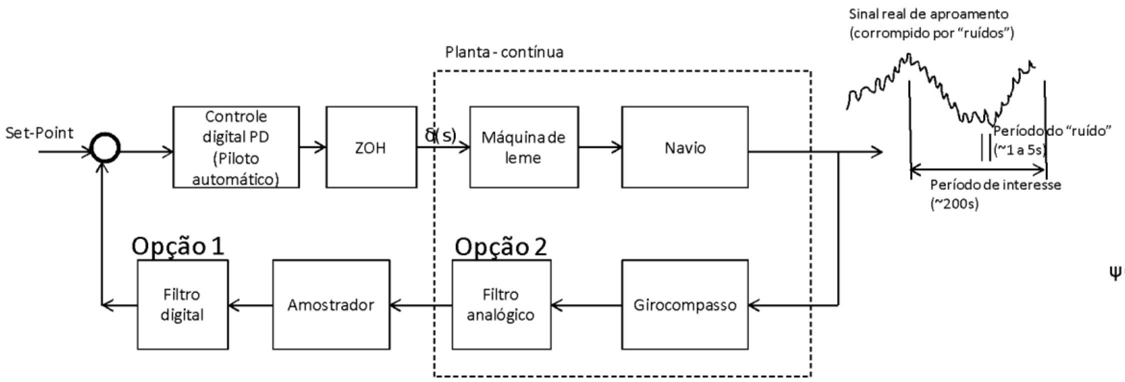
P/ v = 20nós, $K \cong 2\,K_{original} = 37{,}6$ $\Rightarrow$ 2 polos reais (sem sobressinal.

$t_s = \frac{6}{\xi \omega_n}$ ← lembrar $\cong 20s$



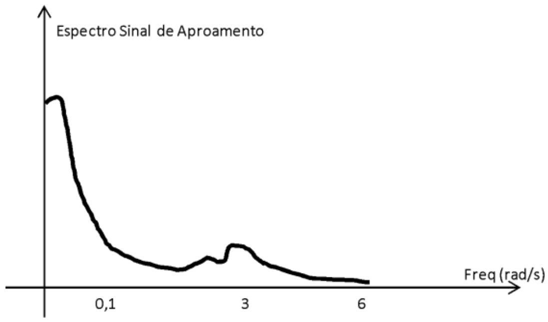
Questão 15 (Q2 P1 2013)

O navio é sujeito a distúrbios externos, que acabam por induzir movimentos de alta frequência (da ordem de 1s a 5s de período - sim!, isto é alta frequência para um navio!) que devem ser eliminados (filtrados) antes de serem enviados ao controlador digital. A figura abaixo ilustra o sinal efetivamente medido pelo girocompasso.



Considerando-se que o sistema computacional utilizado possui tempo de amostragem de 1seg, qual das opções de filtro deve ser utilizada (opção 1 - filtro digital, ou opção 2 - filtro analógico)?

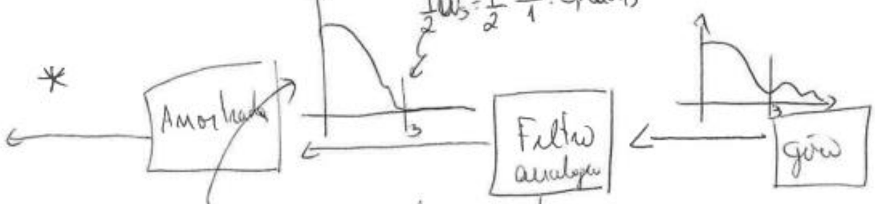
Para responder esta questão, explique como será o espectro do sinal de erro (que efetivamente é a entrada do controlador) para os dois casos, considerando-se o formato do espectro do sinal medido (aproamento) dado abaixo).



2) Opção 2 - filtro analógico

$\frac{1}{2}\omega_s = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{1} \approx 3{,}14$ rad/s

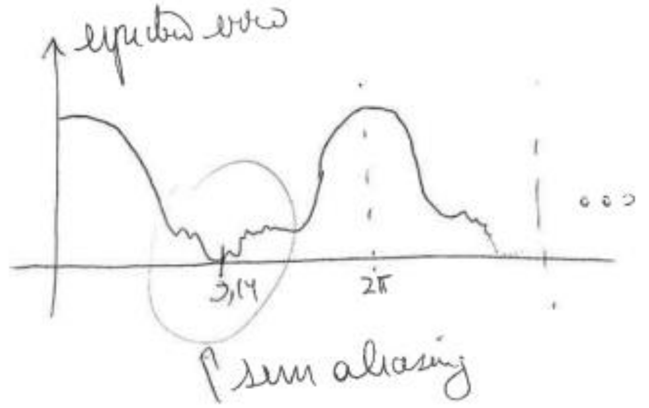
*



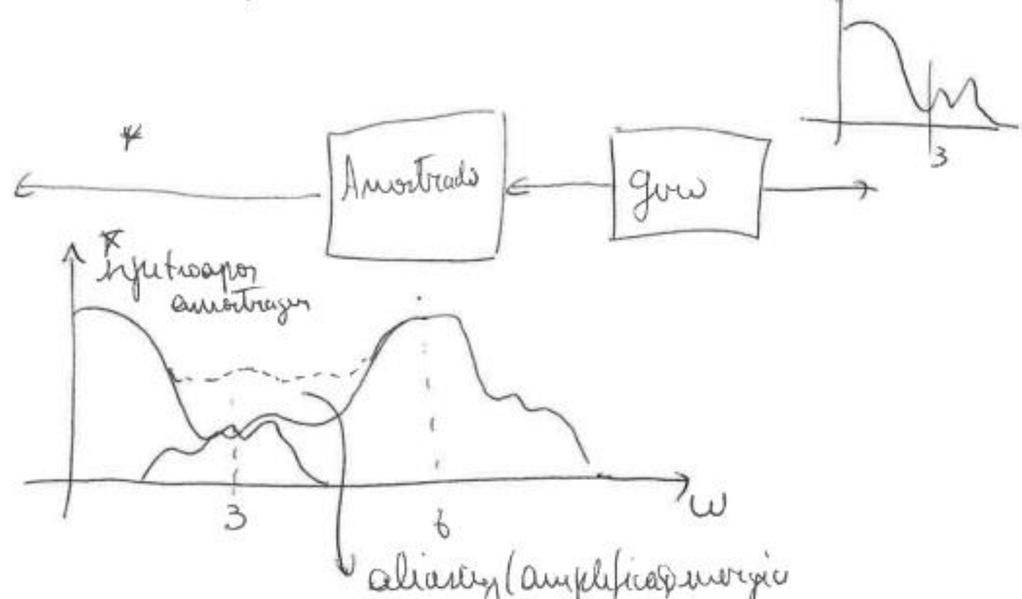
entra o espectro antes do amostrador

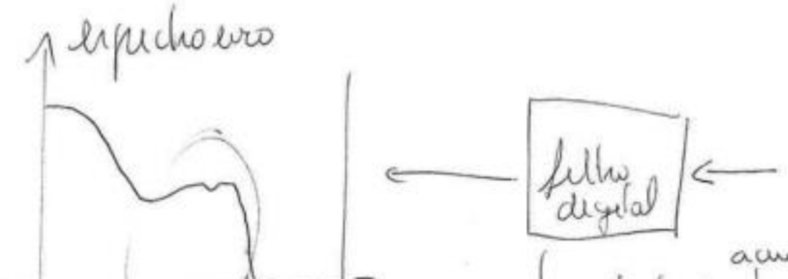
bem projetado (corta tudo ~~abaixo~~ acima da metade da freq. de amostragem;

*



Opção 1 → filtro digital





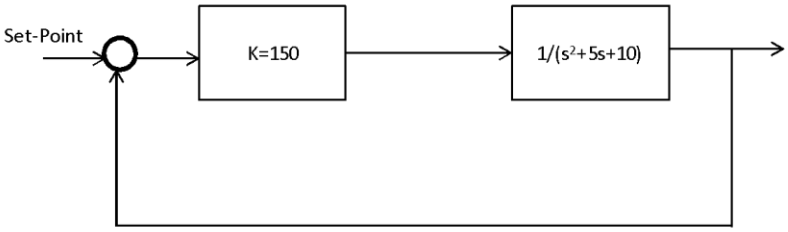
corta tudo ~~atraso~~ acima de metade da freq de amostragem

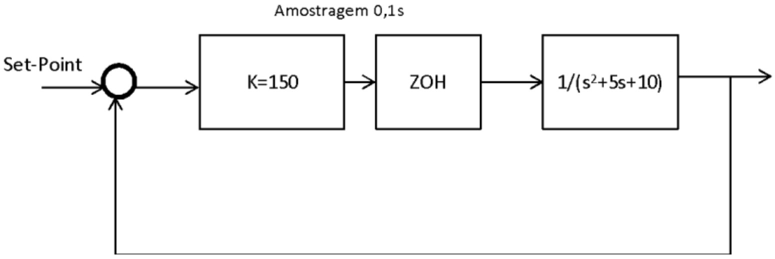
distorção induzida por aliasing

Logo, deve-se utilizar um filtro analógico. O filtro digital induzirá medidas nas proximidades de 3rad/s não condizentes com a realidade por aliasing.

