PMR 3306
Sistemas Dinâmicos II

PARTE II: SINAIS

Larissa Driemeier
driemeie@usp.br
3091 5756

FORMULAÇÃO COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER

OU SÉRIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Síntese

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

Harmônicos $X[n]$ distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Análise

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

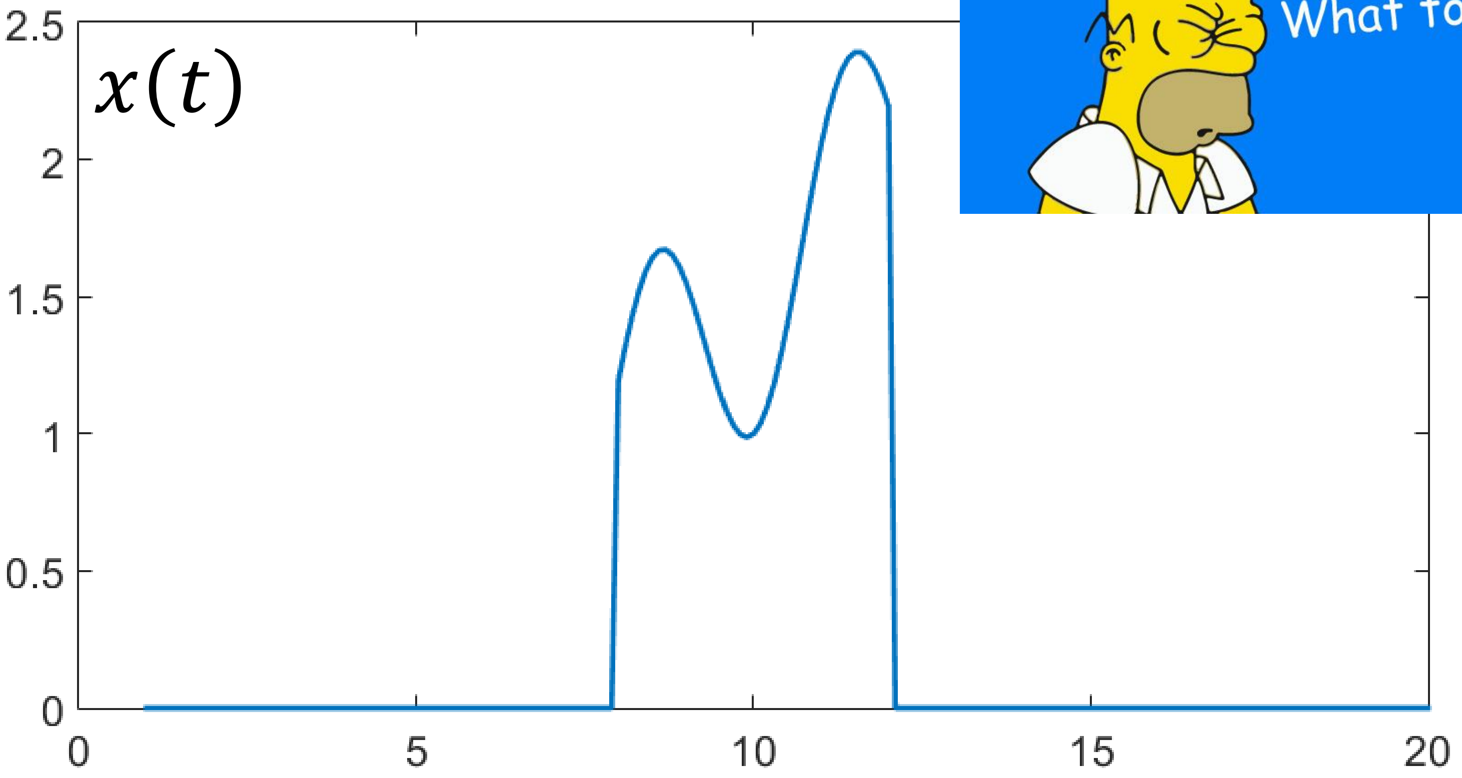
$$X[n] = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad X[-n] = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$$X[0] = \frac{a_0}{2}$$

	Sinusoidal formulation	Exponential formulation
Synthesis:	$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$
Analysis:	$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$	$X[n] = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

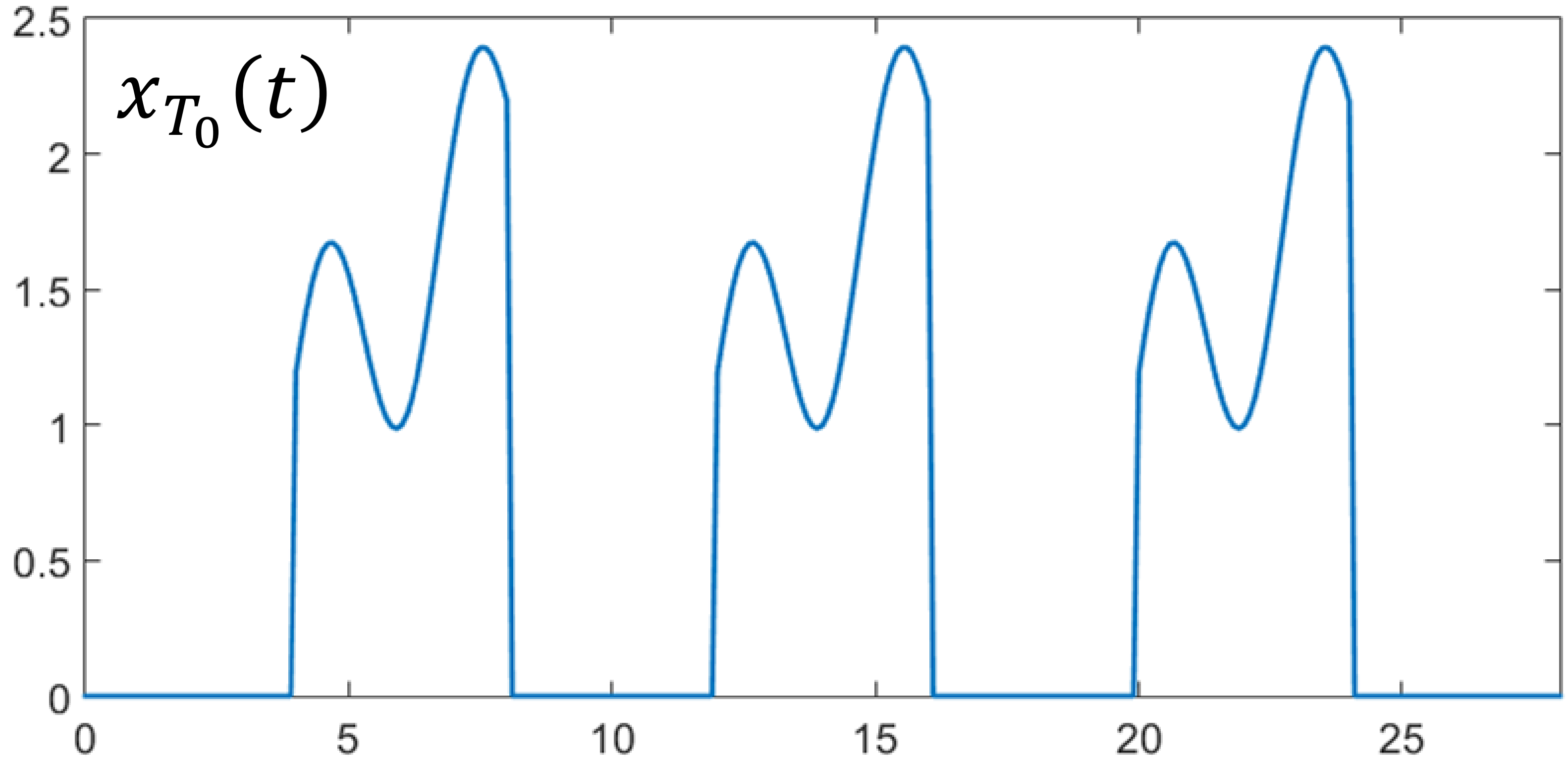
Table 1: Summary of analysis and synthesis equations for Fourier analysis and synthesis.

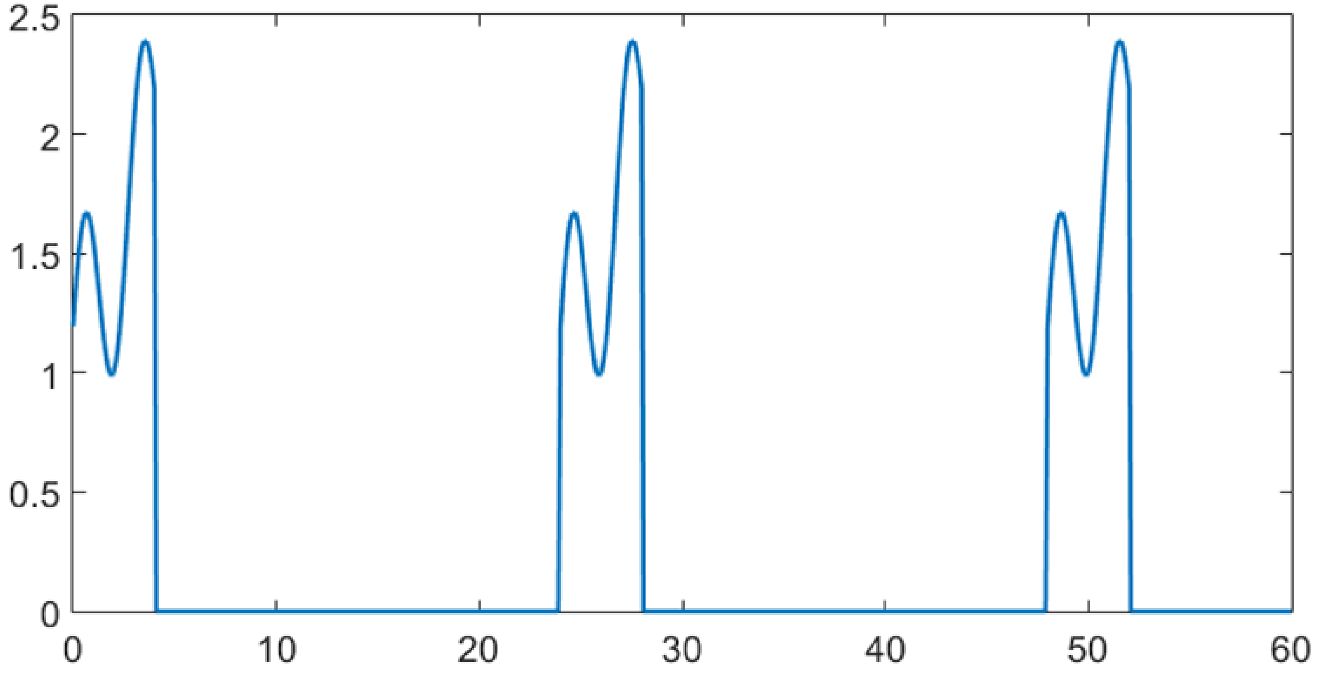
Este não é um sinal periódico. Queremos calcular seu espectro usando análise de Fourier, mas aprendemos que o sinal deve ser periódico. O que fazer?

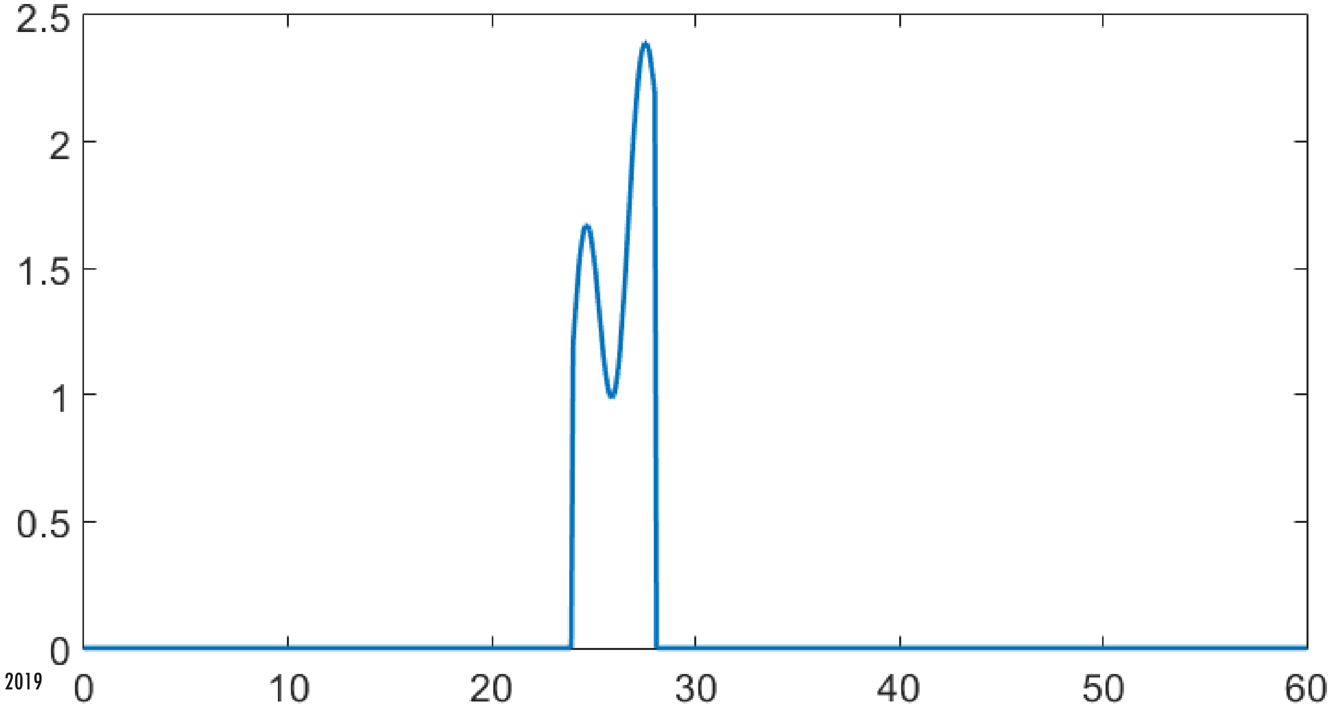


Assim eu resolvo...

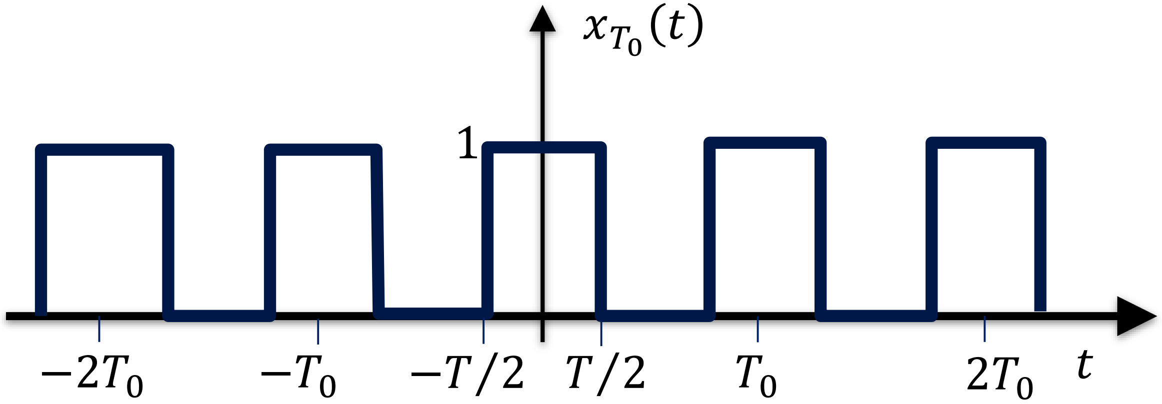
Mas não é o mesmo sinal...