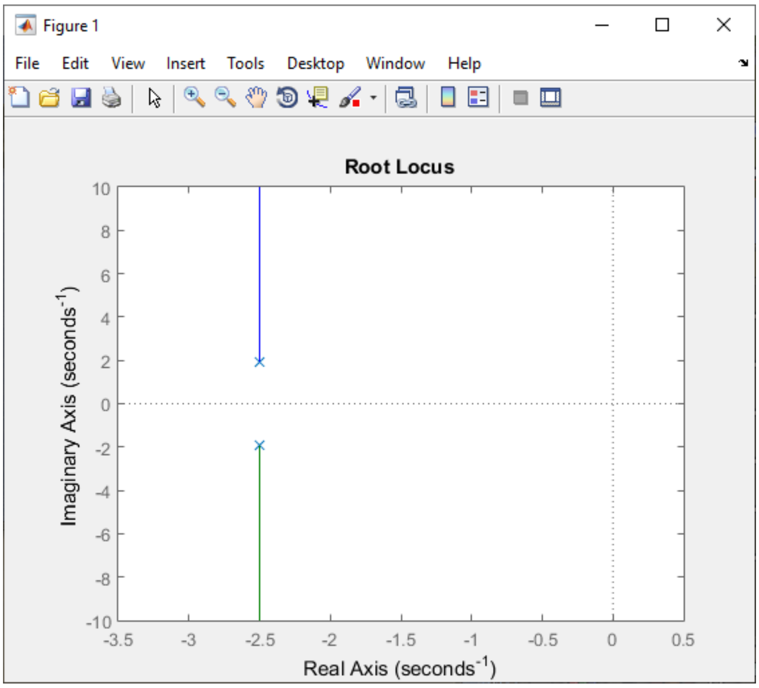
Questão 16 (Q3 P1 2013)

Calcule os polos (em s) do sistema contínuo em malha fechada abaixo e em seguida, já no espaço Z, obtenha os polos do sistema quando o controlador proporcional é amostrado a 0,1s. Analise a estabilidade do sistema contínuo e discreto.





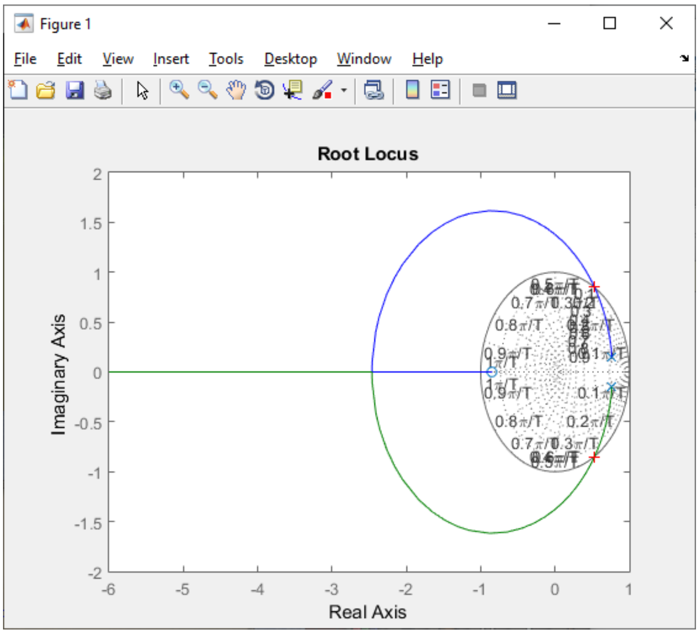
Sistema contínuo: Utilizar Rlocus e ver que é estável para todos os ganhos.



Sistema discreto:

Desenhar rlocus do sistema. Uma sugestão é utilizar o programa, extraído de Rakesh patel (2019). Root Locus design for Discrete time system (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28777-root-locus-design-for-discrete-time-system), MATLAB Central File Exchange. Retrieved December 17, 2019.:

```
% root locus design
% transfer function G(S)=K/s(s+2)
clear % clear workspace data
clc % clear command window
clf % clear figure window
G=150*tf([1],[1 5 10]);% enter transfer function
Ts= input ('Enter Sampling Time: ') % enter sampling rate
Gz=c2d(G,Ts);% convert in continuous time from discrete time
rlocus(Gz);% root locus command
zgrid % for Z grid
[k,p]=rlocfind(Gz)% find K value in root locus
```

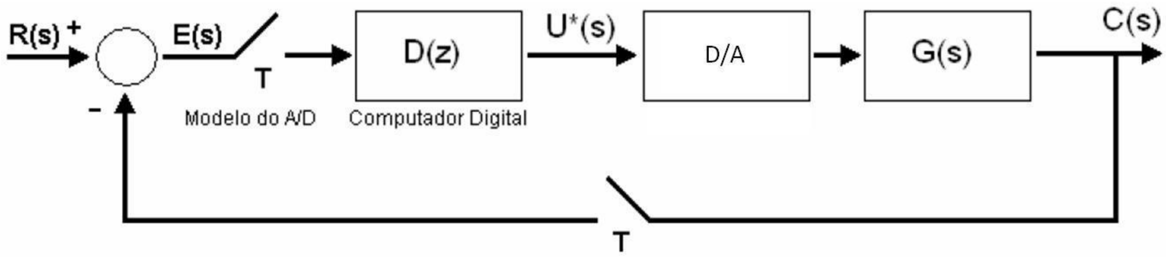


Resulta em k = 0.7383 para instabilidade.

Assim, o K=150 inicialmente proposto leva o sistema a instabilidade com Ts = 0.1s

Questão 17 (Q1 P1 2014)

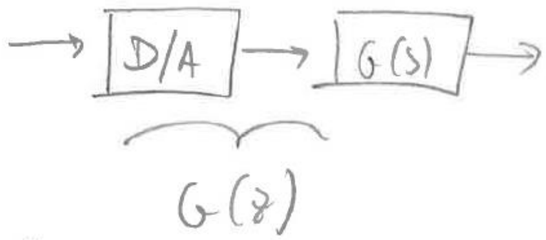
1) Para o diagrama da figura seguinte, determine:



a) A função de transferência C(z)/R(z) para o caso em que $G(s) = \frac{2}{s+2}$, $e^{-2T} = 0.5$ e sendo o algoritmo do computador u[k]=u[k-1]+4.e[k]

b) Usando a resposta do item a, esboce a resposta a um degrau unitário na referência. Indique no gráfico o tempo de assentamento, o tempo de oscilação, valor em regime e o sobressinal (caso exista).

a)



$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right\} = \frac{0,5}{z-0,5}$$ com $T = 0,346$ seg

$D(z) \Rightarrow$ $U(z) = z^{-1}.U(z) + 4.E(z)$

$$\Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{4z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G.D}{1+G.D} = \frac{2z}{z^2+0,5z+0,5}$$ //

5) polos em z → $(-2,5 \pm 6,6j)\cdot 10^{-1}$

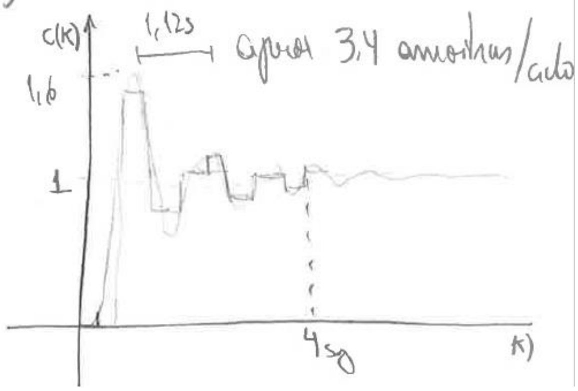
em s → $s = \frac{1}{T}\ln(z) = -1 \pm 5,5j \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 5,7\ rad/s \\ \zeta = 0,17 \\ \omega_d = 5,4\ rad/s \end{cases}$

1) valor final $\lim_{k\to\infty} c(k) = \lim_{z\to1} \frac{z-1}{z} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\text{degrau}} \cdot \frac{2z}{z^2+0,5z+0,5} = \frac{2}{1+1} = 1$

2) sobressinal → $M_p = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0,6$

3) $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \cong 4\ seg$

4) t oscilação $= \frac{2\pi}{\omega_d} = 1,12$ seg



Questão 18 (Q2 P1 2014)

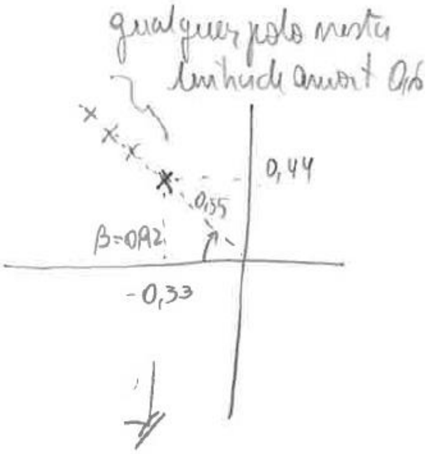
2) Usando o mesmo diagrama da questão 1, sendo $G(s) = \frac{1}{s^2+2s}$, o tempo de amostragem de 0,01seg, projete uma lógica de controle (já na forma de equações de diferença) que garanta sobressinal ao degrau unitário na referência menor que 10%, tempo de subida menor que 5seg e erro à rampa unitária inferior a 2%.

pólos dominantes

$M_p = 10\%$

$t_r = 5\ seg = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$ $\Bigg\} \Rightarrow$ $\zeta = 0,6$; $\omega_n \geq 0,55\ rad/s$

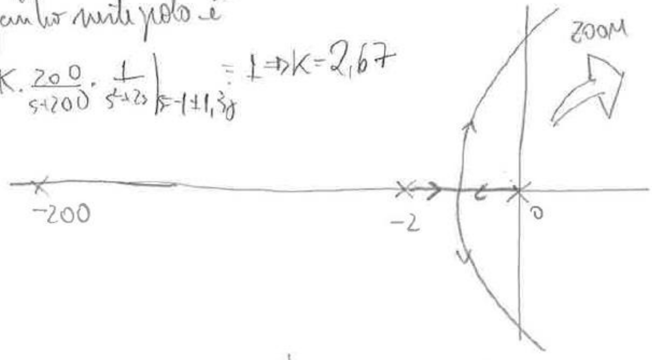
$e_{rampa} = 10\% \Rightarrow K_v = 10$ (desejado)

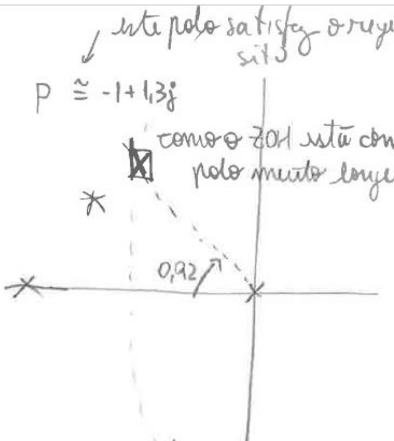


ZOH ⇒ $G_{ZOH} = \frac{200}{s+200}$

* pela cond. de modulo, o ganho neste polo é

$$\left| K \cdot \frac{200}{s+200} \cdot \frac{1}{s^2+2s} \right|_{s=-1\pm 1,3j} = 1 \Rightarrow K = 2,67$$

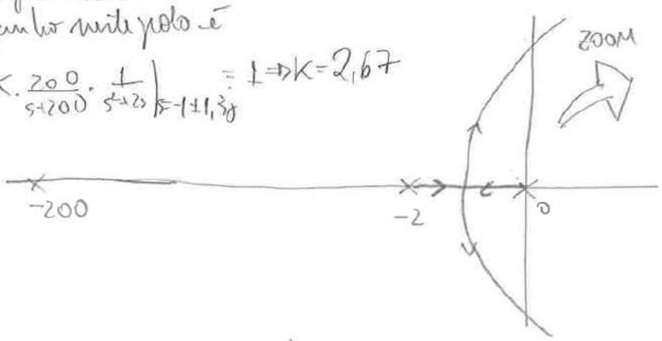
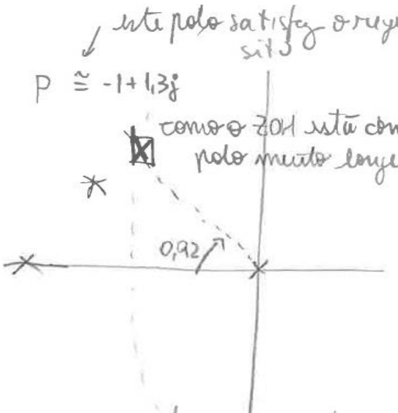




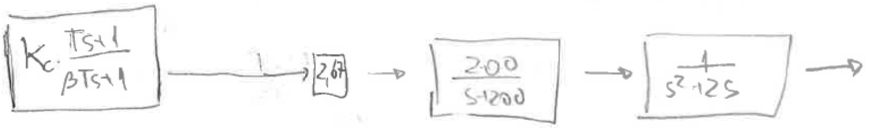
logo, devemos projetar um controlador apenas para aumentar o ganho, mas mantendo o polo no mesmo lugar ⇒ ATRASO.

* pela cond. de modulo, o ganho neste polo é

$$\left| K \cdot \frac{200}{s+200} \cdot \frac{1}{s^2+2s} \right|_{s=-1\pm 1,3j} = 1 \Rightarrow K = 2,67$$

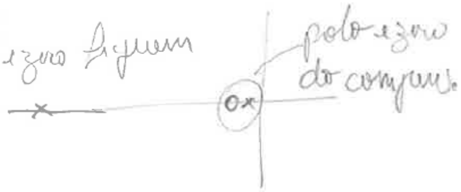



logo, devemos projetar um controlador apenas para aumentar o ganho, mas mantendo o polo no mesmo lugar ⇒ ATRASO.



$$K_v = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) = \frac{2,67}{2} = 1,33 \Rightarrow$$ devemos aumentar de 7,5 vezes ($K_c \beta = 7,5$)

lembre-se que T deve ser grande p/ que o polo e zero fiquem próximos; usamos T = 10.



$$\Rightarrow \boxed{G_c = 7,5 \, \frac{10s+1}{75s+1}}$$

digitalizando por metodo bilinear

$$G_c \times 2{,}67 = 20 \cdot \frac{10s+1}{75s+1} \Rightarrow G_c(z) = \frac{2{,}7 - 2{,}6z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

controll

$$\Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = G_c(z) \Rightarrow \quad u[k] - u[k-1] = 2{,}7\,e[k] - 2{,}6\,e[k-1]$$

$$\boxed{u[k] = u[k-1] + 2{,}7\,e[k] - 2{,}6\,e[k-1]}$$

Questão 19 (Q3 P1 2014)

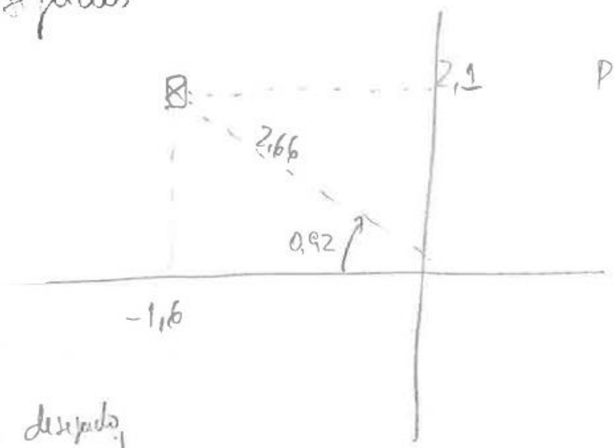
Usando o mesmo diagrama da questão 1, sendo $G(s) = \frac{1}{s^2+2s}$, o tempo de amostragem de 0,1seg, projete uma lógica de controle (já na forma de equações de diferença) que garanta sobressinal ao degrau unitário na referência menor que 10%, e tempo de estabilização de 2,5seg.