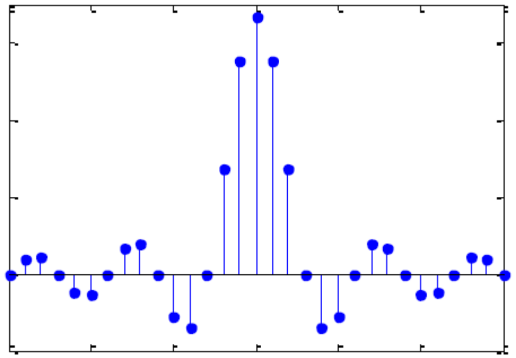


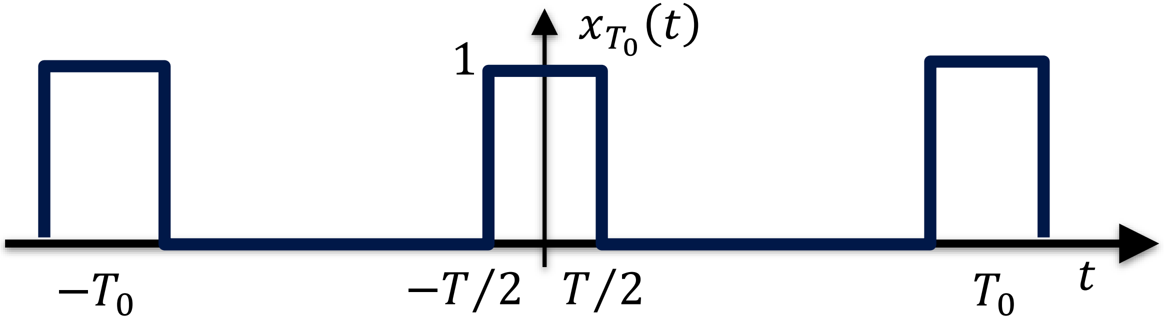


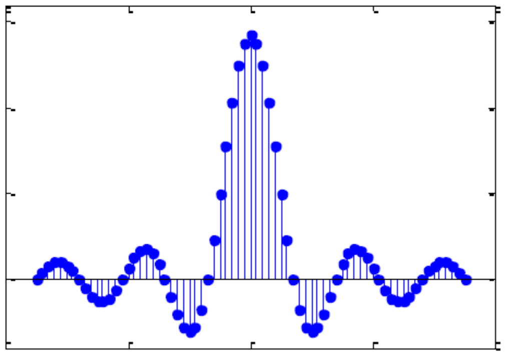


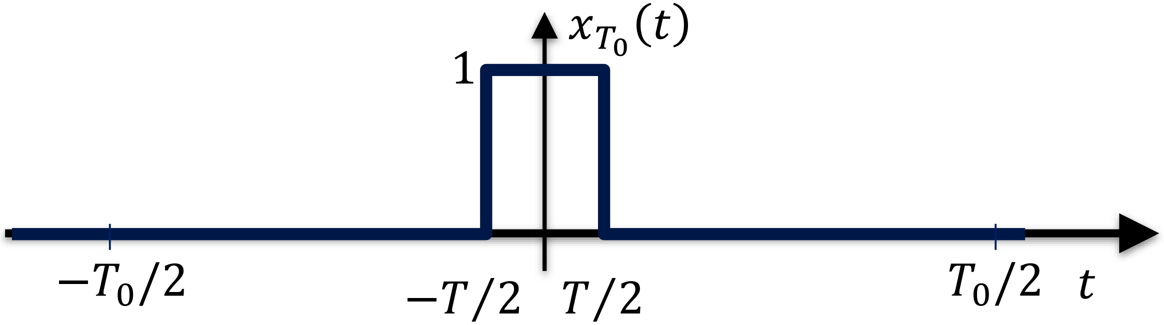
$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$

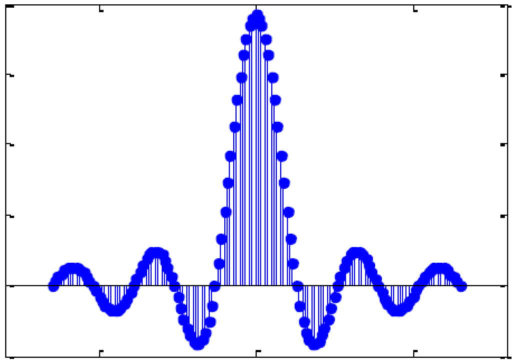

$x_{T_0}(t)$
1
$-2T_0$
$-T_0$
$-T/2$
$T/2$
T_0
$2T_0$
t




$x_{T_0}(t)$
1
$-T_0$
$-T/2$
$T/2$
T_0
t




$x_{T_0}(t)$
1
$-T_0/2$
$-T/2$
$T/2$
$T_0/2$
t



Um *sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito.*

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0$$

n-ésimo harmônico

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} = \frac{\boldsymbol{\Delta\omega}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt\, e^{jn\omega_0 t}$$

Se $T \to \infty$, o somatório $\to$ integral,

$n\omega_0 \to \omega$, $1/T \to d\omega/2\pi$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt\;\, e^{j\omega t} d\omega$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$, simbolizada por

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

permite expressar o sinal $x(t)$ não periódico, como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

A TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\; e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

FT

Análise

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Um *sinal aperiódico* pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito.

$T \to \infty$ e $\frac{1}{T} \longrightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$ e $n\omega_0 \to \omega$

FS

FT

Síntese

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Análise

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Análise

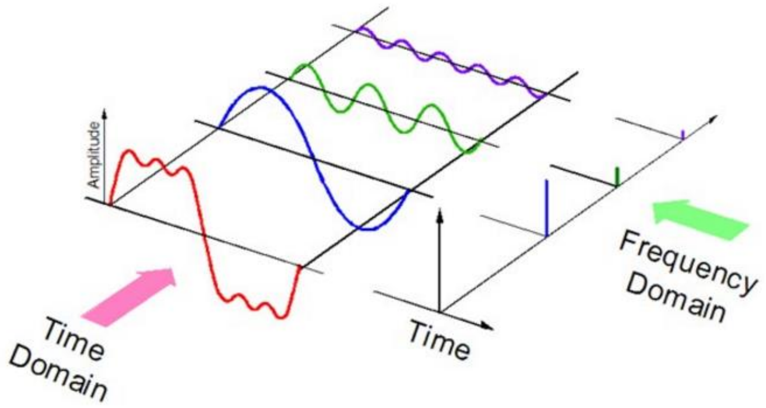
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Harmônicos $X[n]$ distanciados

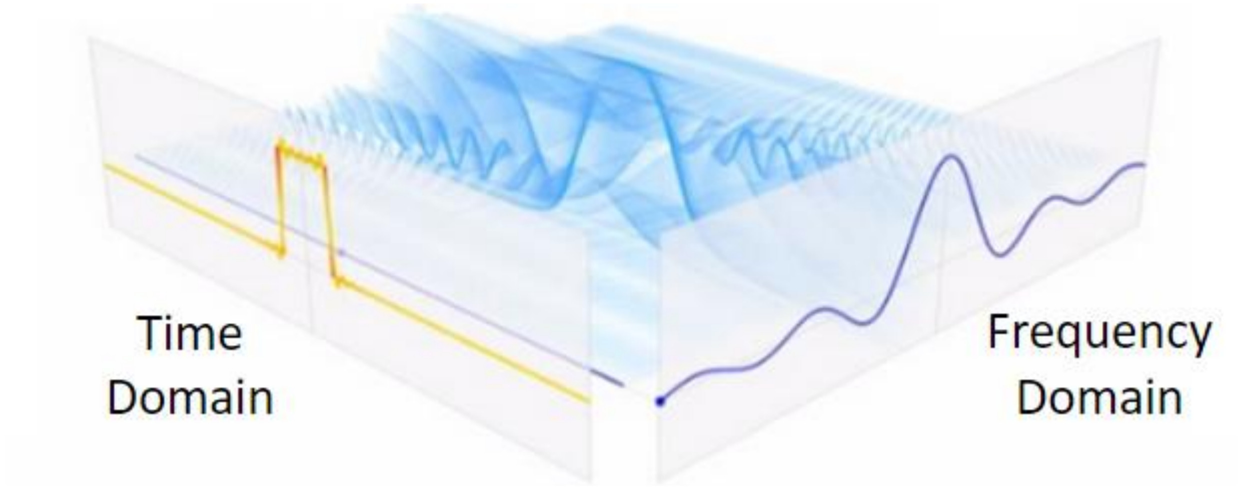
$\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Valores contínuos $X(\omega)$

FS


Amplitude
Time
Domain
Time
Frequency
Domain

FT


Time
Domain
Frequency
Domain

MAGNITUDE E FASE

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{\angle X(\omega)}$$

Amplitude (magnitude) do espectro

Fase do espectro

Amplitude é uma função par e fase é uma função ímpar!

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\, dt + j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\, dt$$

$$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |X(\omega)|\angle\theta = X(\omega)e^{j\theta}$$

em radianos

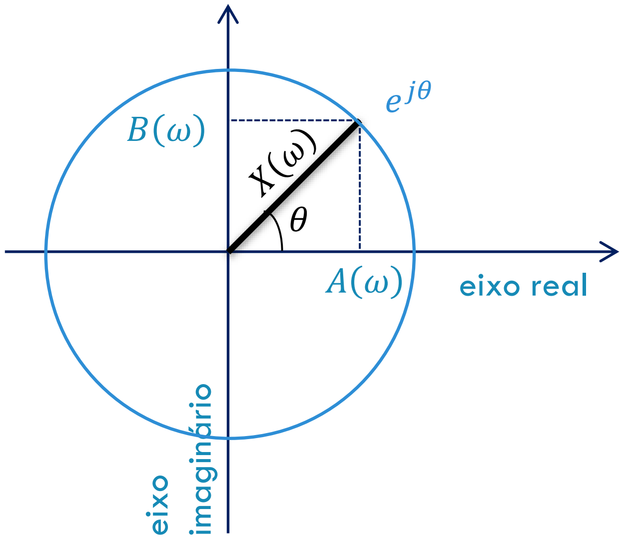
em graus

$$|X(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$$

$$\theta = \text{atan}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

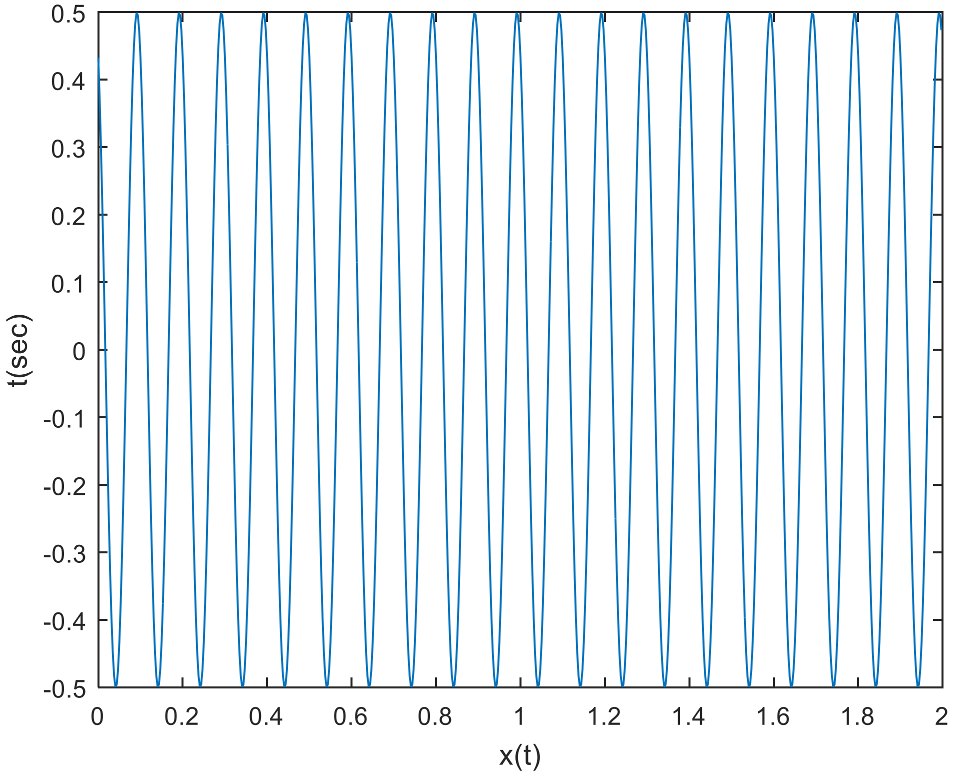
$$A(\omega) = Re[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\, dt$$

$$B(\omega) = Im[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\, dt$$

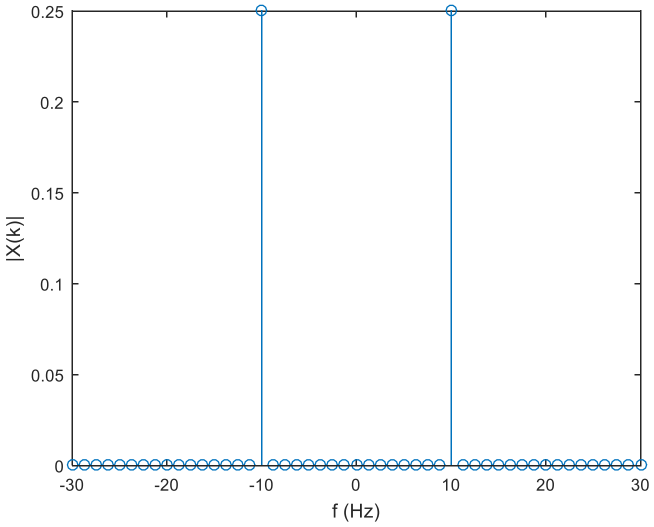


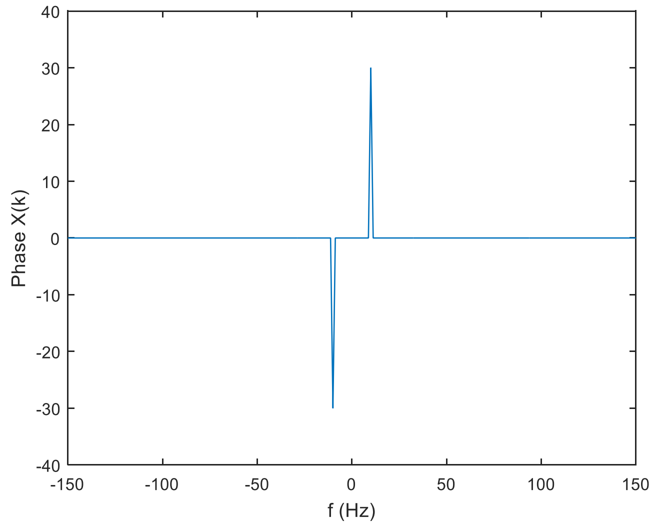
MÓDULO E FASE

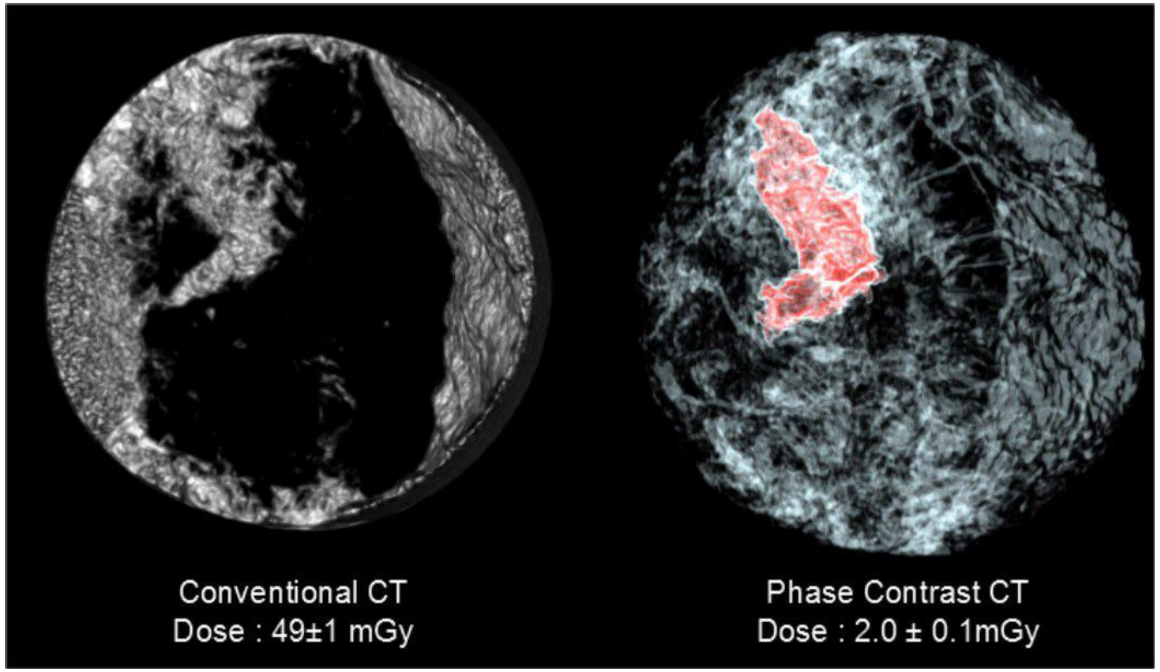
$$x(t) = 0{,}5\cos(2\pi\,10t + \pi/6)$$



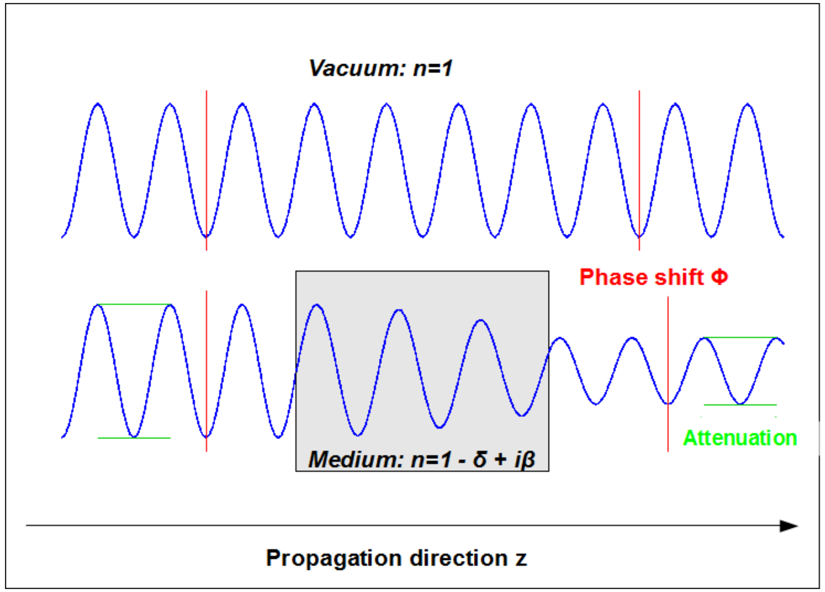
A saída da FT é um vetor complexo que contém informação sobre a frequência do sinal. A **magnitude** informa a intensidade relativa dos componentes de frequência. A **fase** informa como os componentes de frequência se alinham no tempo.







https://medicalxpress.com/news/2012-10-x-ray-breast-cancer-imaging-dose.html



https://www.itnonline.com/article/spectral-imaging-brings-new-light-ct

Imagens extraídas da Internet.