Polos desejados

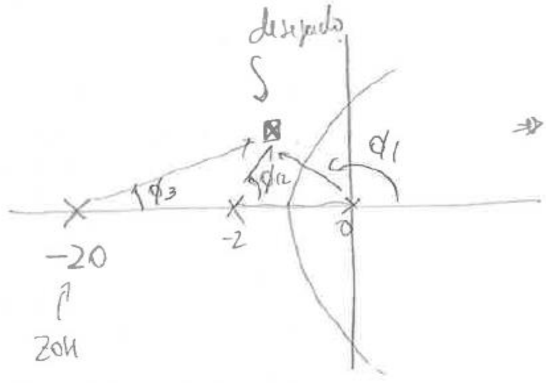
$\zeta = 0{,}6$

$\frac{4}{\zeta\omega_N} = 2{,}5$

$\omega_N = 2{,}66$



$p = -1{,}6 \pm 2{,}1j$



$\Rightarrow$ avanço

$\phi_1 = +128^\circ$

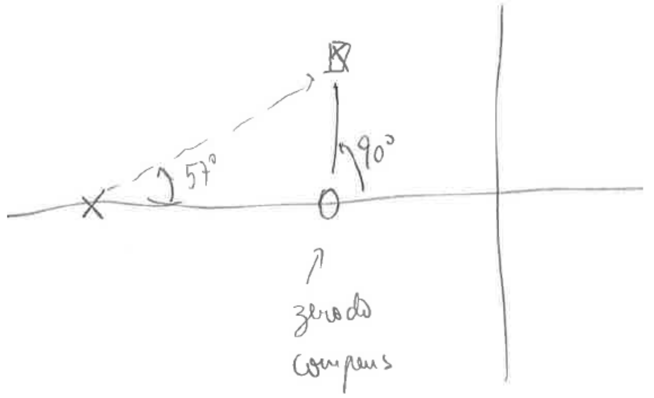
$\phi_2 = 79$

$\phi_3 = 6{,}5$

$213^\circ \Rightarrow$ avanço de 33°

$$G_c(s) = K.\ \frac{s/1{,}6 + 1}{s/p + 1}$$

... escolhi o zero sob o polo desejado



$\Rightarrow$ polo $= -3$

$$\left| K.\ \frac{s/1{,}6 + 1}{s/3 + 1} \cdot \frac{20}{s+20} \cdot \frac{1}{s^2+2s} \right|_{s=-1{,}6+2{,}1j} = 1$$

$\Rightarrow K = 3{,}35$

digitalizando por bilinear

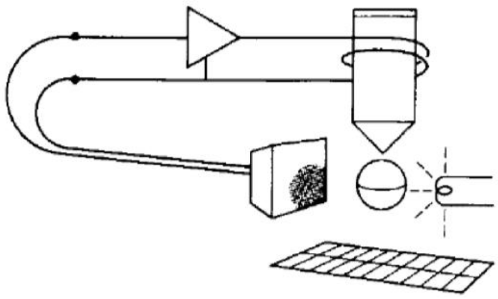
$T = 0{,}1s$

$$G_c(s) = 3{,}35\ \frac{s/1{,}6 + 1}{s/3 + 1} \Rightarrow G_c(z) = \frac{5{,}9 - 5z^{-1}}{1 - 0{,}74z^{-1}}$$

$$\boxed{u[k] = 0{,}74u[k-1] + 5{,}9e[k] - 5e[k-1]}$$

Questão 20 (Q1 P1 2015)

(adaptado de Franklin, Powell e Workman, 1997) É possível suspender uma esfera de aço por meio de eletromagnetismo, controlando-se a corrente em uma bobina indutora em função da posição da esfera, tal como mostrado na figura abaixo. A equação linearizada que define a dinâmica entre a corrente de controle $i(t)$ e a posição da esfera $x(t)$ é $m\ddot{x} = k_1 x + k_2 i$, sendo para um dado experimento, m=0,02kg, k_1=20N/m e k_2=0,4N/A.



a) Obtenha a função de transferência de i para x e desenhe o lugar das raízes para controle proporcional $i = -Kx$;

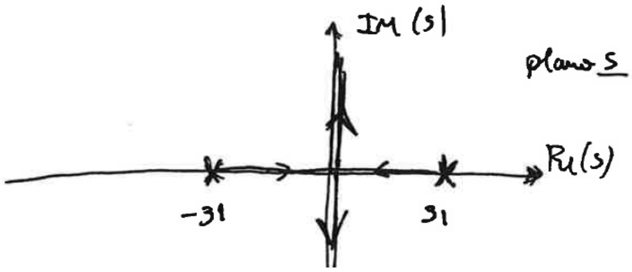
b) Projete um controlador PD do tipo $K_P(T_D s + 1)$ considerando que o sistema será amostrado a taxa de 0,02seg, e que se deseja uma resposta a degrau na referência com sobressinal de 20% e tempo de estabilização 2% de 0,4seg. O projeto deve levar em conta o fato de que o controle será implementado digitalmente.

c) Obtenha a equação de diferenças para a implementação digital do controlador supondo a transformação bilinear.

a) $m\ddot{x} = K_1 x + K_2 i$

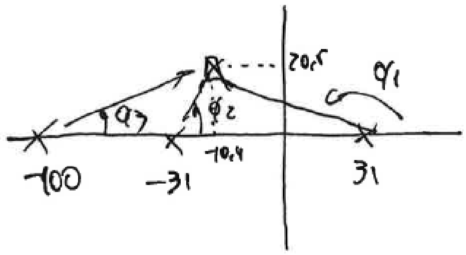
$$(ms^2 - K_1)X(s) = K_2 . I(s)$$

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{K_2}{ms^2 - K_1} = \frac{0{,}4}{0{,}02s^2 - 20} = \frac{20}{s^2 - 1000}$$



b) $T = 0{,}02\,seg \Rightarrow G_{ZOH}(s) = \frac{1}{T/2\,s+1} = \frac{1}{0{,}01s+1} = \frac{100}{s+100}$

$\left.\begin{array}{l} t_s = 0{,}4\,seg \\ M_p = 20\% \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \zeta = 0{,}45 \\ \omega_n = 22\,rad/s \end{array}$ $\quad p_{1,2} = -10{,}4 \pm 20{,}5j$

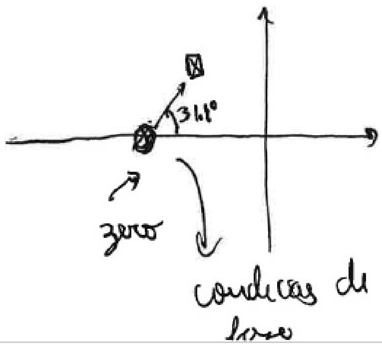


$\phi_1 = 107{,}6$

$\phi_2 = 44{,}9 \Rightarrow -\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -211{,}4°$

$\phi_3 = 12{,}9$

$\Downarrow$ avanço de $31{,}4°$



$PD = K_p(T_D s + 1) \Rightarrow \boxed{PD = 70{,}9\left(\frac{s}{44{,}5} + 1\right)}$

zero $= -44{,}5$

$PD = K_p\left(\frac{s}{44{,}5} + 1\right) \rightarrow K_p = 70{,}9$

↳ condição de módulo

---

c) $G_C = 70{,}9\left(\frac{s}{44{,}5} + 1\right)$

$$G_C(z) = 70{,}9\left(\frac{\frac{2}{0{,}02}\cdot\frac{z-1}{z+1}}{44{,}5} + 1\right) \Rightarrow G_C(z) = \frac{230{,}2z - 88{,}4}{z+1}$$

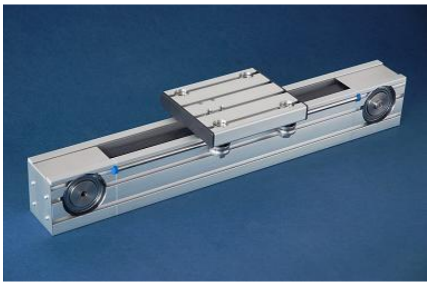
$$\frac{I(z)}{E(z)} = \frac{230z - 88{,}4}{z+1} = \frac{230 - 88{,}4z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow$$

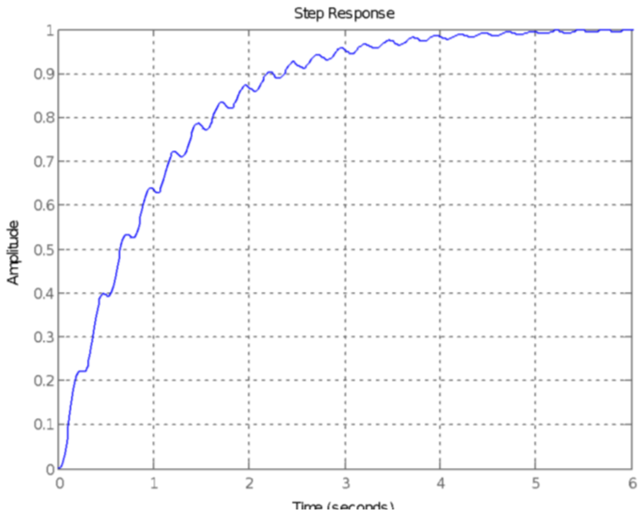
$$\boxed{I(k) = 230\,E(k) - 88{,}4\,E(k-1) - I(k-1)}$$

Questão 21 (Q2 P1 2015)

Um sistema de posicionamento linear foi concebido utilizando-se correia, e resultou uma certa flexibilidade que preocupou os projetistas do sistema de controle. Verificou-se que a dinâmica que relaciona a entrada V(s) (tensão nos servo motores) e X(s) (posição da mesa transportada) é dada por

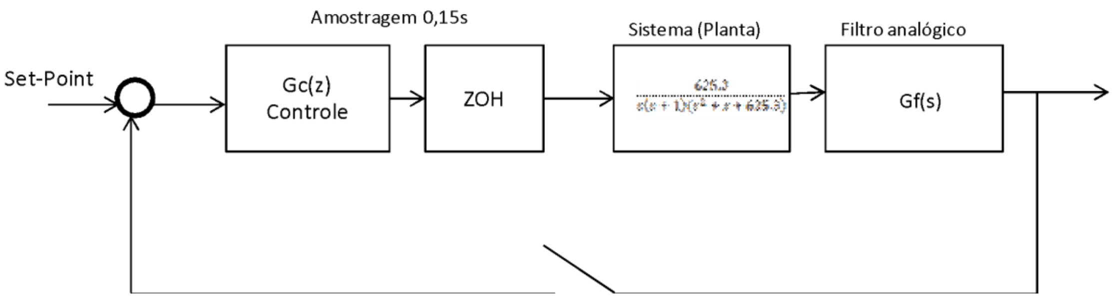
$G(s) = \frac{625.3}{s(s+1)(s^2+s+625.3)}$. Apenas para orientar seu raciocínio, apresenta-se abaixo a resposta a um degrau da função $G(s).s$





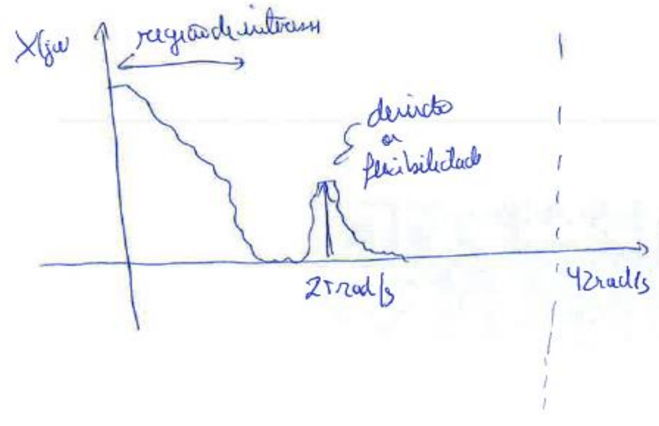
Como será feito um produto de larga escala utilizando este posicionador, os projetistas devem procurar redução de custo na eletrônica de controle, e irão utilizar um microprocessar que permite tempo de amostragem de 0.15seg. O objetivo é projetar um controlador para garantir tempo de assentamento de 4seg e sobressinal de 5% (ou seja, $\zeta = 0.7$ e $\omega_n = 1{,}4 rad/s$.

A proposta de arquitetura de controle para este sistema é dada abaixo.



a) Justifique a necessidade do filtro, implementado por meio de componentes eletrônicos analógicos, na malha de controle.
b) Esboce o gráfico de bode de módulo do filtro que deve ser desenvolvido. Indique neste esboço qual o tipo de filtro (passa baixa, passa alta, passa banda, ou outro) e a frequência de corte. Justifique.
c) Supondo que o filtro foi muito bem projetado e influenciará pouco a dinâmica na banda de frequência de interesse, projete o controle Gc(z) levando em conta o tempo de amostragem. Utilize transformação de equivalência de polos e zeros. Justifique.

a) - Freq natural não (pouco) amortecida 25rad/s
- Freq amostragem $2\pi/_{0,15} = 42rad/s$



O controle não poderá controlar a flexibilidade pois sua freq. é maior que 21rad/s (Nyquist). Logo, para evitar aliasing do sinal amostrado (ou seja, que a oscilação devido à flexibilidade seja "vista" como uma baixa frequência) esta deve ser filtrada previamente

Este filtro deve ser analógico, pois está acima da freq de Nyquist do sistema digital

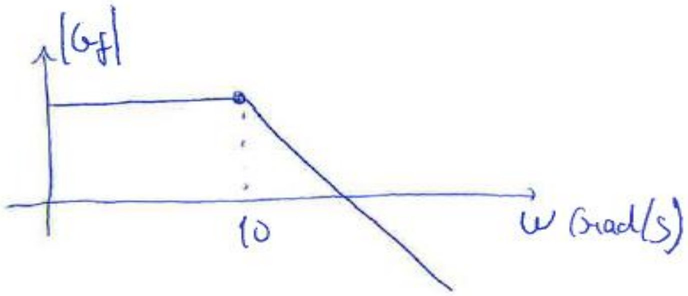
b) Passa baixa

$\omega_{interesse} \cong 2rad/s$

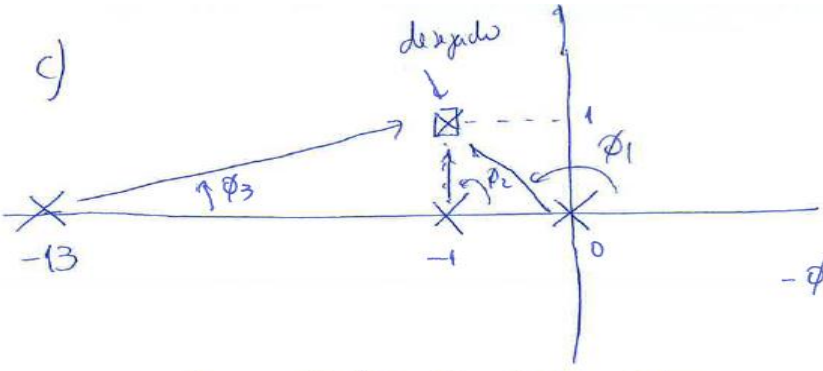
$\omega_{para\ eliminar} = 25rad/s$

⇓

$\omega_{corte} \cong 10rad/s$



c)



$G_{ZOH} = \dfrac{1}{0,075s+1}$

$-\phi_1-\phi_2-\phi_3 = -229°$

⇓

avanço 49°

Supondo $G_c(s) = K \cdot \dfrac{s+1}{s+p}$ obtemos

$$G_c(s) = 2\,\frac{s+1}{s+2,15}$$

$\Downarrow$

$G_c(z) =$

polo $z = e^{0,15\cdot(-2,15)} = 0,72$

zero $z = e^{0,15\cdot(-1)} = 0,86$

$$G_c(z)\big|_{z=1} = G_c(s)\big|_{s=0}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{G_c(z) = \frac{1,92z - 1,78}{z - 0,85}}$$

Questão 22 (Q1 P1 2016)

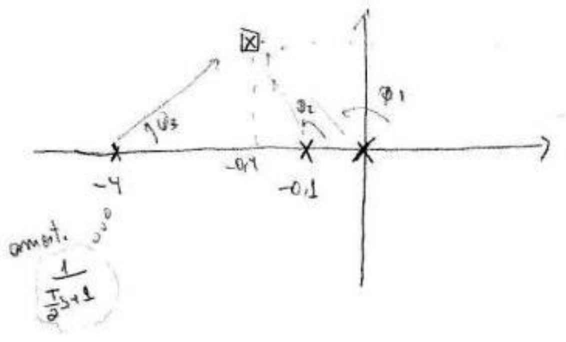
O modelo de um sistema servo-controlado é dado por $\dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s(10s+1)}$. Objetiva-se obter um tempo de estabilização 2% de 10s e sobressinal máximo de 16%. Considerando-se um tempo de amostragem de 0,5s, pede-se projetar um controlador discreto que atenda a estas especificações. Note que se deve considerar o tempo de amostragem na fase de projeto do controlador. Em seguida, mostre pelo cálculo de polos em malha fechada do sistema discretizado que as especificações foram satisfeitas.