EXEMPLO 1

- Calcular a transformada da função:
- $x(t) = e^{-at}u_1(t), a > 0$

```
t=0:0.001:10;
for a=[0.5 1.0 1.5 2.0]
    x=exp(-a.*t);
    plot(t,x);
    hold on
end
legend('a=0.5', 'a=1.0', 'a=1.5', 'a=2.0')
hold off
```

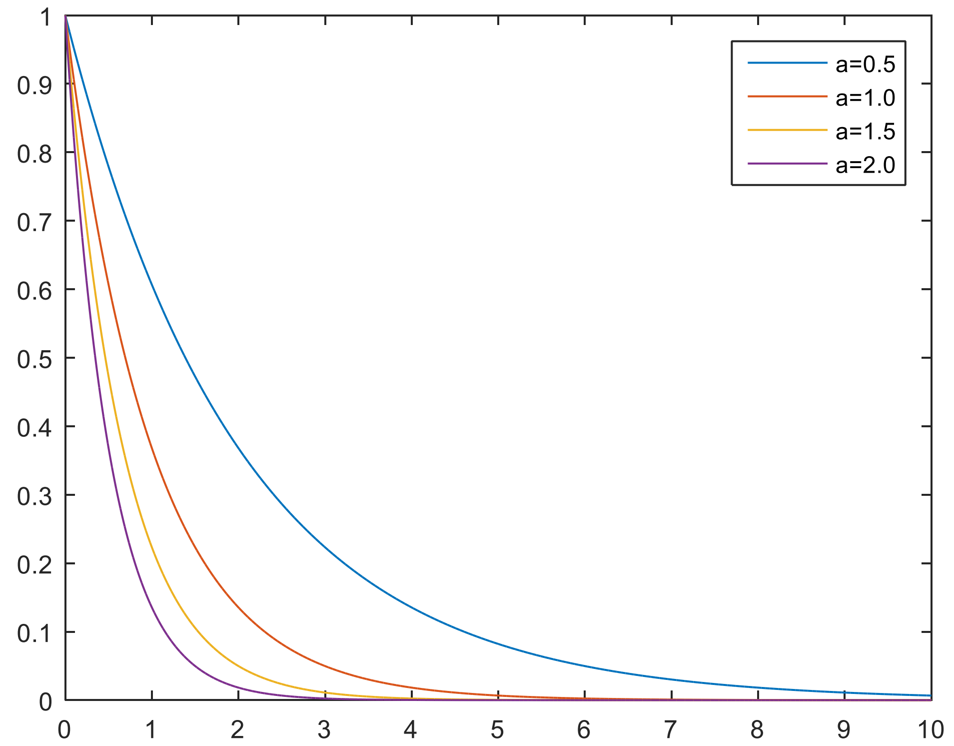


DIAGRAMA DE MÓDULO

```
for a=[0.5 1.0 1.5 2.0]
    w=-2:0.01:2;
    aux=ones(1,length(w)).*a;
    x=1./(aux.^2+w.^2);
    plot(w,x);
    hold on
end
legend('a=0.5', 'a=1.0',
       'a=1.5', 'a=2.0')
hold off
```

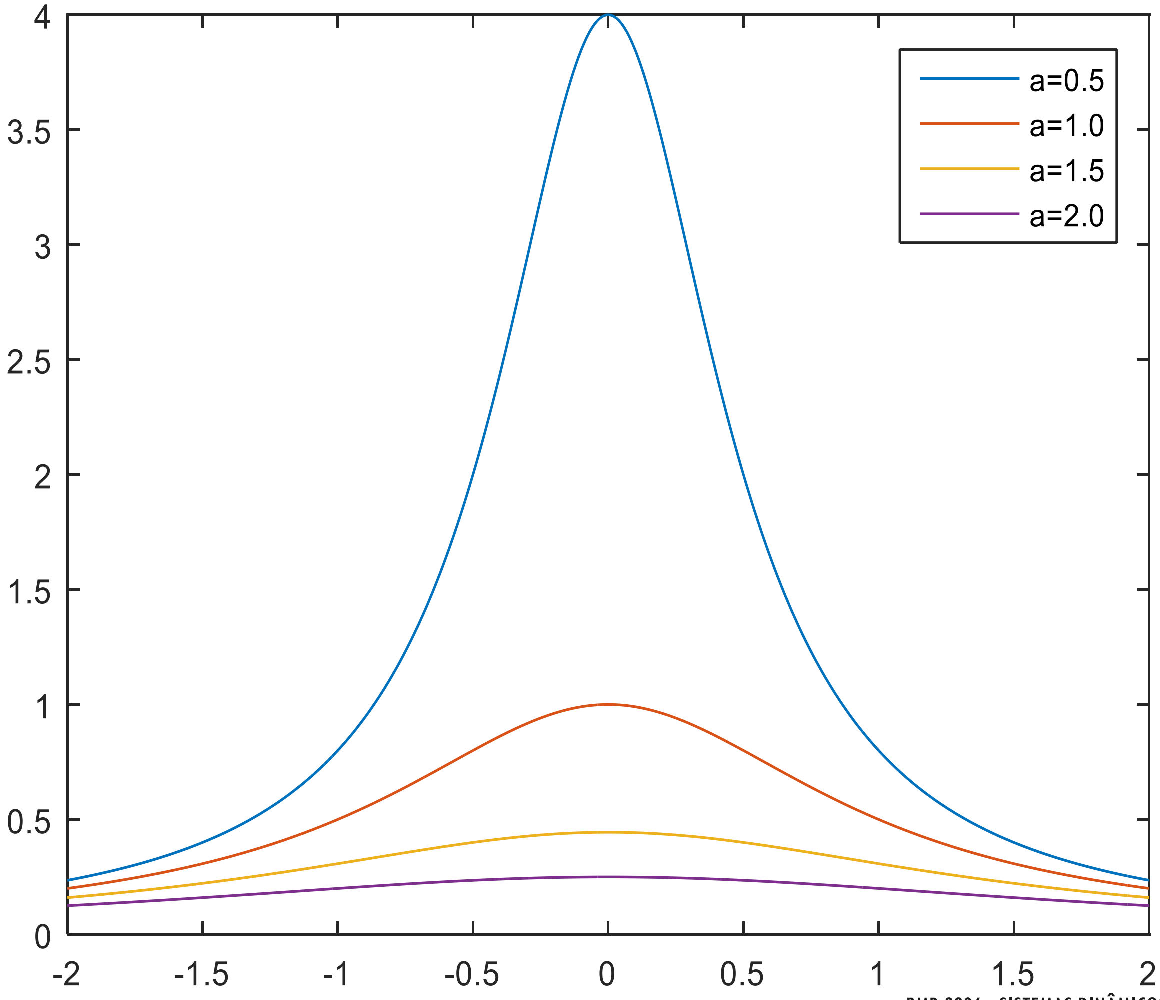
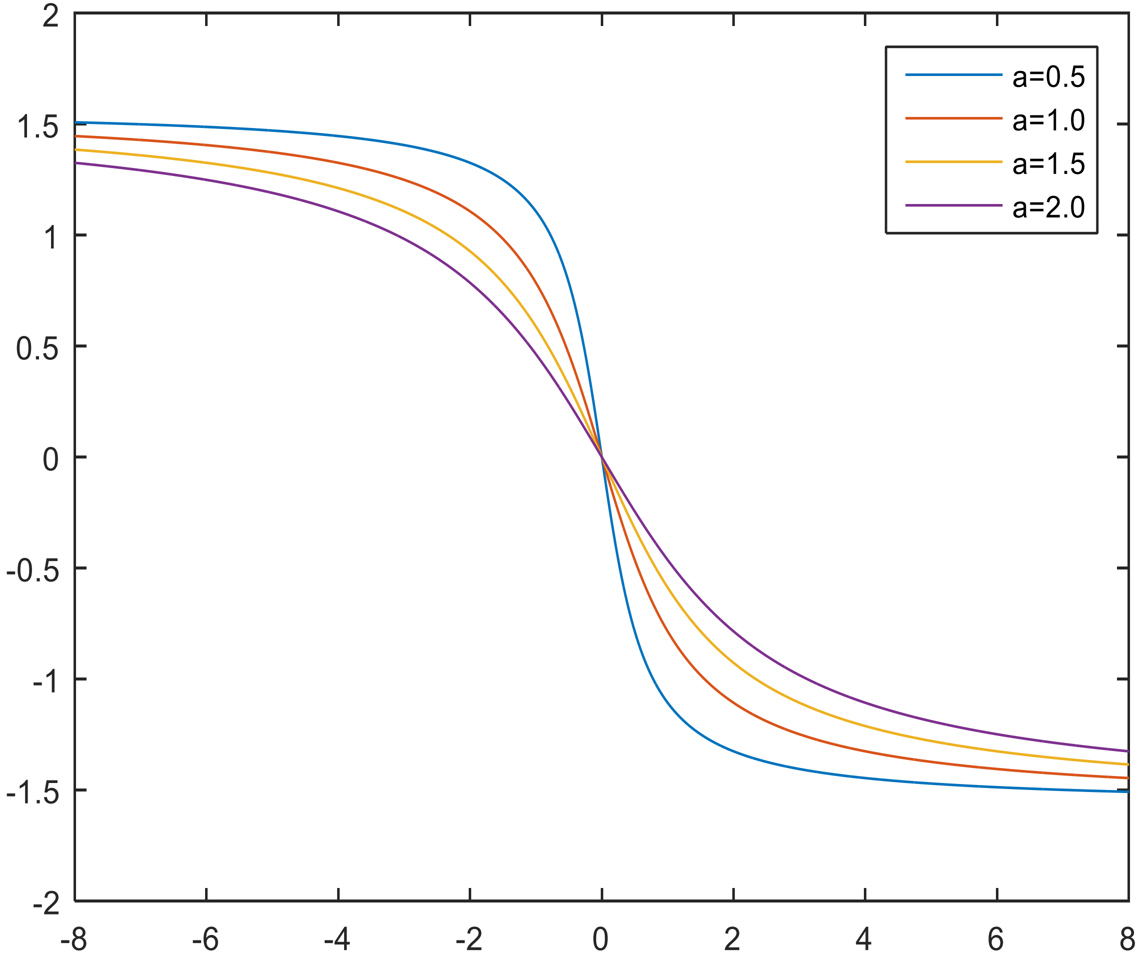


DIAGRAMA DE FASE

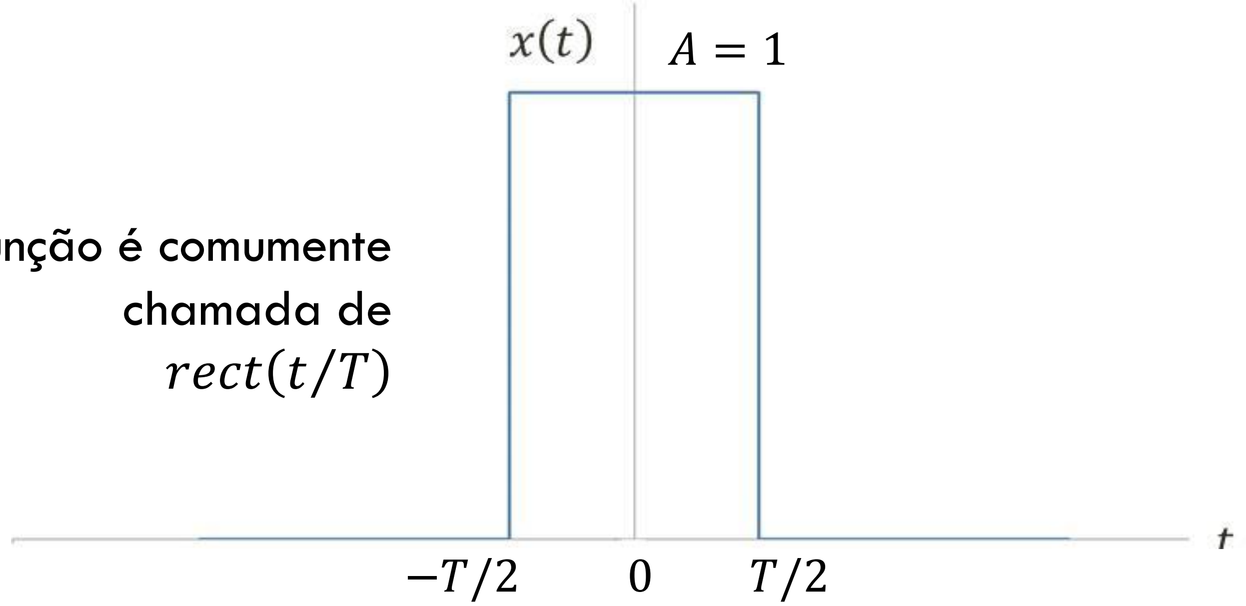
```
for a=[0.5 1.0 1.5 2.0]
    w=-8:0.01:8;
    aux=ones(1,length(w)).*a;
    x=-atan(w./aux);
    plot(w,x);
    hold on
end
legend('a=0.5', 'a=1.0',
       'a=1.5', 'a=2.0')
hold off
```



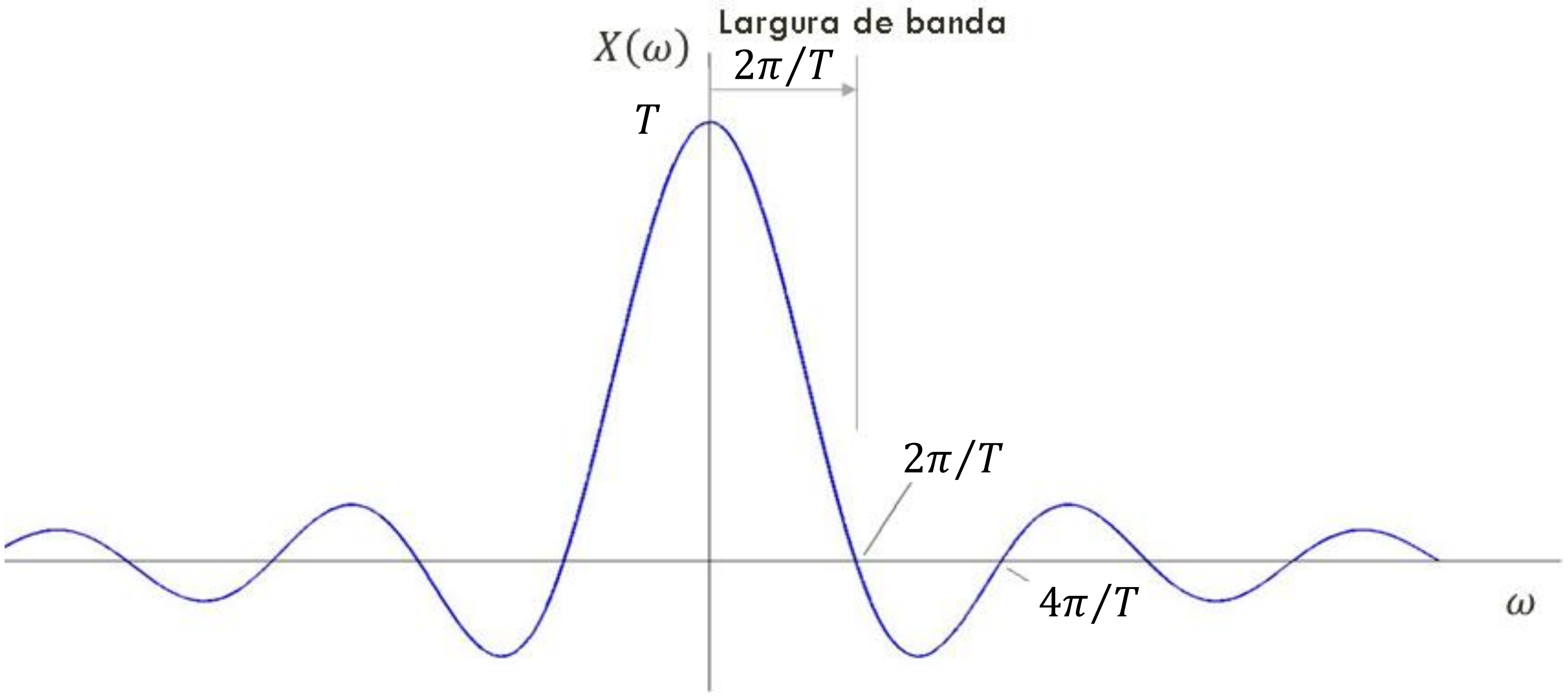
EXEMPLO 2

- Calcular a transformada da função pulso retangular:
- $x(t) = \begin{cases} 1 \ \text{se} \ -T/2 < t < T/2 \\ 0, \qquad \text{cc} \end{cases}$

Essa função é comumente chamada de $rect(t/T)$

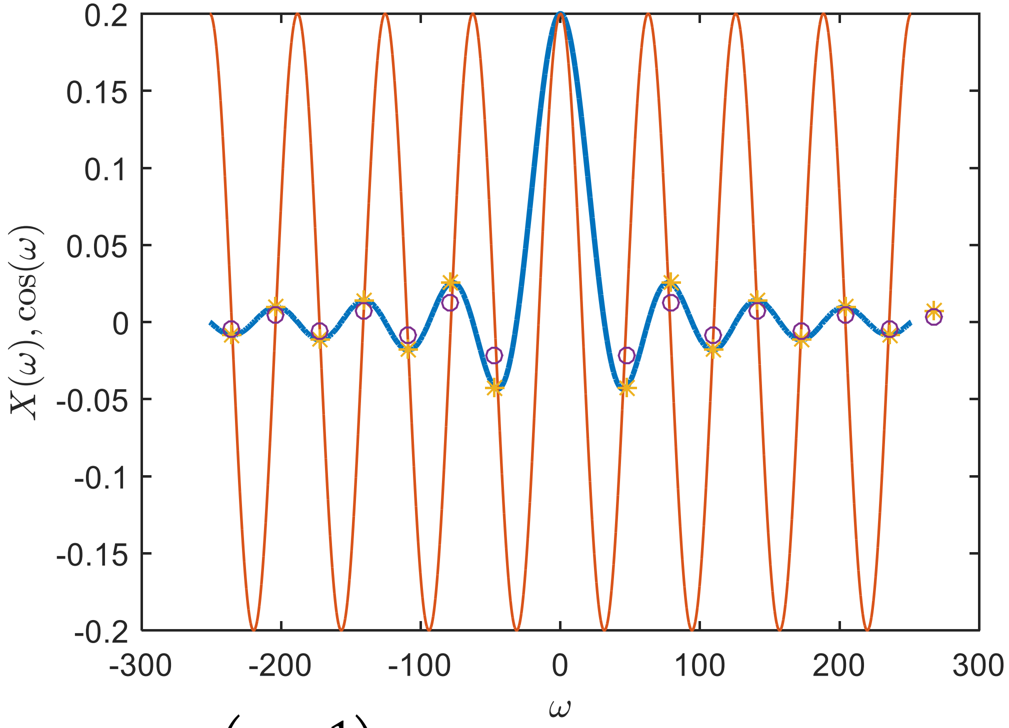


$$X(\omega) = T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T\,\text{sinc}\,(\omega T/2)$$



$$\frac{\partial X(\omega)}{\partial \omega} = 0 \rightarrow a\omega \cos a\omega - \operatorname{sinc} a\omega = 0$$

Portanto, máximos e mínimos da função *sinc* correspondem às intersecções com a função cosseno:




```
%% Sinais singulares
%sinc(x)=sin(pi*x)/(pi*x)

clear all ; close all ; clc
a=0.1; % a=T/2
x = -80:.01:80;
y=x*a;
plot(x.*pi,2*a*sinc(y),'LineWidth',2)
hold on
plot(x.*pi,2*a*cos(pi*y),'LineWidth',1)
hold on
n=-8:1:-2;
n=[n 1:1:8];
plot((n+1/2).*pi/a,2*a*sinc((n+1/2)),'*')
hold on
xn=(n+1/2).*pi/a;
zn=a*(-1).^n./((n+1/2)*pi);
plot(xn,zn,'o')
xlabel('$\omega$','Interpreter','latex');
ylabel('$X(\omega ), \cos(\omega
)$','Interpreter','latex');
set(gca,'FontSize',12)
```

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}, \qquad n > 0 \text{ ou } n < -1$$

$$X(\omega_n) \cong \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}}$$

n ímpar leva a um mínimo local e *n* par a um máximo local.

Diagrama de módulo

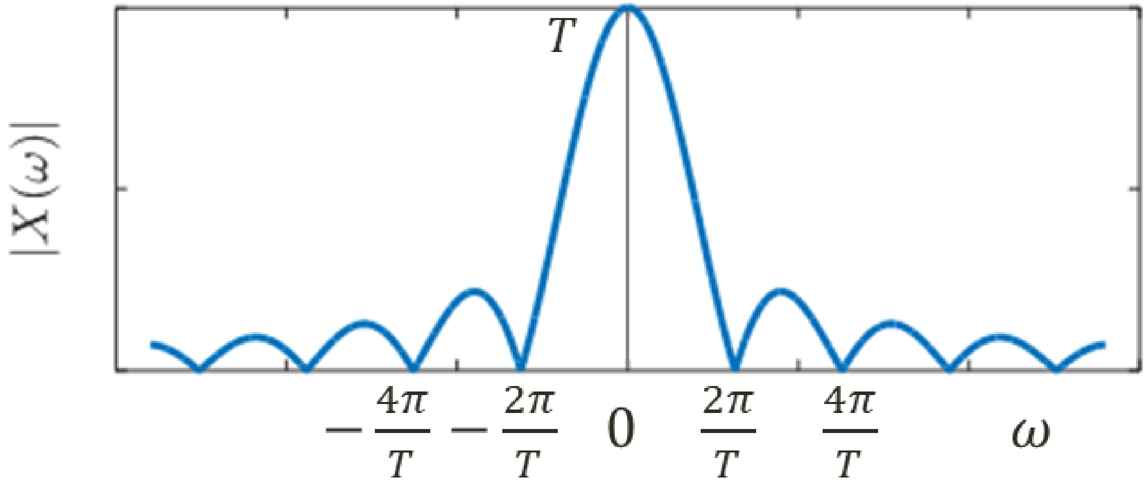
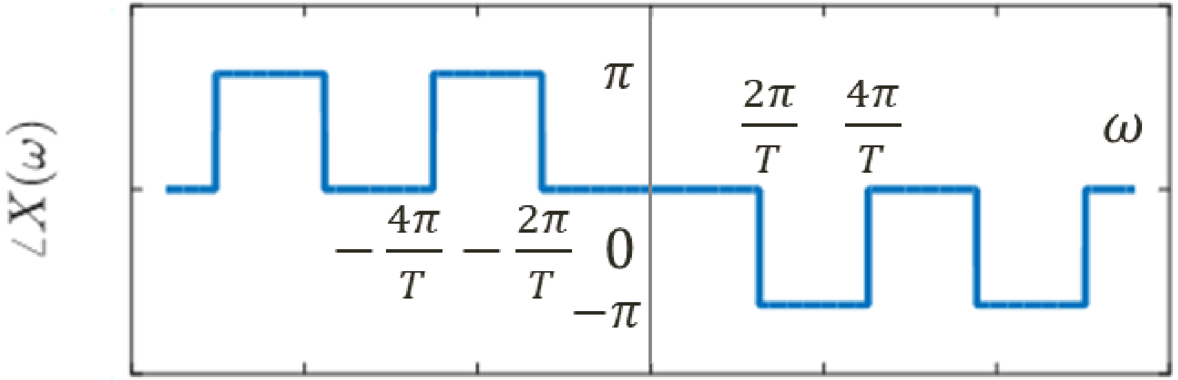


Diagrama de fase

Para $\omega > 0$: $\angle X(\omega) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ X(\omega) > 0 \\ -\pi \ \ se \ \ X(\omega) < 0 \end{cases}$

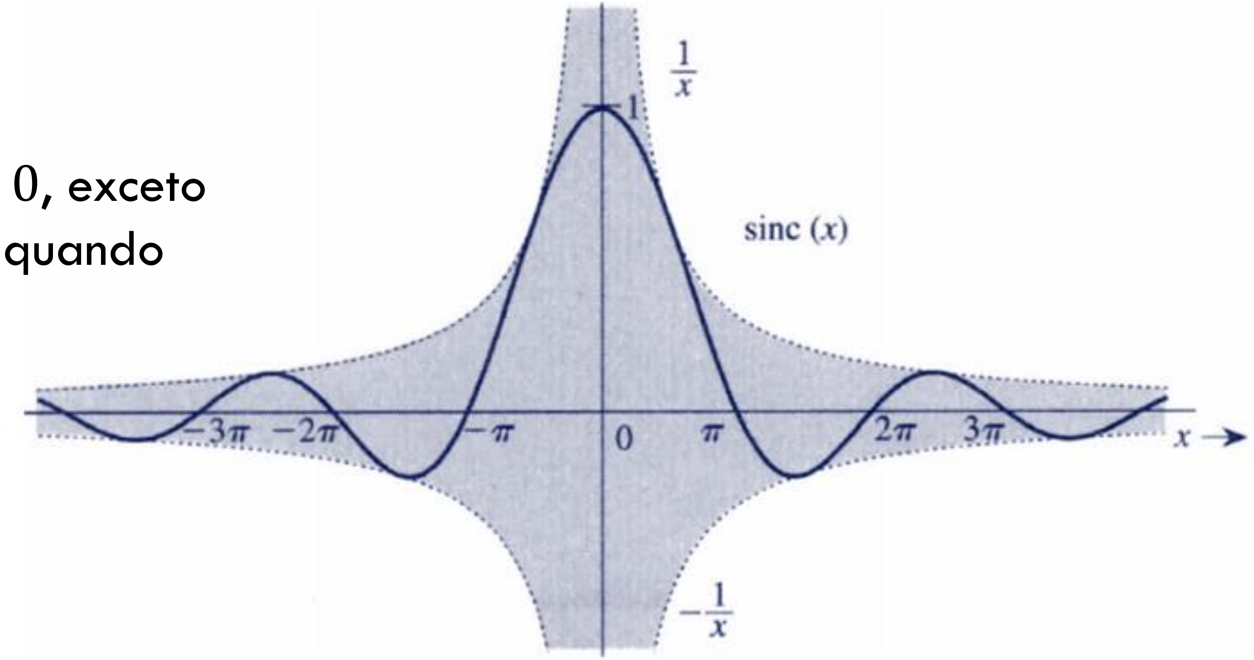


AFINAL, O QUE É A FUNÇÃO SINC?

$\text{sinc}\,(x)$ é o produto de um sinal de oscilação $\sin(x)$ pela função decrescente $1/x$. Por isso, é um amortecimento da oscilação com período 2π e amplitude decrescente $1/x$

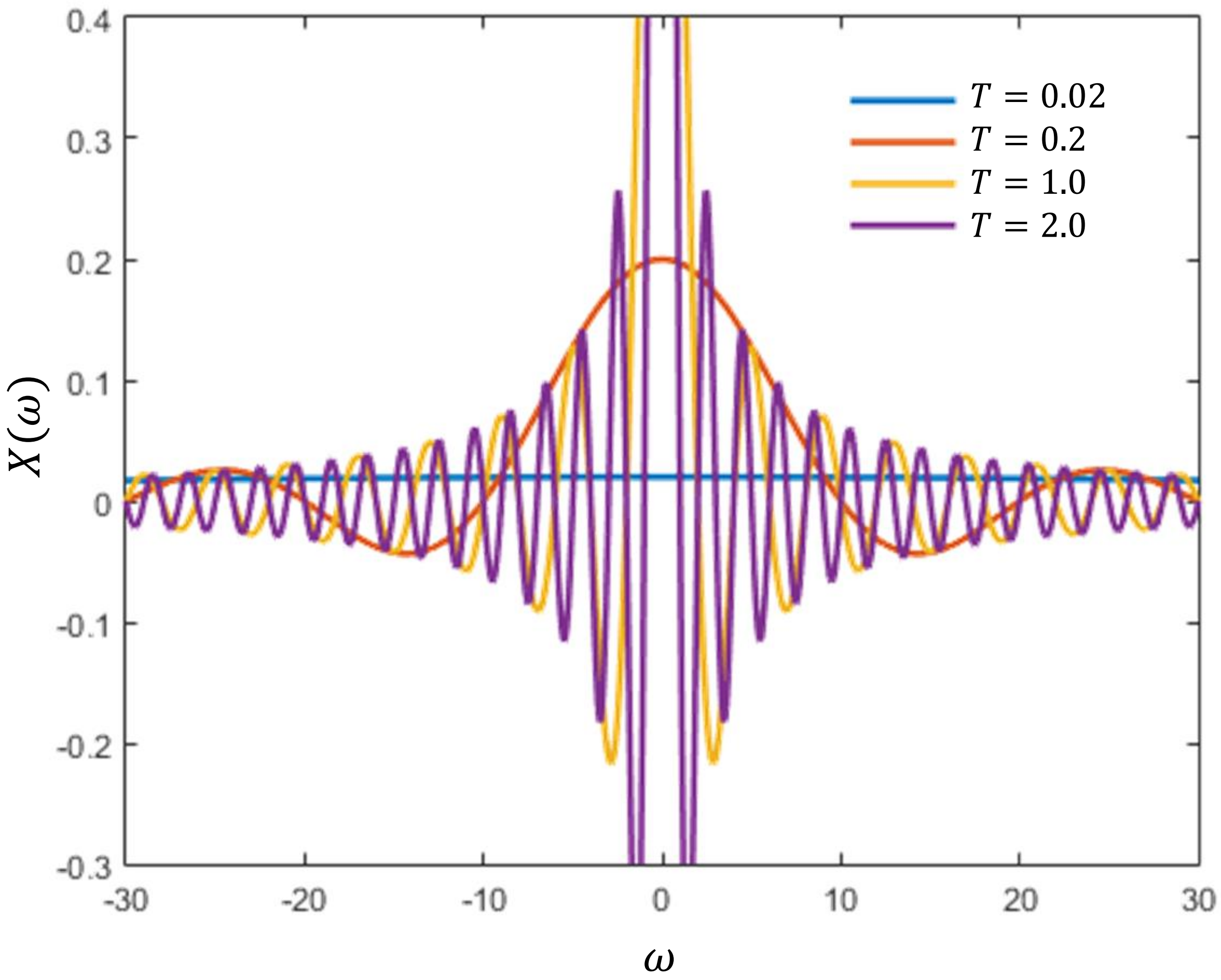
$\text{sinc}(x)$ é uma função par de x

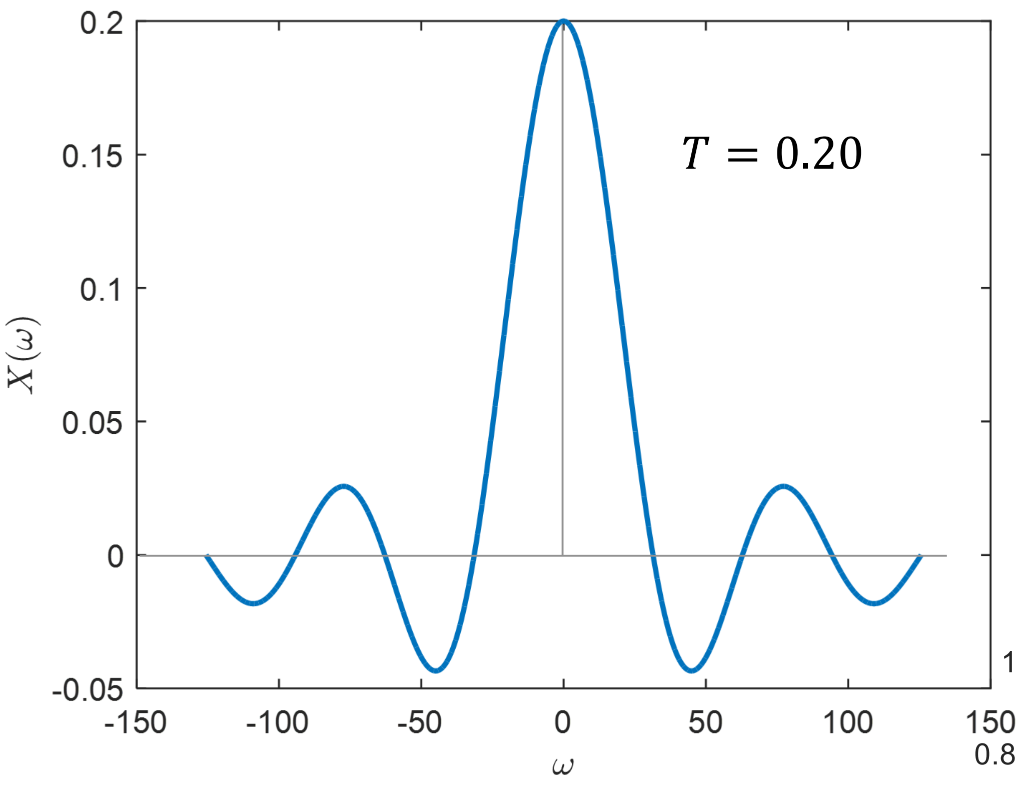
$\text{sinc}(x) = 0$ quando $\sin(x) = 0$, exceto quando $x = 0$. Isto é, somente quando $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$