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s(10s+1)}} \longrightarrow X(s)$$

$t_s^{2\%} \le 10s \Rightarrow 4/\xi\omega_n = 10$

$M_p \le 16\% \Rightarrow \xi \ge 0,5$

$\Longrightarrow$ polos desejados $= -0,4 \pm 0,7j$



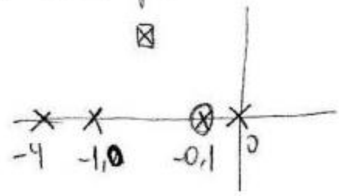
$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -120 - 113 - 11 = -244^\circ$

$\Downarrow$

avanço de 64°

$$G_c = K_c\,\frac{s+z}{s+p}$$

números projeto. Uma possível solução é: z = 0,1
P = 1,0



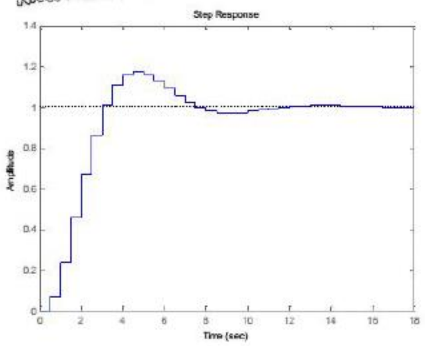
⇒ $G G_c = \frac{1}{s(10s+1)} K_c \frac{s+0,1}{s+1,0}$ ⇒ cond. de modulo $|G \cdot G_c|_{s=-0,4+0,7j} = 1 \Rightarrow K_c = 68$

Verificação ⇒ • planta discretizada

$G_p(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(10s+1)}\right\} = \frac{0,012z+0,012}{z^2-1,95z+0,95}$

$G_c(z)$ = mapeando polos e zeros = $\frac{5,48z-5,2}{z-0,61}$

malha fechada denominador: $z^3-2,49z^2+2,13z-0,64$ ⇒ polos $\left\{\begin{array}{l}0,95\\0,77 \pm 0,28j\end{array}\right.$ ⇝ $s = \frac{1}{T}\ln z$ ⇝ $\begin{array}{l}-0,1\\-0,4 \pm 0,7j\end{array}$

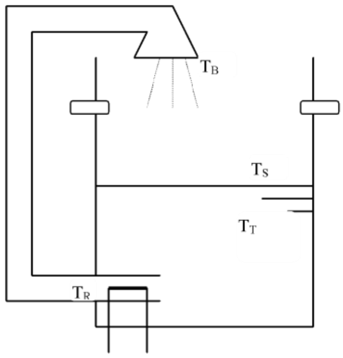


• -0,1 está próximo a zero logo não é dominante

• polos próximos ao esperado logo projeto e discretização então OK.

Questão 23 (Q2 P1 2016)

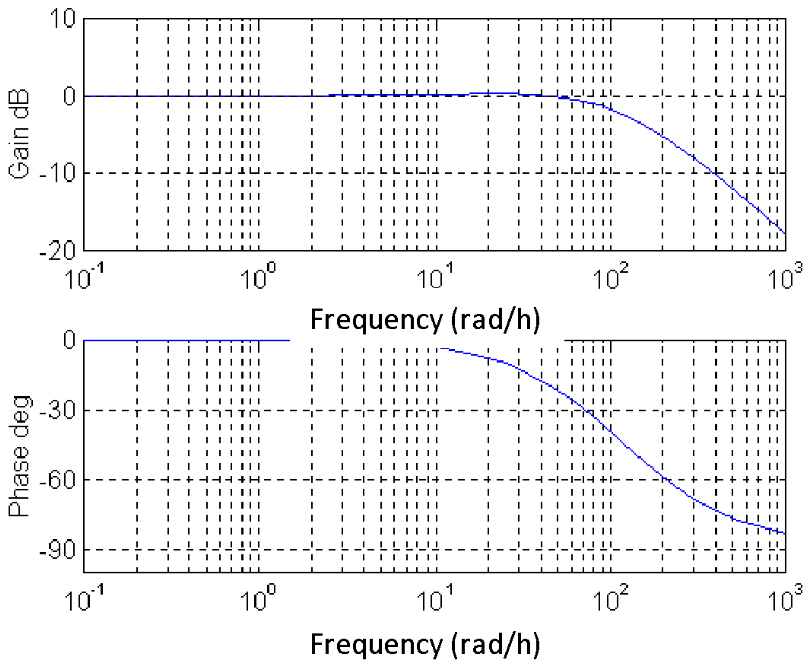
Considera-se o sistema de controle de temperatura de um bocal nebulizador esquematizado abaixo. O óleo contido em um reservatório à temperatura T_T é bombeado por uma tubulação. Logo na entrada da tubulação existe uma resistência elétrica que aquece o mesmo. Na saída do banco de resistências a temperatura é T_R. Ao chegar no bocal nebulizador, o óleo já se encontra numa temperatura ligeiramente inferior (T_B) na medida em que perde calor ao longo da tubulação. No bocal ele passa pelos nebulizadores que o transformam em finíssimas gotículas, cujos diâmetros médios são medidos via um sensor especial de grau de nebulização. A temperatura do spray ao retornar ao tanque é T_S.



Esta bancada de testes é utilizada para se avaliar o desempenho dos bocais de nebulização, e está instalada no IPT. O sistema de controle deve, por meio do calor qh fornecido à resistência elétrica, controlar a temperatura do óleo no bocal T_B. Após uma série de simplificações, será considerado o seguinte modelo que relaciona a variável controlada (T_B - ºC) com a manipulada (qh - kcal/h), com a **base de tempo dada em horas**:

$$\frac{T_B(s)}{qh(s)} = \frac{85s + 510}{3610s^2 + 64180s + 127450}$$

Foi feito o projeto do sistema de controle e utilizou-se um controlador PI com $G_c(s) = \frac{10830}{s} + 5421$. O diagrama de bode em malha fechada do sistema contínuo em malha fechada com este controlador PI é dado abaixo. Pede-se obter a frequência de amostragem adequada para este controle e obter o controle na forma discreta (em forma de equação de diferença), considerando-se o método bilinear.



freq corte = 150rad/h

$$T = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi}{150} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\, h = 15\, seg.$$

$$G_{cd}(z) = \frac{10830}{\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}} + 5421 = \frac{5444 - 5398 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

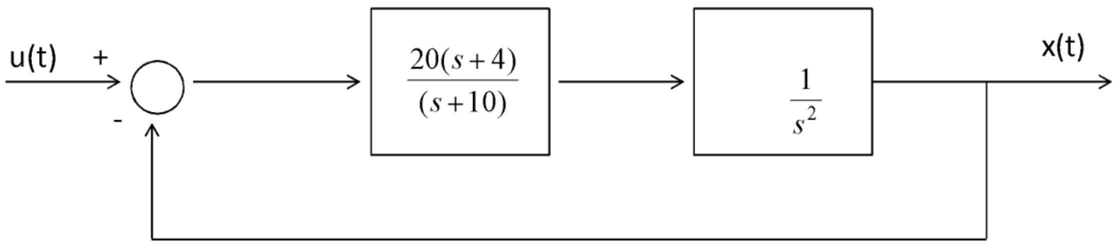
PI digital com $T = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\, h$

$$\boxed{y[k] = y[k-1] + 5444 \cdot u[k] - 5398 \cdot u[k-1]}$$

$$\xrightarrow{u} \boxed{G_{cd}} \xrightarrow{y}$$

Questão 24 (Q3 P1 2016)

Considere o controle do servo-motor (modelado como uma inércia pura) abaixo:



a) discretize o controlador proposto, considerando um tempo de amostragem de 0,15seg e através do método da equivalência de pólos e zeros.

b) calcule o amortecimento equivalente do sistema em malha fechada dizcretizado e esboce a resposta a uma entrada degrau.

c) esboce o lugar das raizes do sistema contínuo (levando em conta o atraso introduzido pela amostragem) e justifique a resposta do item (b).

d) proponha uma alteração no controle que garanta amortecimento em malha fechada mais adequado. Justifique sua resposta.