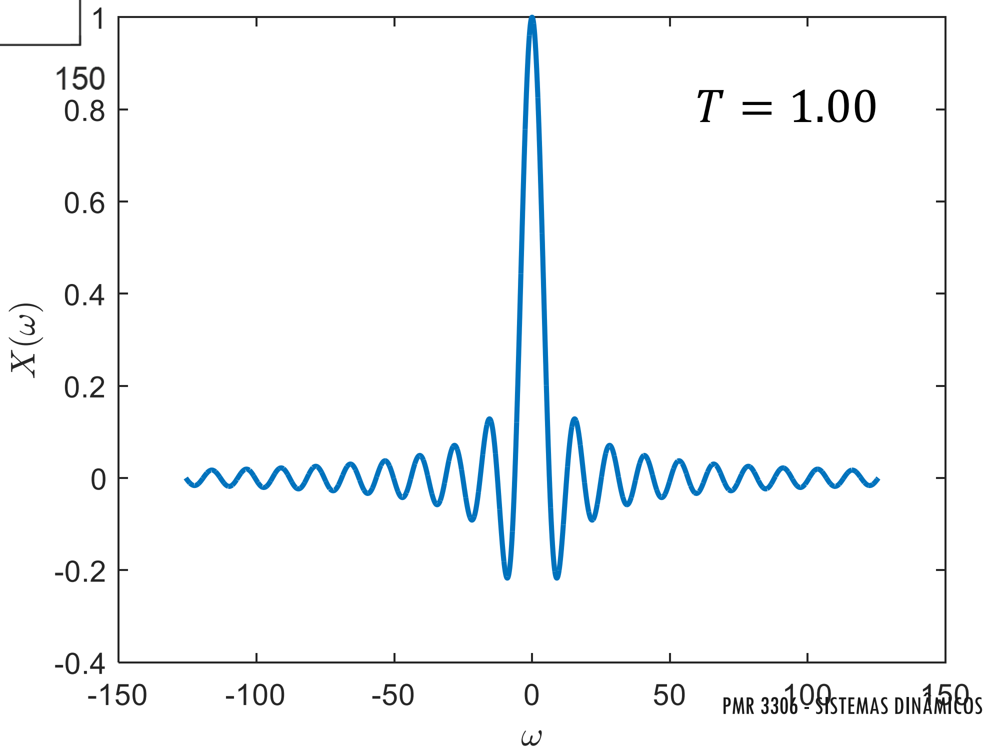
$\text{sinc}\,(0) = 1$ (L'Hôpital)

$$X(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\,(\omega T/2)$$





0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
$X(\omega)$
-150
-100
-50
0
50
100
150
ω
$T = 0.20$



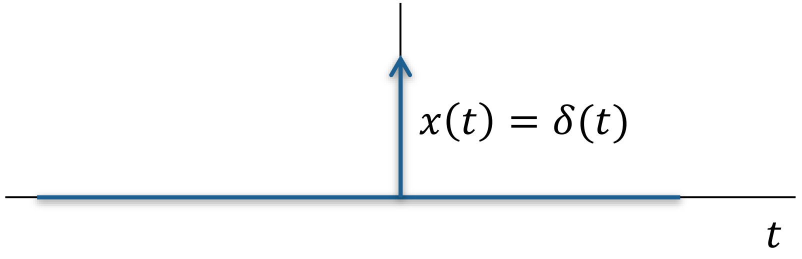
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
$X(\omega)$
-150
-100
-50
0
50
100
150
ω
$T = 1.00$

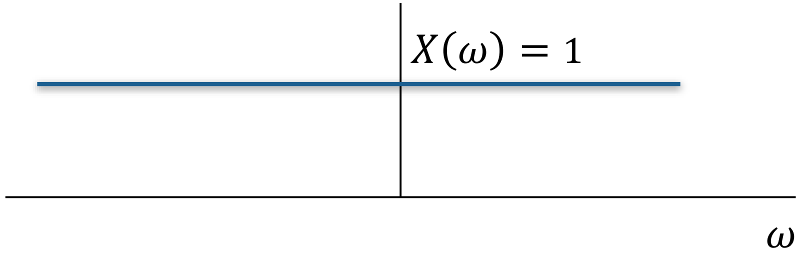
FT PARA IMPULSO UNITÁRIO $\delta(t)$

Se $x(t) = \delta(t)$,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

Impulso unitário contém componente em todas as frequências.





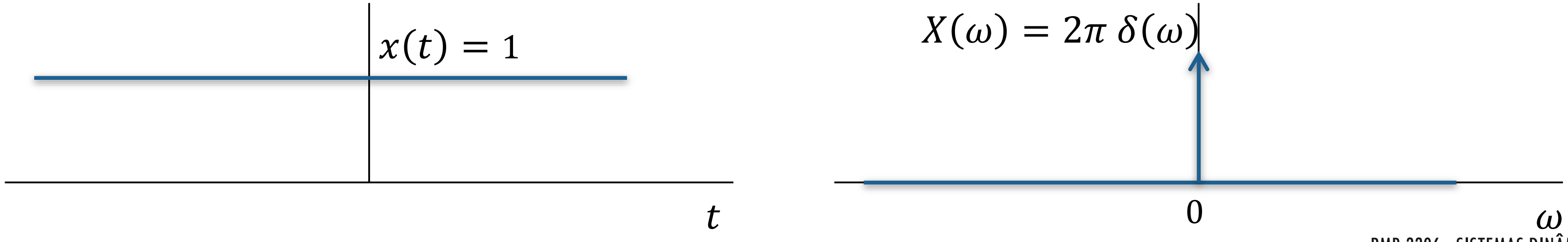
INVERSA DA FT PARA $\delta(\omega)$

Se,

$$X(\omega) = 2\pi\ \delta(\omega)$$

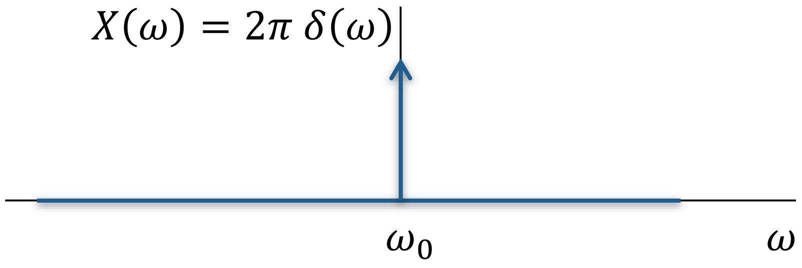
Então, aplicando-se a equação de síntese da FT,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = 1$$



INVERSA DA FT PARA $\delta(\omega - \omega_0)$

Se,



$X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$

Então, aplicando-se a equação de síntese da FT,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

- Similarmente:
- $X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = e^{-j\omega_0 t}$
- $X(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-j\omega_0 t}$

ENTÃO....

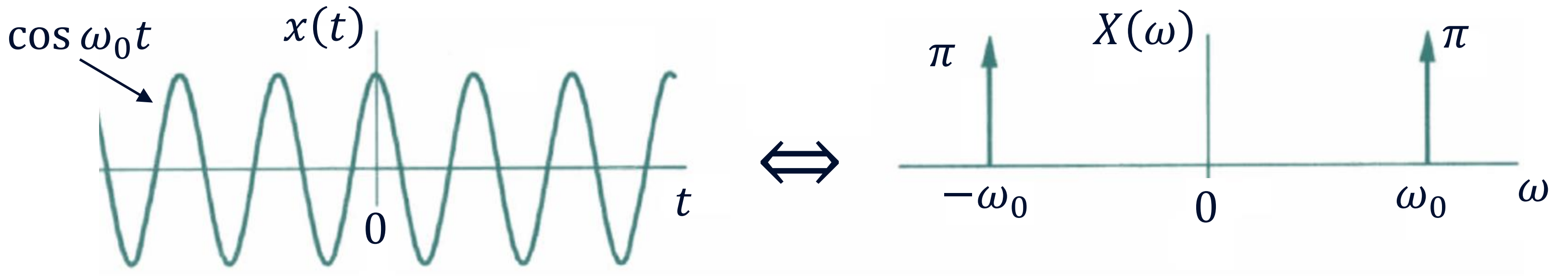
$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\mathrm{rect}\ (t/2a)$	$2a\ \mathrm{sinc}\ (\omega a)$

TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO COSSENO $\cos \omega_0 t$

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$X(\omega) = \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right]$$

Espectro de sinal cosseno tem dois impulsos em frequências positiva e negativa.



FT PARA QUALQUER SINAL PERIÓDICO

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{jn\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

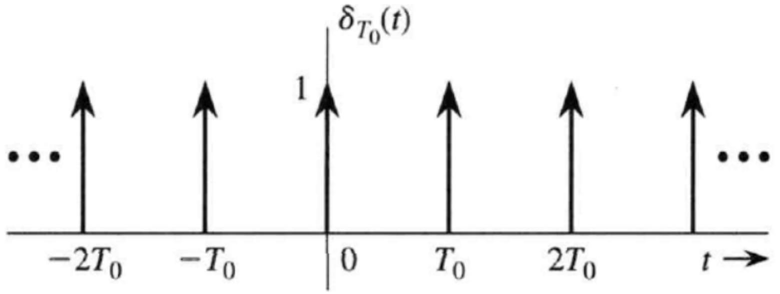
$X(\omega)$ define a transformada de Fourier para sinais periódicos em função dos coeficientes $X[n]$ da série de Fourier exponencial.

Ou seja, FT de um sinal periódico é uma versão amostrada ! Resulta em um espectro discreto com impulsos nos harmônicos $n\omega_0$ de amplitude igual ao coeficiente da série de Fourier naquele harmônico multiplicado por 2π.

FT PARA UM TREM DE IMPULSOS

Então, considere agora um trem de impulso

$$x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

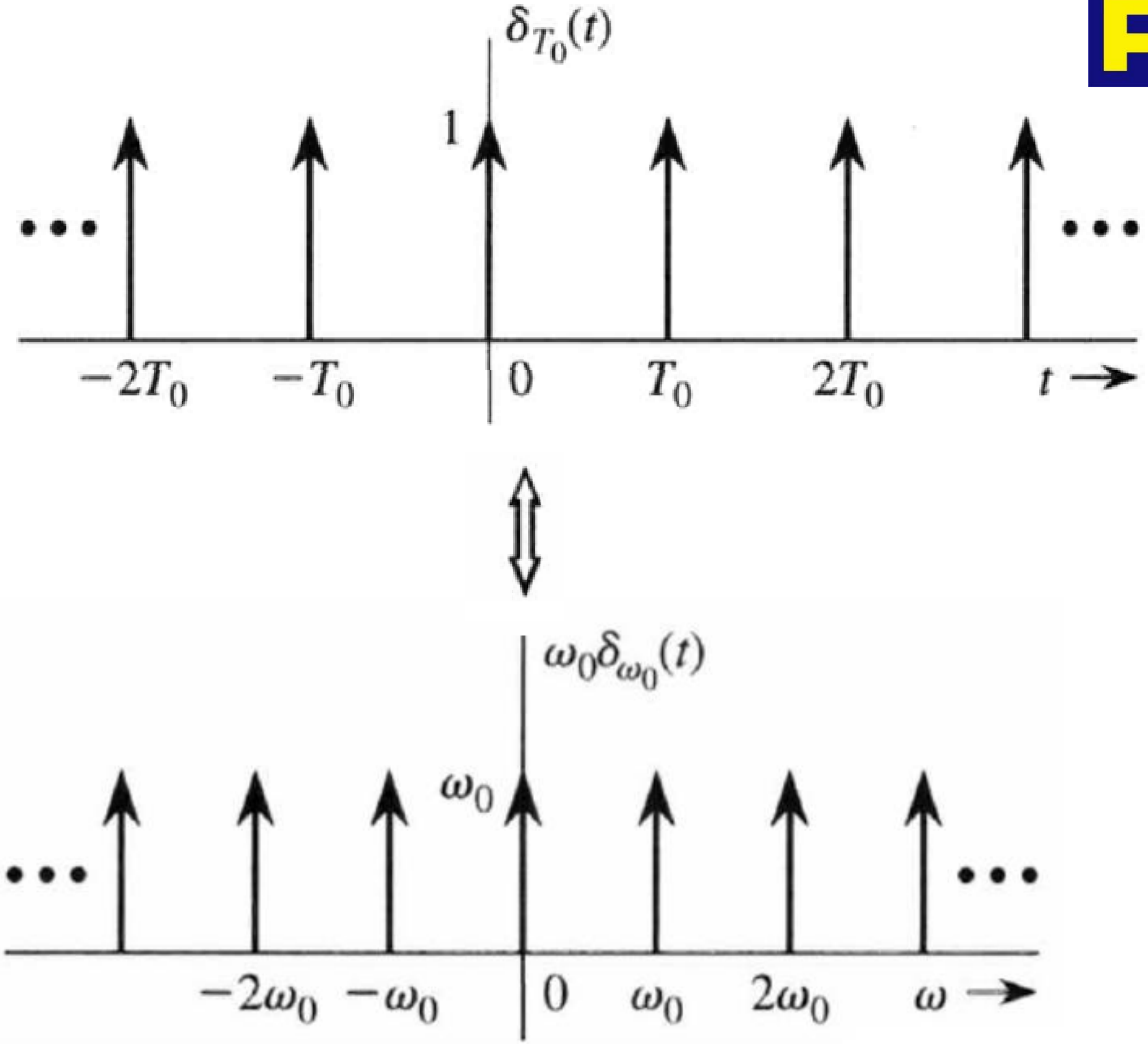


A série de Fourier desse impulso pode ser definida como,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}, \qquad X[n] = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \qquad X[n] = \frac{1}{T_0}$$


$\delta_{T_0}(t)$
1
$-2T_0$
$-T_0$
0
T_0
$2T_0$
$t \rightarrow$
$\omega_0\delta_{\omega_0}(t)$
ω_0
$-2\omega_0$
$-\omega_0$
0
ω_0
$2\omega_0$
$\omega \rightarrow$

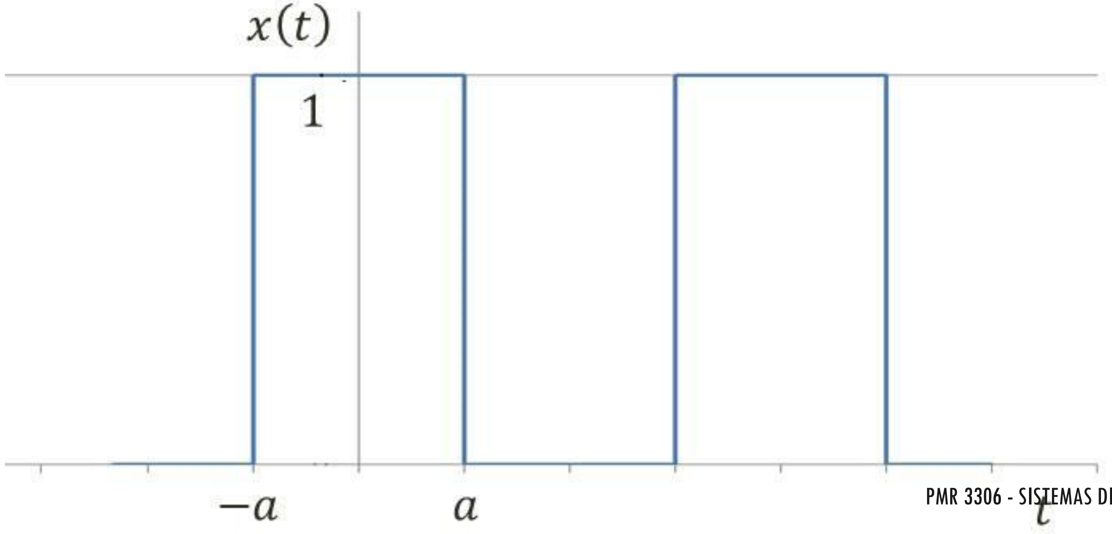
FUNÇÃO RETANGULAR

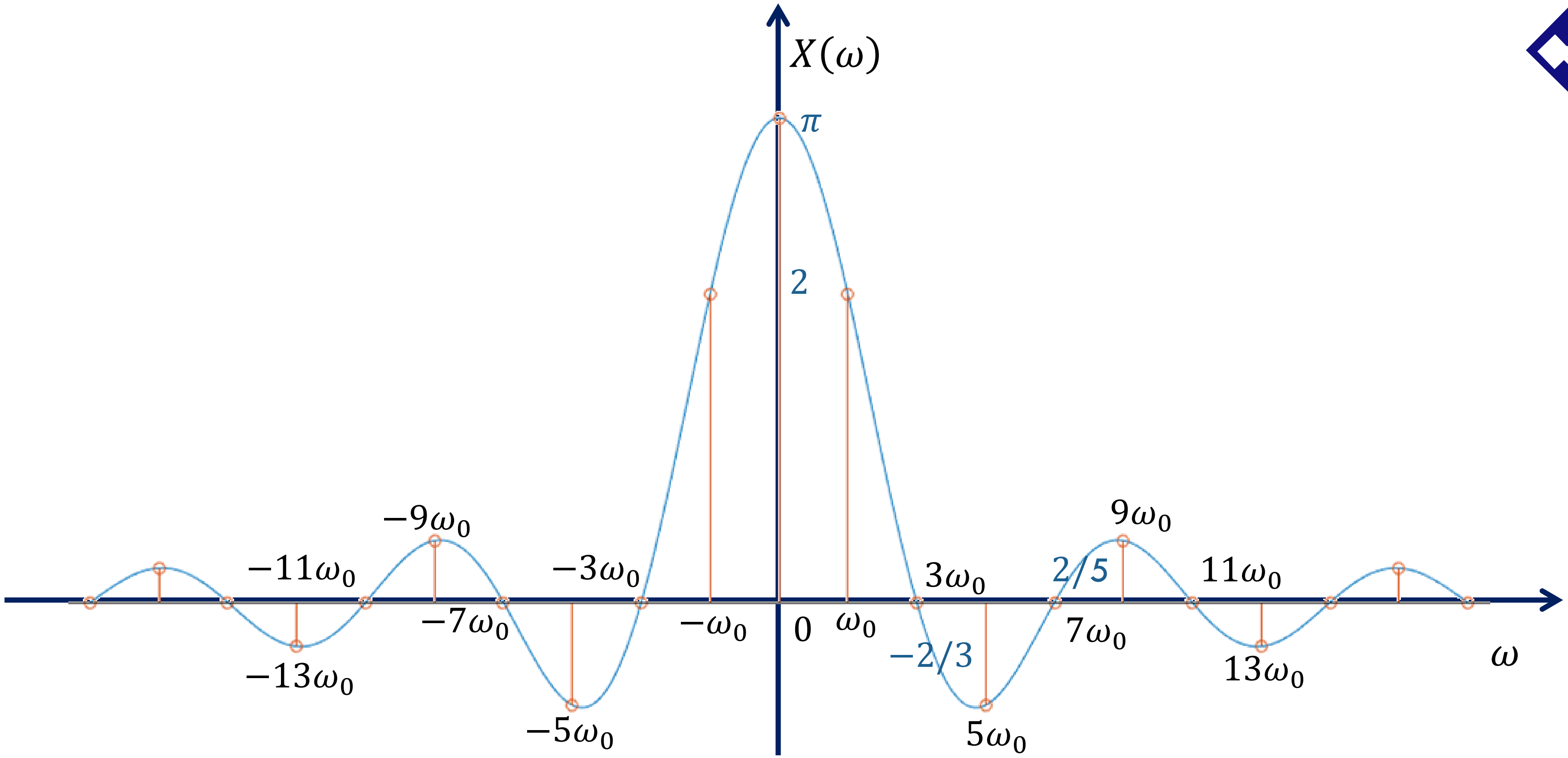
- Suponha que a função retangular do exemplo anterior seja estendida e transformada em uma função periódica…

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |t| < a \\ 0, & \text{se} \quad a < |t| < T/2 \end{cases}$$

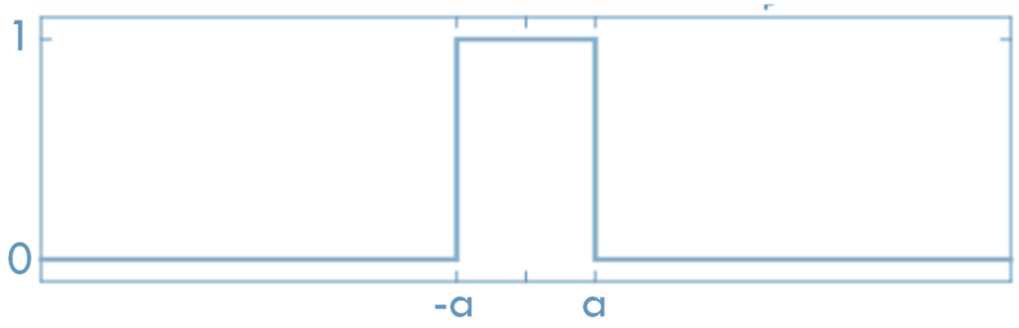
$$x(t+T) = x(t)$$

$$T = 4a, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2a}$$





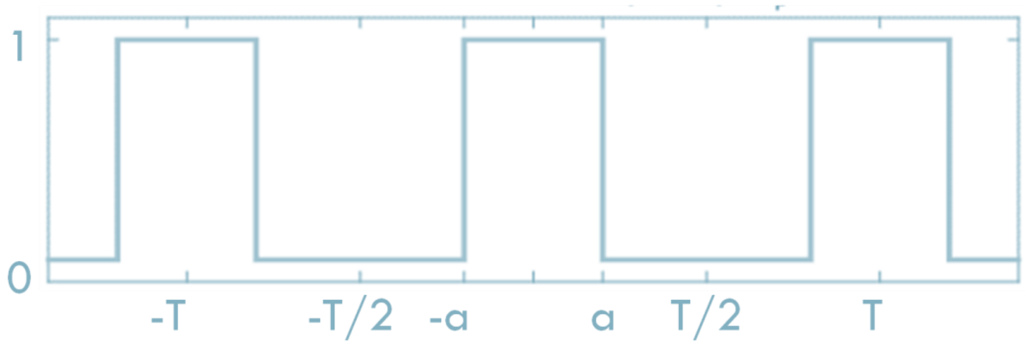
$$a = 1, \qquad T = 4a, \qquad \omega_0 = \pi/2$$



$$X(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(\omega a)$$

Se $x_T(t)$ é a extensão periódica de $x(t)$, com o período T, então os coeficientes da Transformada de Fourier, $X_T(\omega)$, de $x_T(t)$, e $X(\omega)$, de $x(t)$, são relacionados por:

$$X_T(\omega) = \frac{2\pi}{T} X(n\omega_0)$$



$$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2a}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 a)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é uma ferramenta muito valiosa na análise de sinais e sistemas no domínio da frequência. As propriedades da FT fornecem *insights* valiosos sobre muitas propriedades ou resultados no processamento de sinal.

LINEARIDADE

A propriedade de linearidade ou de superposição de efeitos estabelece que combinações lineares no domínio do tempo correspondem a combinações lineares no domínio da frequência.

$$ax(t) + by(t) \longrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$$

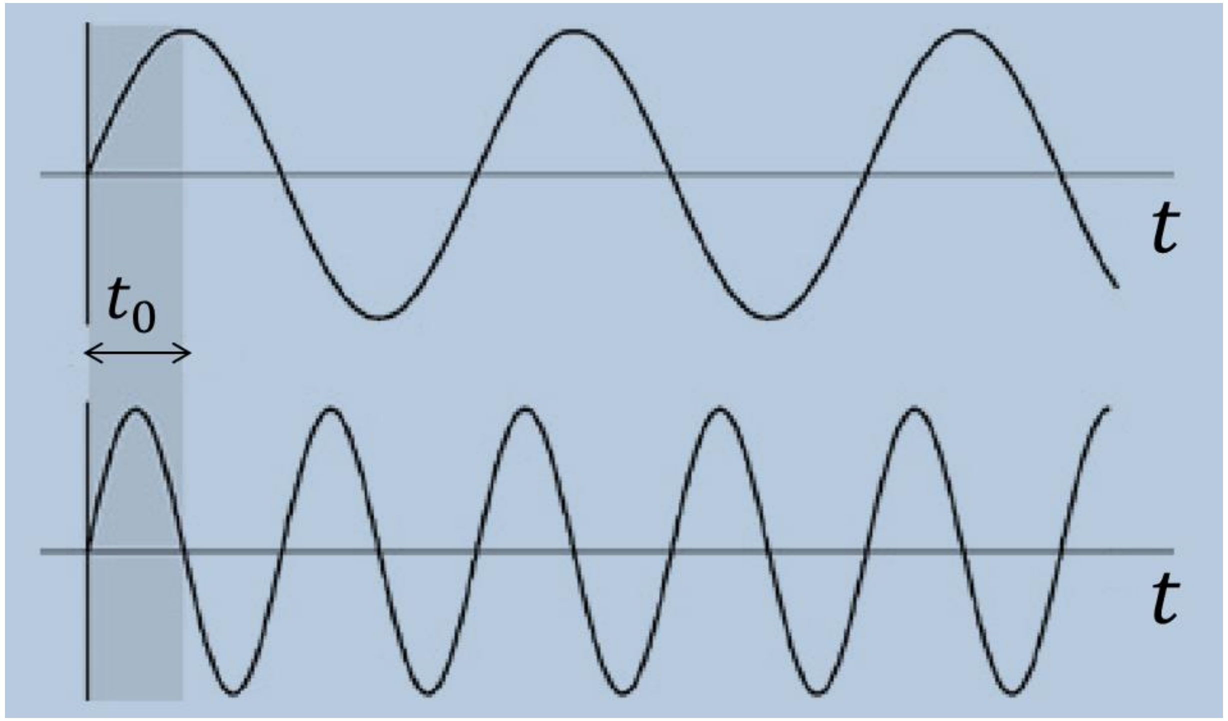
TRANSLAÇÃO NO TEMPO

Transladar um sinal no domínio do tempo faz com que a transformada de Fourier seja multiplicada por uma exponencial complexa.

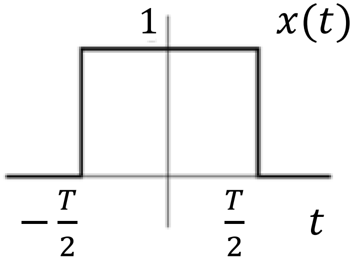
$$x(t - t_0) \xrightarrow[CTFT]{} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Este resultado mostra que retardar um sinal por t_0 segundos não altera o espectro de amplitude. O espectro de fase, no entanto, é alterado por $-\omega t_0$.

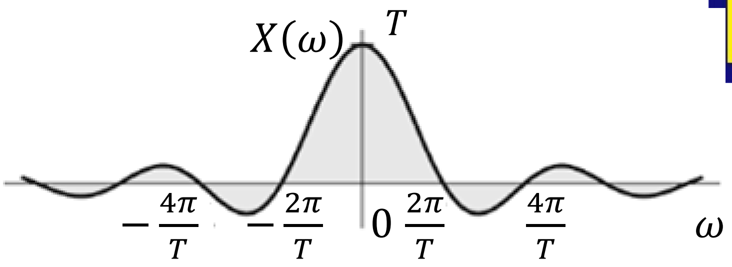
$\cos \omega t$ atrasado de t_0 é dado por: $\cos(\omega t - \omega t_0)$



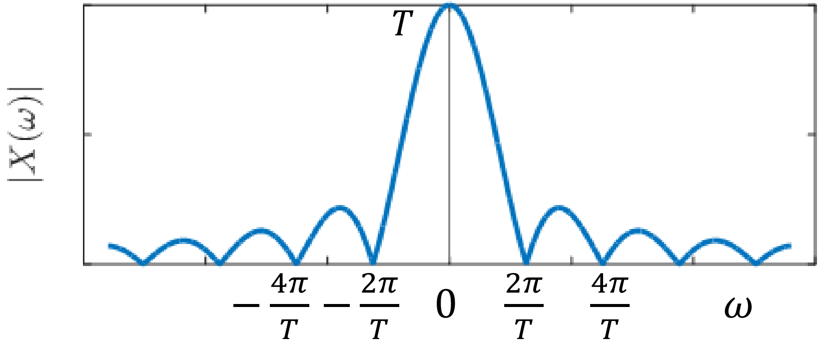
O princípio do desvio de fase linear é muito importante, e vamos encontrá-lo novamente, por exemplo, filtragem de sinal sem distorção.



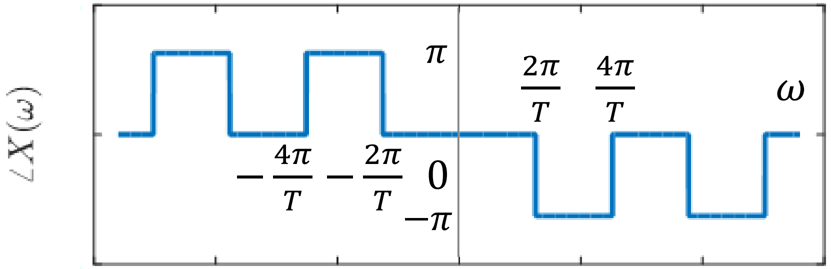
1
x(t)
− T/2
T/2
t



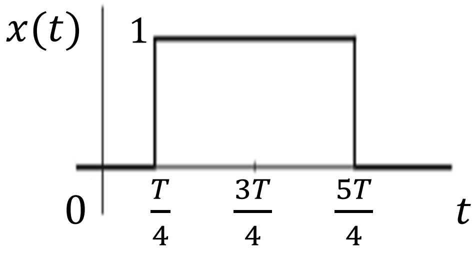
X(ω)
T
− 4π/T
− 2π/T
0
2π/T
4π/T
ω



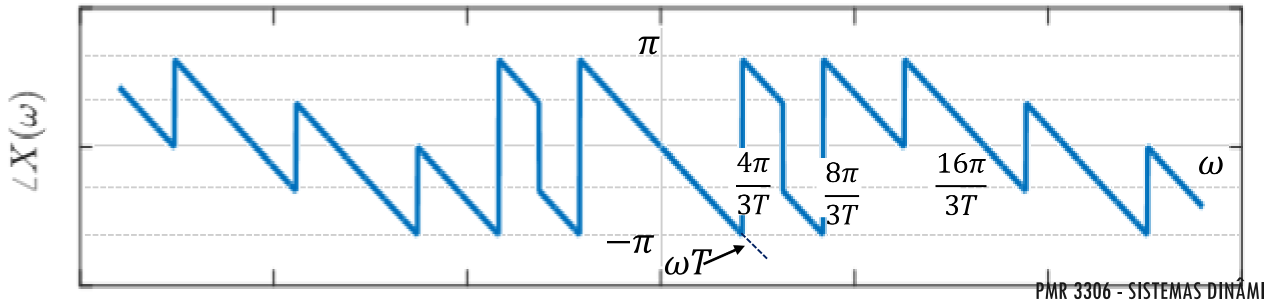
|X(ω)|
T
− 4π/T
− 2π/T
0
2π/T
4π/T
ω



∠X(ω)
π
2π/T
4π/T
ω
− 4π/T
− 2π/T
0
−π



x(t)
1
0
T/4
3T/4
5T/4
t

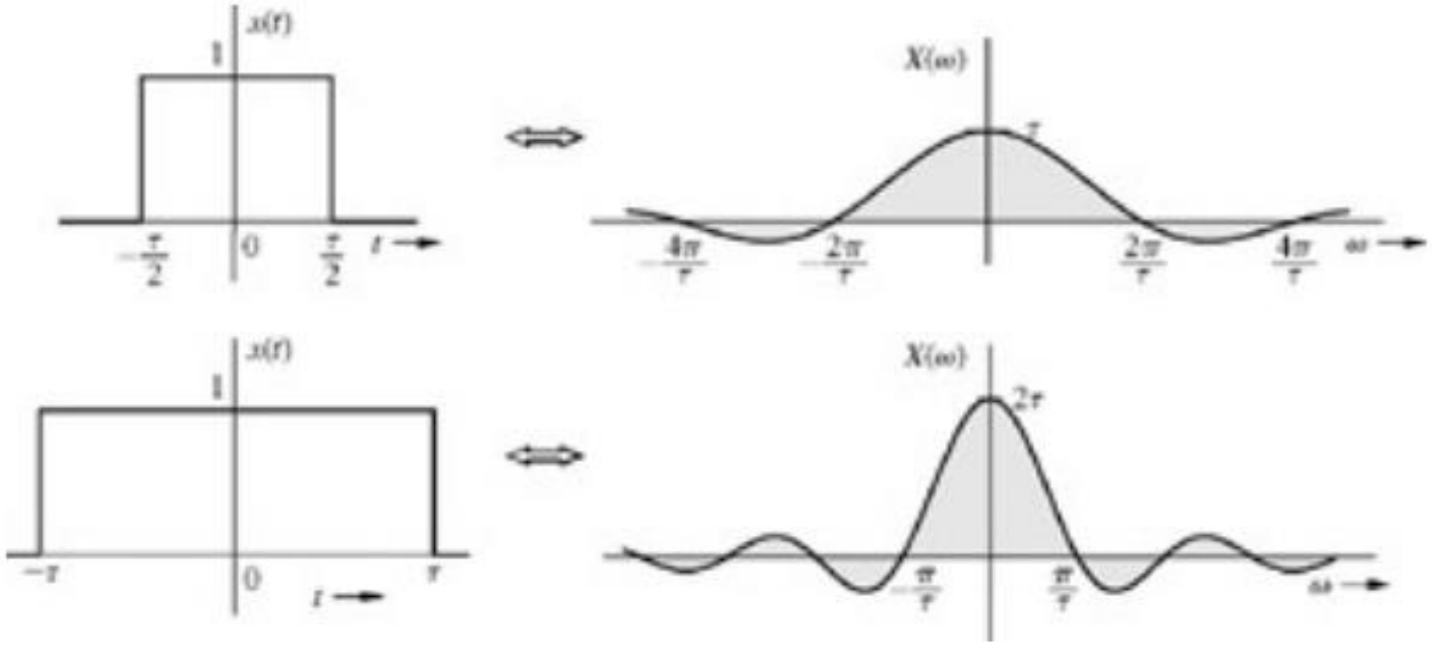


∠X(ω)
π
4π/3T
8π/3T
16π/3T
ω
−π
ωT

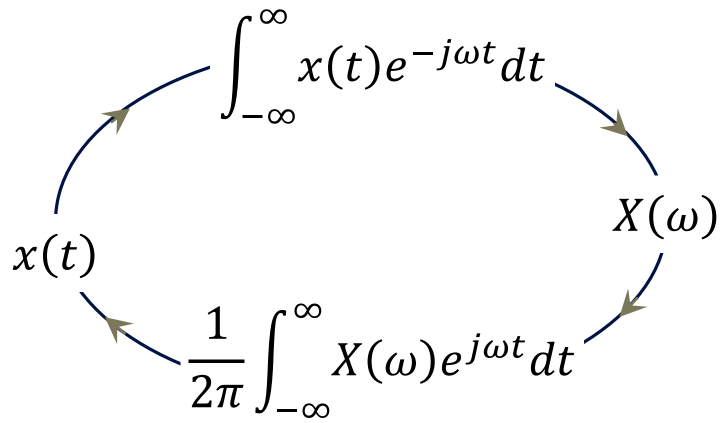
ESCALONAMENTO NO TEMPO

- A compressão de um sinal no domínio do tempo resulta numa expansão no domínio da frequência e vice-versa.