2) a) $D(z) = K \dfrac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$ $e^{-aT} = e^{-4 \cdot 0{,}15} = 0{,}55$
$e^{-bT} = e^{-10 \cdot 0{,}15} = 0{,}22$

$K = \lim_{s \to 0} G(s) / \lim_{z \to 1} D(z) = 8/0{,}57 = 13{,}9$

$$\Rightarrow \boxed{D(z) = 13{,}9 \cdot \frac{z - 0{,}55}{z - 0{,}22}}$$

b) $G_p(z) = \frac{0{,}011z + 0{,}011}{z^2 - 2z + 1}$ (equivalente discreto da planta)

em malha fechada $\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{G_p \cdot D}{1 + G_p D} = \frac{0{,}155\, z^2 + 0{,}07z - 0{,}08}{z^3 - 2{,}1z^2 + 1{,}55z - 0{,}31}$

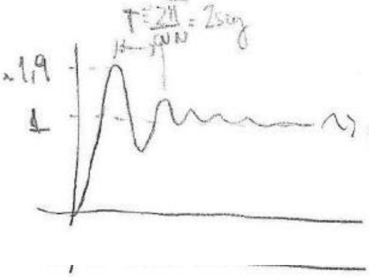
polos em z: $0{,}8721 \pm 0{,}436j$; $0{,}3241$ → polos em s: $-0{,}1675 \pm 3{,}1j$; $-7{,}51$ (dominantes)

$\boxed{\zeta = 0{,}05}$

$\omega_n \cong 3{,}1$ rad/s

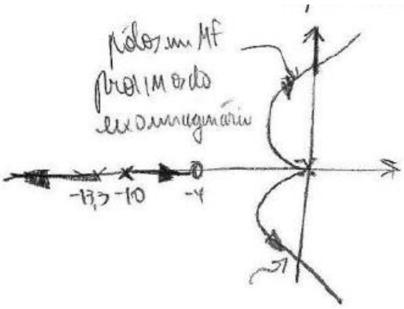
M_p: 85%

logo em MF:



pelo TVF de $X(z)$

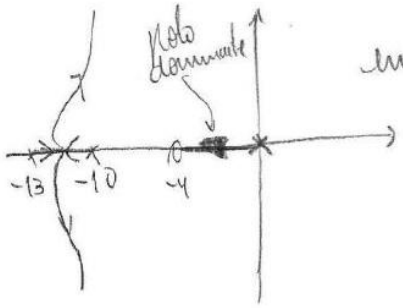
c)



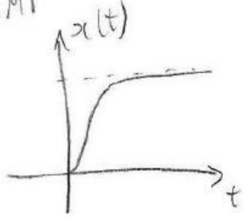
atraso da discretização $\frac{13{,}3}{s+13{,}3}$

d) Introdução de um derivativo no controle

$G_c(s) = \frac{20s(s+4)}{s+10}$

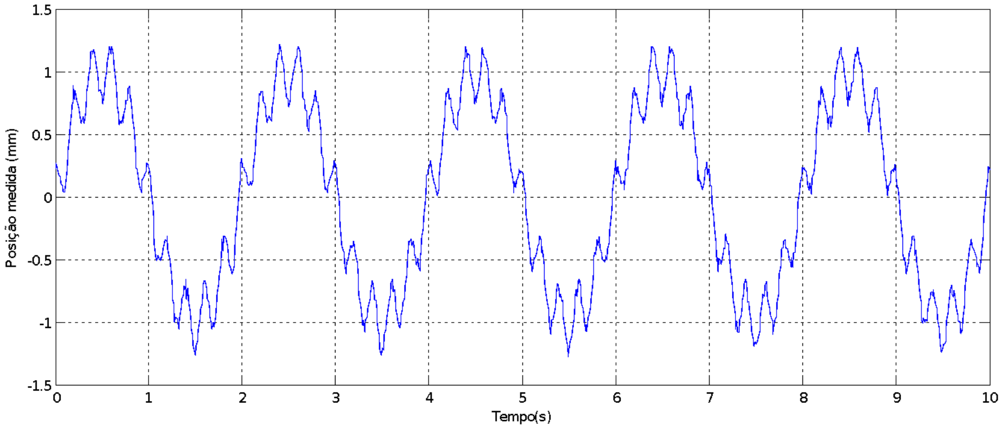


em MF



Questão 25 (Q1 P1 2019)

As vibrações de uma pequena estrutura mecânica deverão ser controladas de forma ativa. Foi aplicado um impulso na estrutura e verificou-se, por meio de um sistema de aquisição de dados de alta amostragem (>10kHz), o deslocamento acima. Pode-se notar a existência de dois modos de vibrar pouco amortecidos. Você dispõe de um hardware para controle antigo (computador+sistema de aquisição), que permite processamento de apenas 7 ciclos/s (7Hz). Assim, decidiu-se por controlar apenas o modo mais lento.



a) Esboce o espectro de freqüência do sinal original de resposta, da forma como foi amostrado pelo sistema de alta amostragem.

b) Esboce o espectro de freqüência deste sinal, quando amostrado pelo seu sistema de controle antigo.

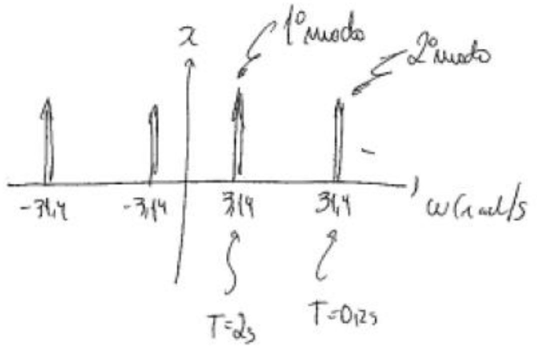
c) Para o controle do modo de vibrar mais lento, indique e justifique qual a melhor solução:

   a. Utilizar um filtro analógico passa baixa com corte em aprox. 15rad/s logo na medida do sensor de posição, antes do sistema computacional de controle.

   b. Utilizar um filtro digital passa baixa implementado no próprio computador, com freqüência de corte de 15rad/s

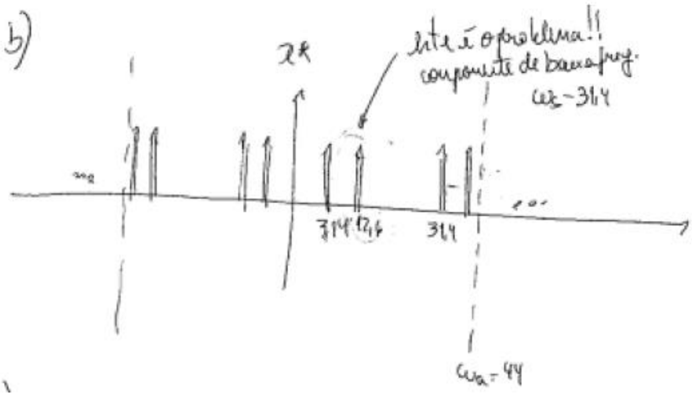
Q.1)

a)



amost. > 10KHz

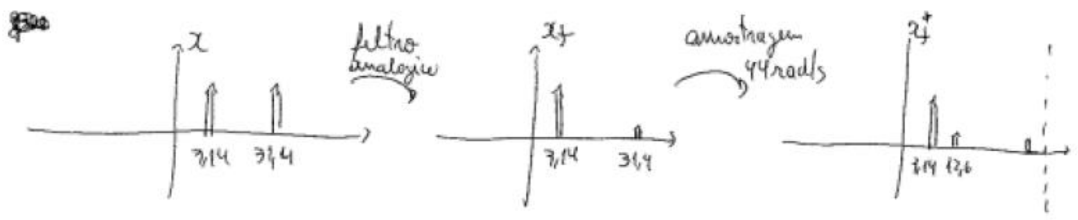
b)



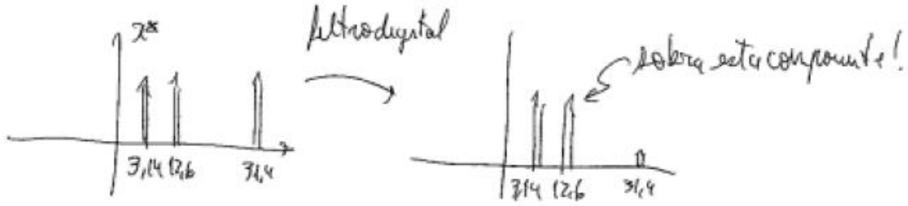
amost = 7Hz = 44 rad/s
= ωs

$\omega_a = 44$

c) Melhor alternativa é a (a), pois se o filtro for bom, atenua a componente de 31,4 rad/s

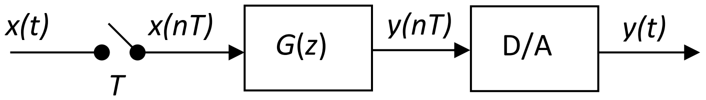


alternativa b não resolve pois filtra sinal já distorcido:



Questão 26 (Q2 P1 2019)

Dado o sistema esquematizado abaixo, onde T = 0,1s. Pede-se:



a) Se $x(t) = \cos(6\pi t)$ e $G(z) = 1$, faça um esboço dos espectros de freqüências de $x(t)$, $y(nT)$ e $y(t)$. (1,0)

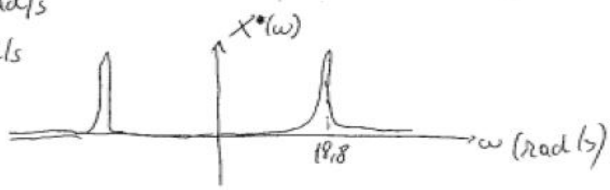
b) Faça um esboço dos espectros de freqüências de $y(t)$, sendo o D/A composto por um segurador de ordem zero (ZOH). (1,5)

c) Se $G(z)$ é um filtro passa baixa ideal com freqüência de corte de 5Hz, qual será o conteúdo de freqüência de $y(t)$? (1,0)

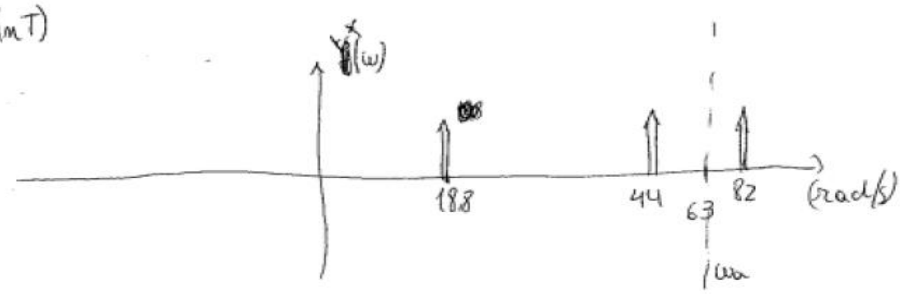
2) $T = 0{,}1\text{s} \Rightarrow \omega_a = 63 \text{ rad/s}$

$x(t) = \cos(6\pi t)$ → 18,8 rad/s

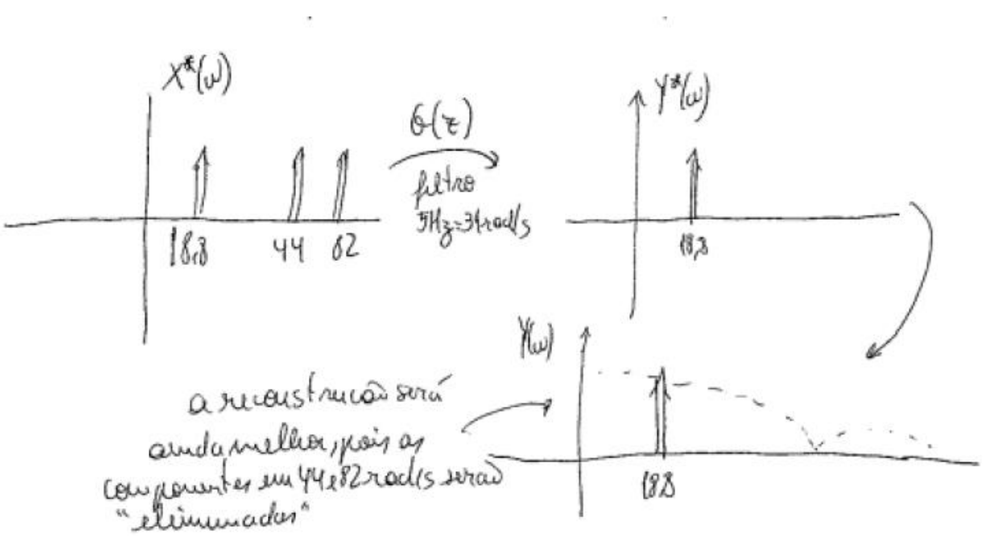
a)



y(nT)



b)



Questão 27 (Q3 P1 2019)

Obter a transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2}$$

Solución Al expandir $X(z)$ en fracciones parciales, se obtiene

$$X(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} - z^{-2} - z^{-1}$$

[Observe que en este ejemplo, $X(z)$ involucra un polo doble en $z = 0$. Por lo que la expansión en fraccio[nes] parciales debe incluir los términos $1/(z^2)$ y $1/z$.] Refiriéndose a la tabla 2-1, se encuentra la transformad[a] inversa de cada uno de los términos de esta última ecuación. Esto es,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right] = \begin{cases} 2^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \le 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[z^{-2}] = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}] = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto, la transformada z inversa de $X(z)$ puede darse mediante

$$x(k) = \begin{cases} 0 - 0 - 0 = 0, & k = 0 \\ 1 - 0 - 1 = 0, & k = 1 \\ 2 - 1 - 0 = 1, & k = 2 \\ 2^{k-1} - 0 - 0 = 2^{k-1}, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

Al rescribir, se tiene

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1 \\ 1, & k = 2 \\ 2^{k-1}, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

OBS: há um erro na 2ª linha da tabela abaixo extraída do OGATA, o correto seria a^{k-1}, mas não considerei errado para os alunos que usaram esta tabela.

a^k	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
a^k $k = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$

Questão 28 (Q4 P1 2019)

Calcule as Transformadas *Z* das seguintes funções:

a) $f(t) = [1 + 3e^{-2t}]1(t-2)$, onde $1(t-2)$ é o degrau unitário atrasado de 2 segundos. Use um período de amostragem de 1 segundo.

b) $f(kT) = \{0, para\ \ k \leq 4\ e\ k \geq 21\ \ -3, para\ 5\ \leq\ k\ \leq 12\ 3, para\ \ 13\ \leq\ k \leq 20$

4-a)

$f(t) = [1 + 3e^{-2t}]\,1(t-2)$

$= \underbrace{1(t-2)}_{f_1(t)} + \underbrace{3e^{-2t}\,1(t-2)}_{f_2(t)}$

$f_1(z) = Z\{1(t-2)\} = \dfrac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$

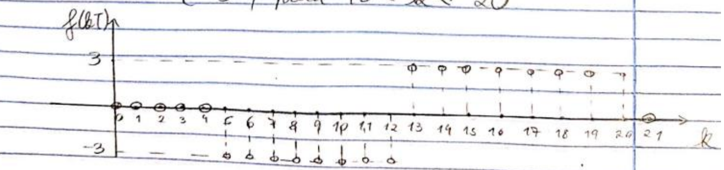
$f_2(t) = 3\,e^{-2(t-2+2)}\,1(t-2) = 3e^{-4}\,e^{-2(t-2)}\,1(t-2)$

sendo $t-2 = \tau \Rightarrow f_2(\tau) = 3e^{-4} \cdot e^{-2\tau}1(\tau)$

$\Rightarrow f_2(z) = 3e^{-4}z^{-2}Z\{e^{-2\tau}\} = \dfrac{3e^{-4}z^{-2}}{1-e^{-2T}z^{-1}}, \quad T = 1s$

$\Rightarrow f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \dfrac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \dfrac{3e^{-4}z^{-2}}{1-e^{-2}z^{-1}}$

b) $f(kT) = \begin{cases} 0, & para\ k \leq 4\ e\ k \geq 21 \\ -3, & para\ 5 \leq k \leq 12 \\ 3, & para\ 13 \leq k \leq 20 \end{cases}$



$f(kT) = -3 \cdot 1(k-5) + 2 \cdot 3 \cdot 1(k-13) - 3 \cdot 1(k-21)$

$\Rightarrow Z[f(kT)] = \dfrac{-3z^{-5}}{1-z^{-1}} + \dfrac{6z^{-13}}{1-z^{-1}} - \dfrac{3z^{-21}}{1-z^{-1}} = \dfrac{-3z^{-5}+6z^{-13}-3z^{-21}}{1-z^{-1}}$