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



DUALIDADE



- Transformada direta e inversa são similares!

Pequenas diferenças:

- O fator 2π que aparece na equação inversa
- O índice exponencial com sinais opostos

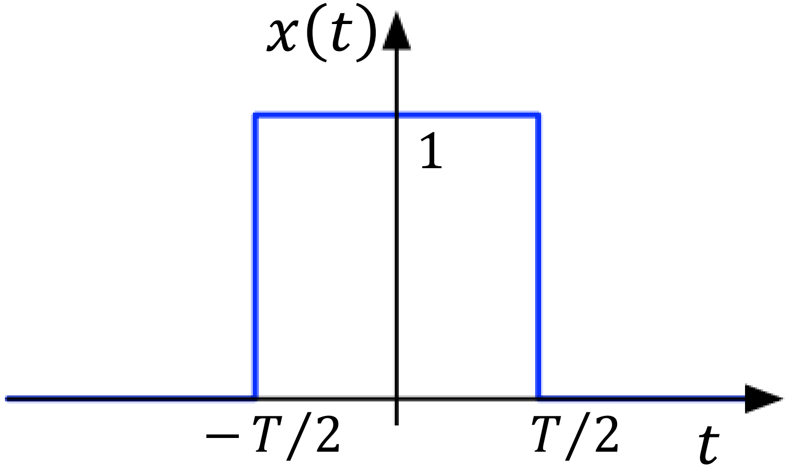
Base para dualidade de tempo e frequência:

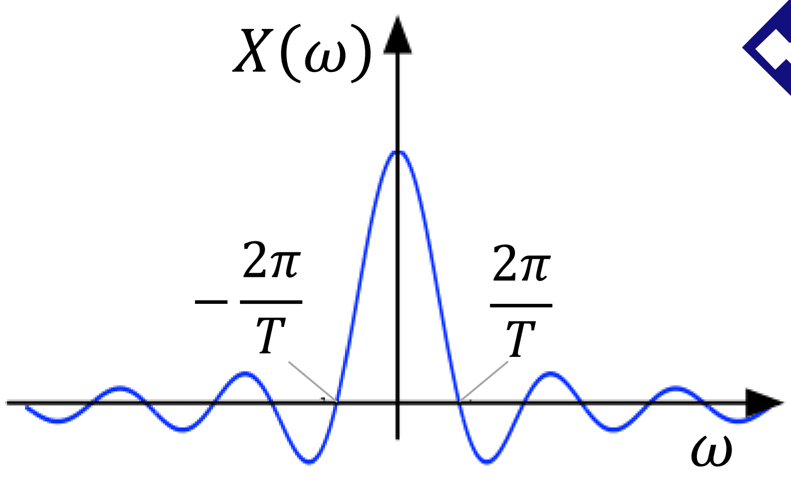
Para qualquer relação entre $x(t)$ e $X(\omega)$, existe uma relação dual, obtida trocando $x(t)$ e $X(\omega)$ (com pequenas modificações),

$$x(t) \xrightarrow[CTFT]{} X(\omega)$$

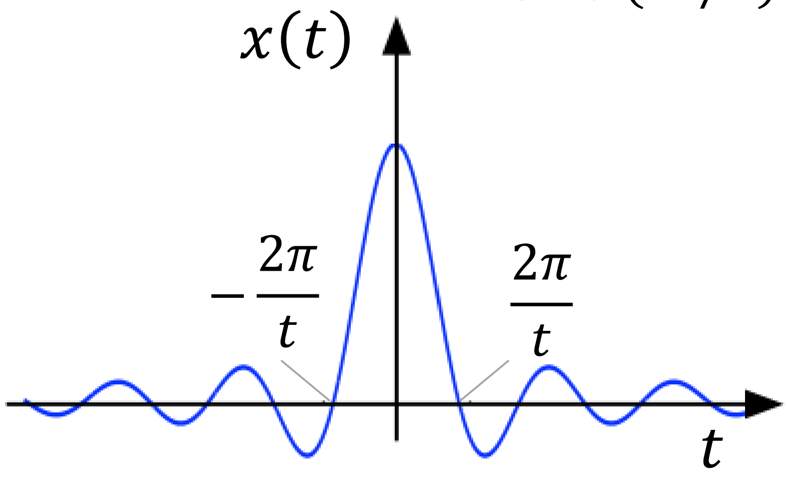
$$X(t) \xrightarrow[CTFT]{} 2\pi\, x(-\omega)$$

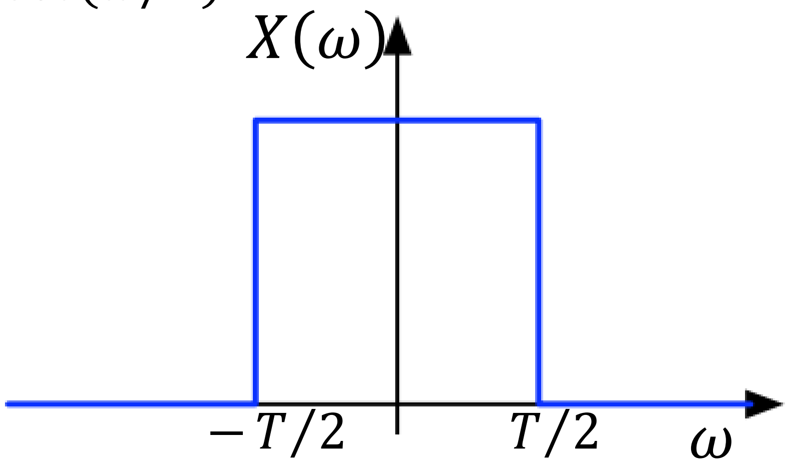
$$rect(t/T) \xrightarrow[CTFT]{} T sinc\,(\omega T/2)$$





$$T sinc\,(tT/2) \xrightarrow[CTFT]{} 2\pi\, rect(\omega/T)$$



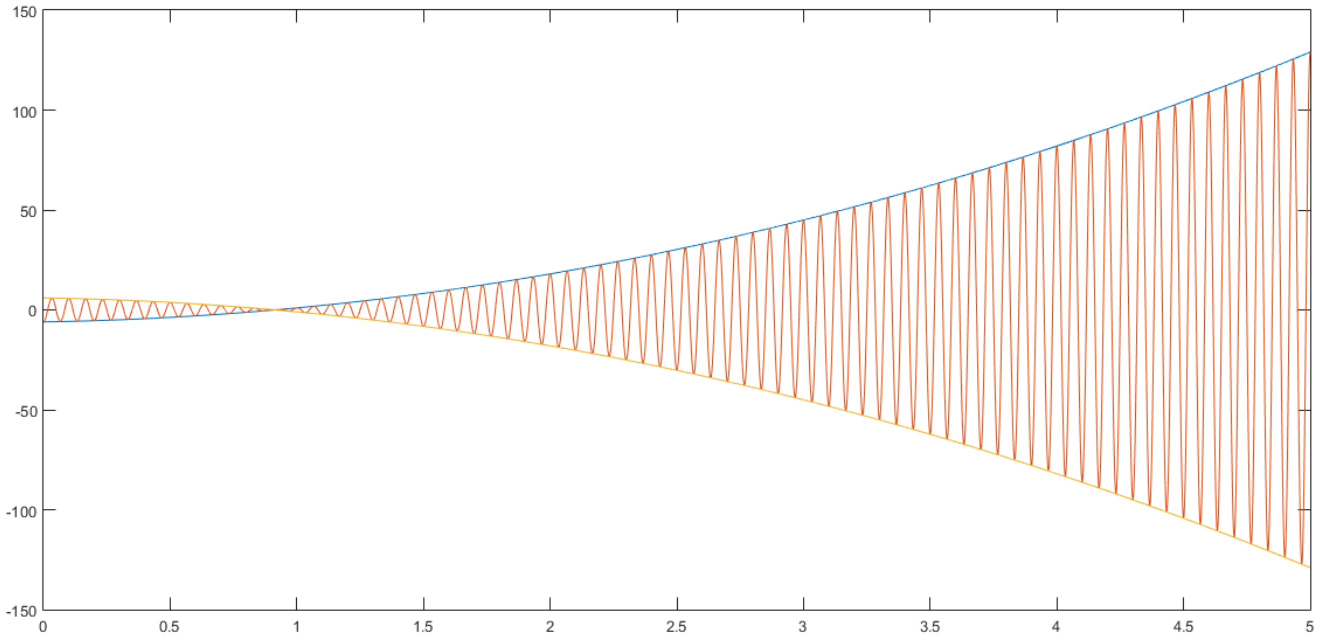


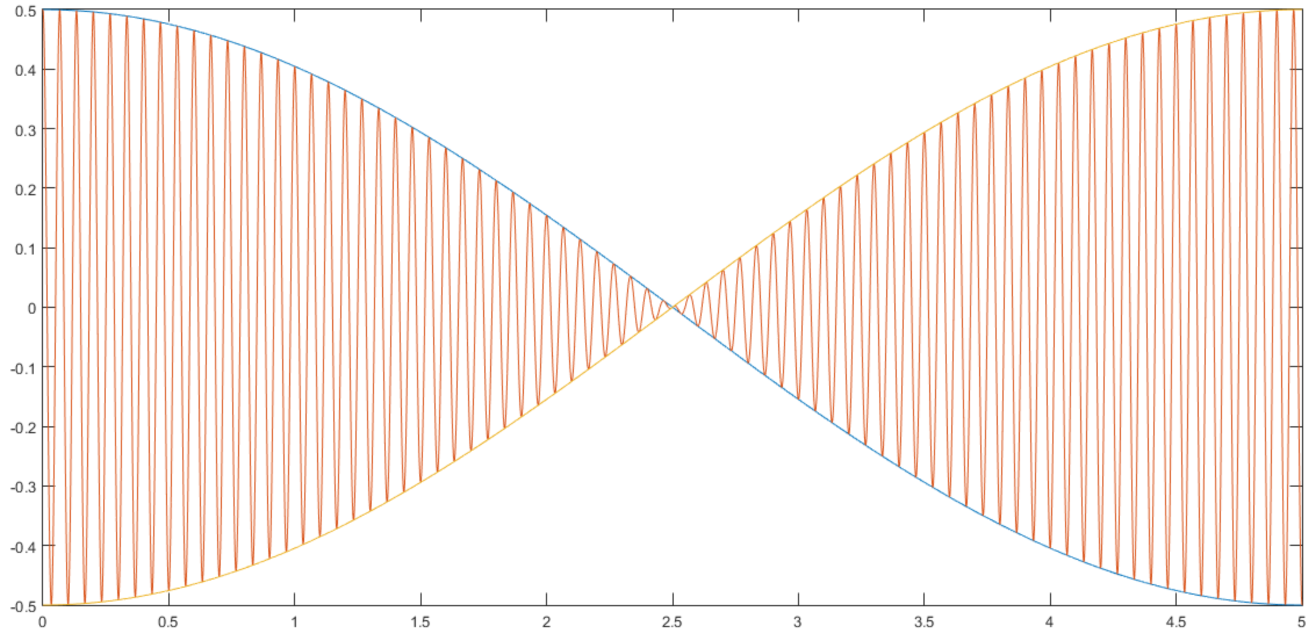
$y(t)$	$Y(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$x(t-t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\, X(\omega-\omega_0)$

TRANSLAÇÃO NA FREQUÊNCIA

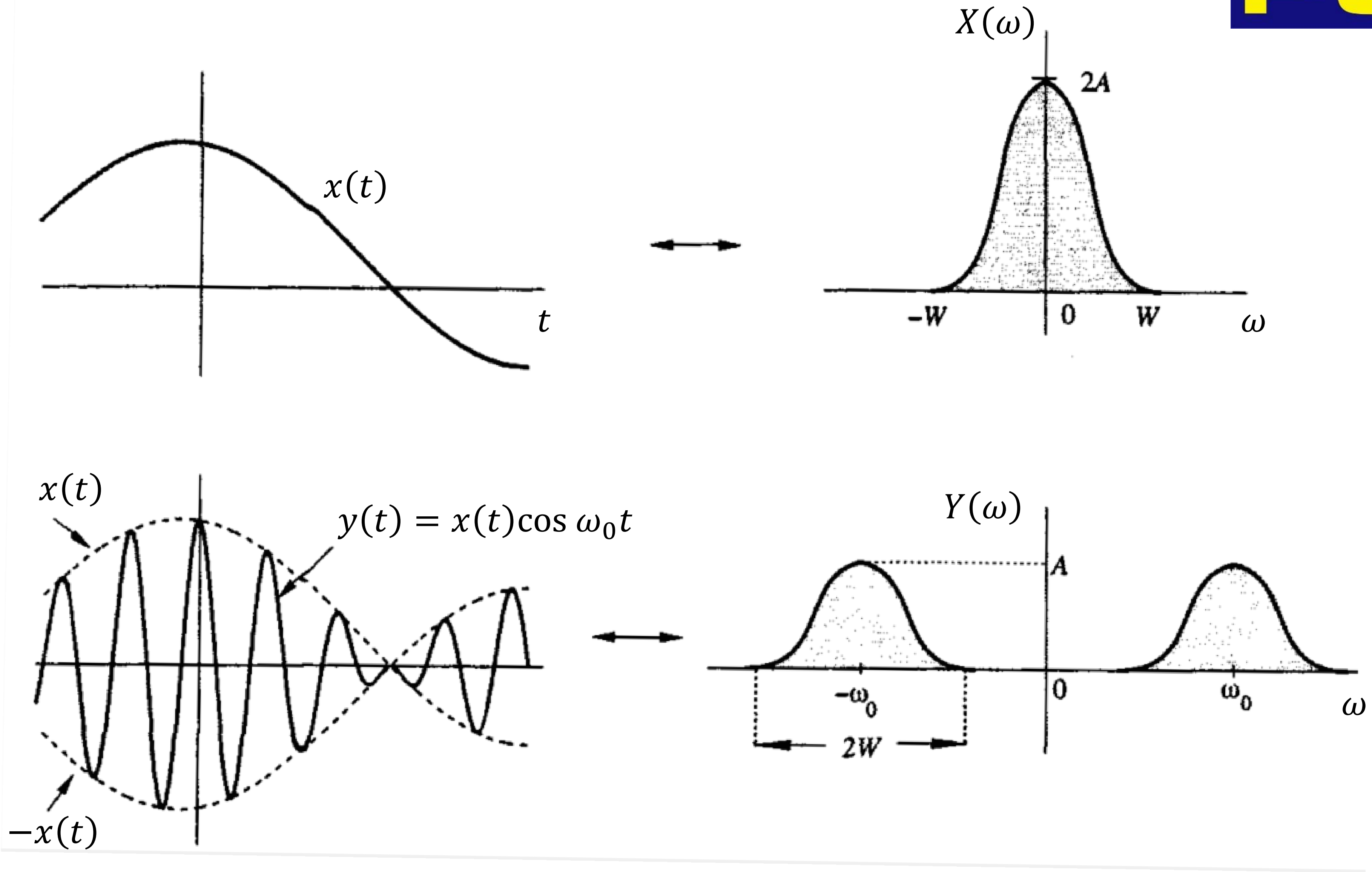
- Devido à propriedade da *dualidade* que acabamos de ver...

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xrightarrow[CTFT]{} 2\pi\, X(\omega - \omega_0)$$






```
t=0:0.0001:5;
w0=30;
x1=0.5*cos(0.2*pi.*t);
x2=5*t.^2+2*t-6;
y1=x1.*cos(w0*pi.*t);
y2=x2.*cos(w0*pi.*t);
plot(t,x1,t,y1,t,-x1)
figure;
plot(t,x2,t,y2,t,-x2)
```



$x(t)$
t
$X(\omega)$
2A
-W
0
W
ω
$x(t)$
$y(t) = x(t)\cos \omega_0 t$
$-x(t)$
$Y(\omega)$
A
$-\omega_0$
0
ω_0
ω
2W

DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO

- A transformada de Fourier converte a operação de diferenciação no tempo na multiplicação por $j\omega$ na frequência.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

CONVOLUÇÃO

- A transformada de Fourier da convolução de dois sinais é o produto das transformadas desses sinais.

$$w(t) = x(t) * y(t) \rightarrow W(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

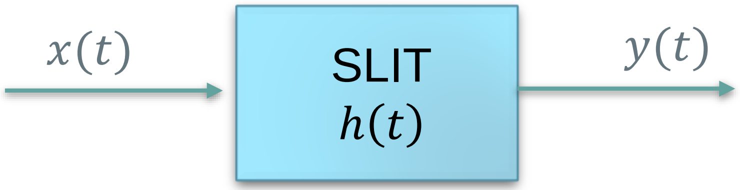
- Portanto,

$$w(t) = x(t)y(t) \rightarrow W(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$$

RESPOSTA IMPULSO E CONVOLUÇÃO

O sistema é completamente caracterizado pela função resposta ao impulso, $h(t)$. A saída $y(t)$, é obtida no domínio do tempo por Convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$



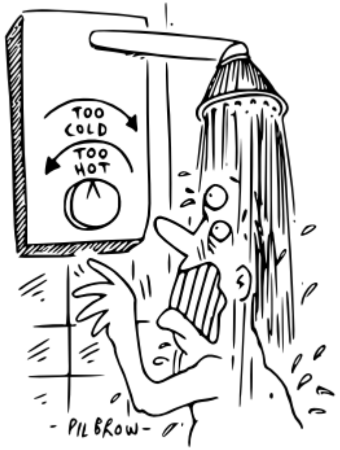
Ou, no domínio da frequência,

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

onde $H(\omega)$ é a resposta em frequência do sistema, definida como a transformada de Fourier de $h(t)$,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

TIME DELAY SYSTEM

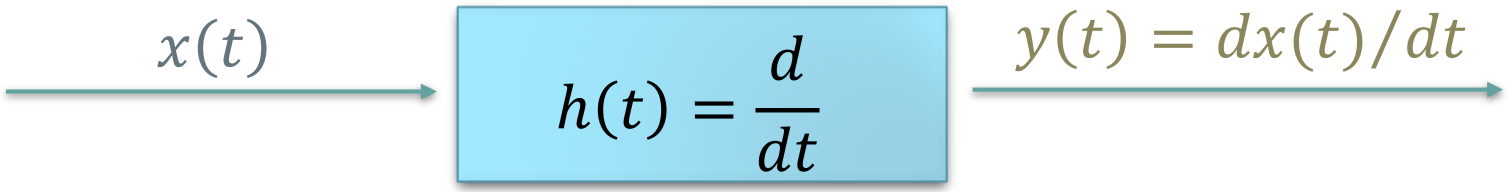


$x(t)$ → $h(t) = \delta(t - t_0)$ → $y(t) = x(t - t_0)$

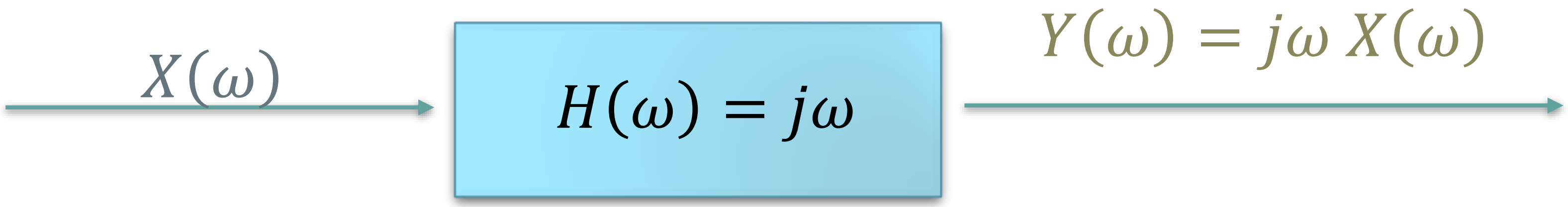
Modelo esquemático do atraso de um sistema

$X(\omega)$ → $H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$ → $Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

DIFERENCIADOR



Modelo esquemático do diferenciador



INTEGRADOR

$x(t)$ → $h(t) = \int_{-\infty}^{t}$ → $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Modelo esquemático do integrador

$X(\omega)$ → $H(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ → $Y(\omega) = X(\omega)/j\omega + \pi\delta(\omega)X(0)$

TRANSFORMADA DE FOURIER

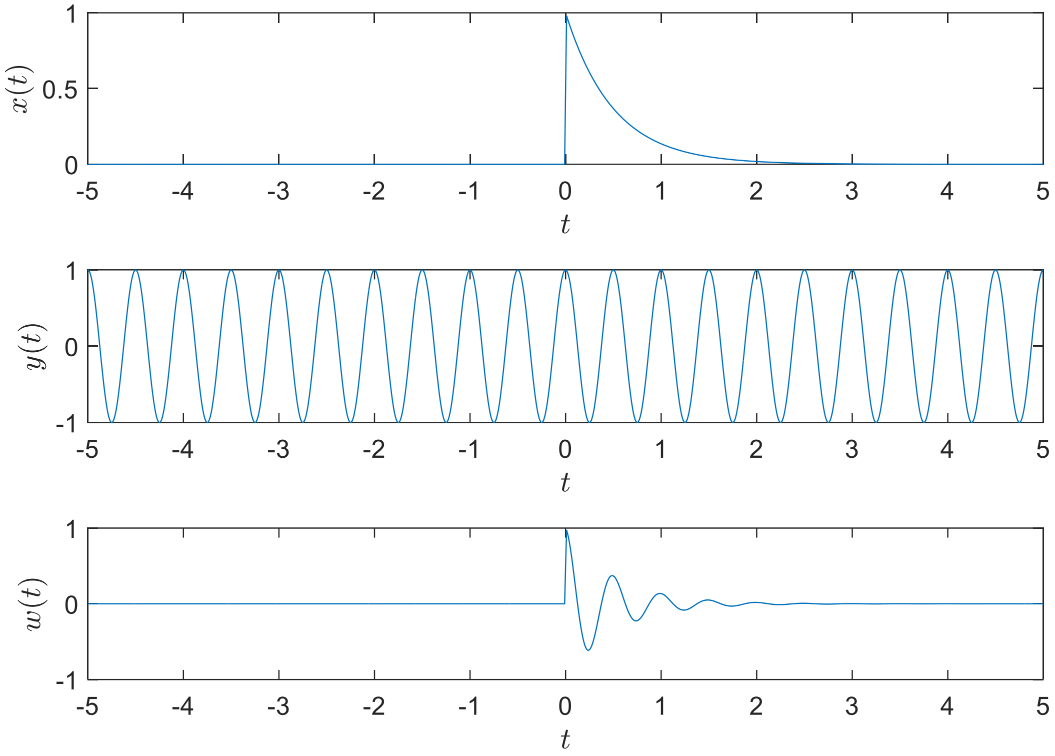
Exercícios

EXEMPLO 1

- Calcule a Transformada de Fourier (TF) de

$$w(t) = x(t)y(t),$$

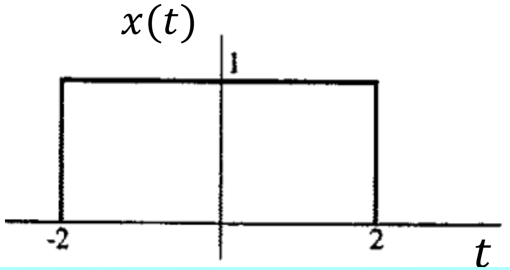
- onde,
  - $x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$
  - $y(t) = \cos \omega_0 t$
- Plote a amplitude no domínio da frequência

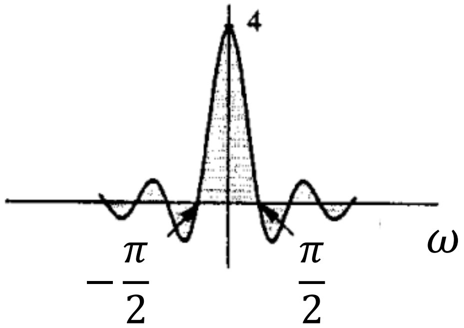


EXEMPLO 2

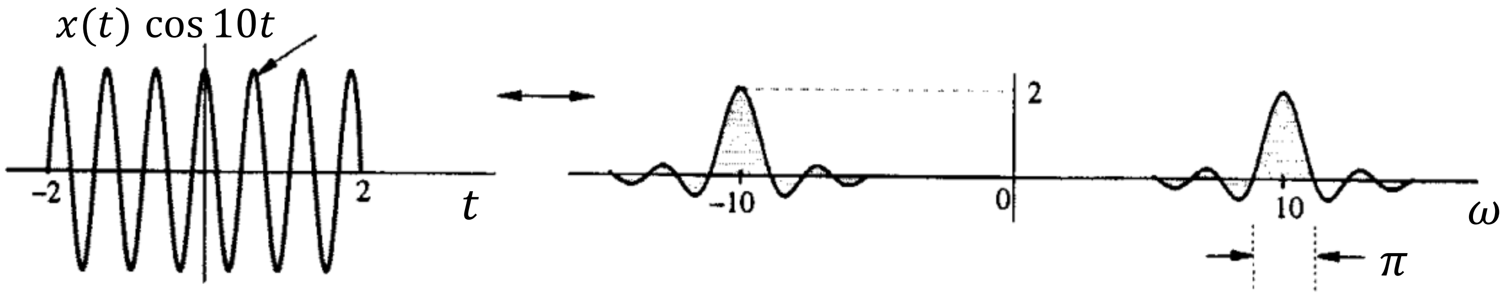
- Calcule a Transformada de Fourier do sinal modulado $w(t) = x(t)y(t)$, onde $x(t) = rect(\frac{t}{4})$ e $y(t) = \cos 10t$.

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leqslant \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \overset{\mathcal{F}_\omega}{\longleftrightarrow} \quad T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



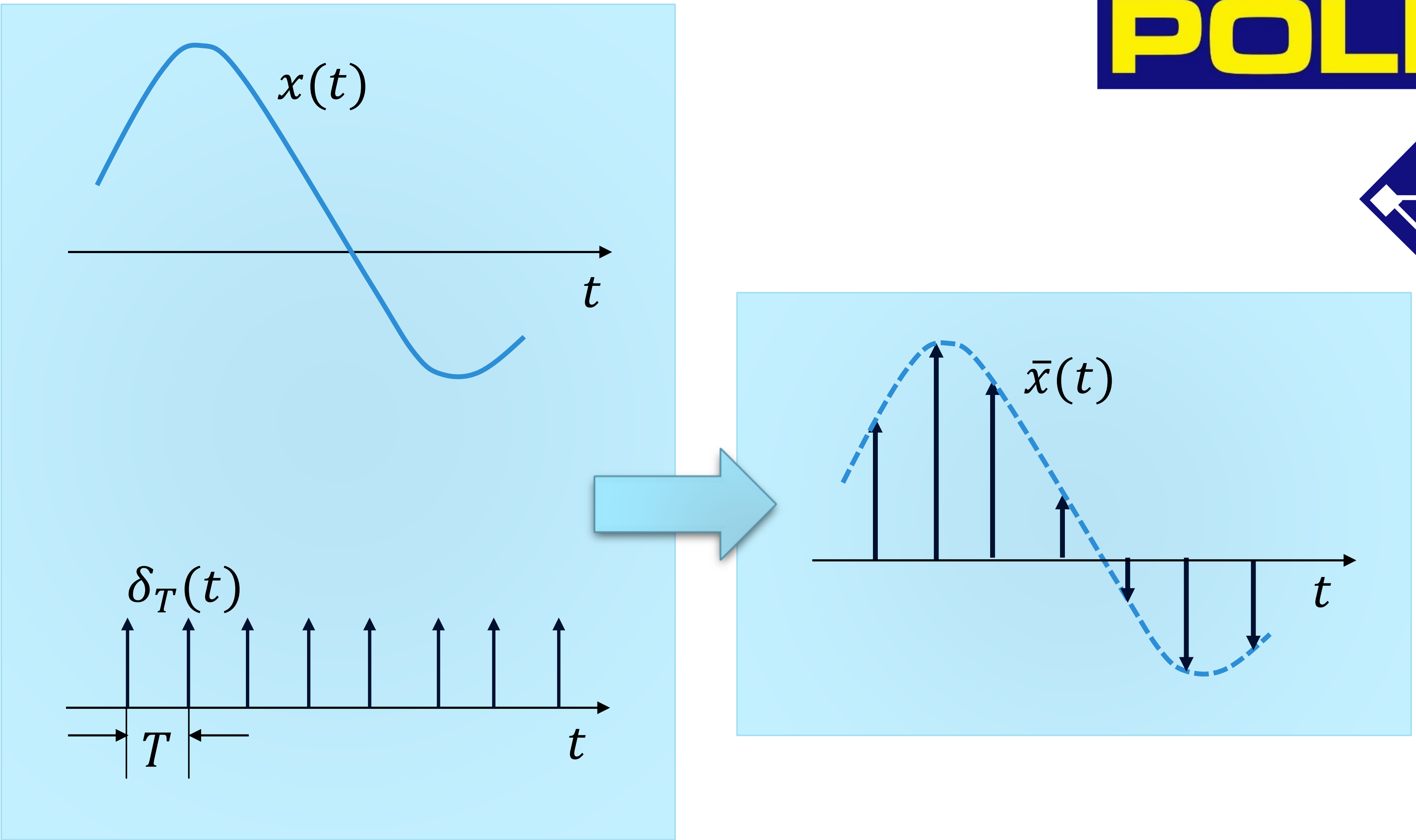


$$\cos(\omega_0 t + \phi) \quad \overset{\mathcal{F}_\omega}{\longleftrightarrow} \quad \pi\left[e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0)\right]$$



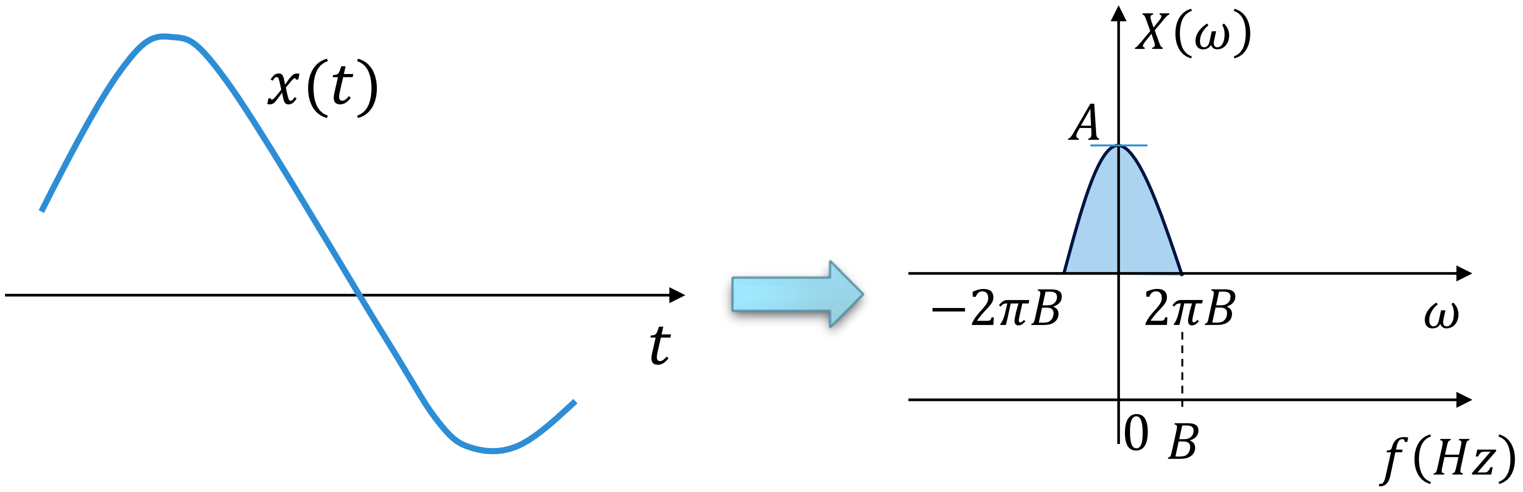
TRANSFORMADA DE FOURIER

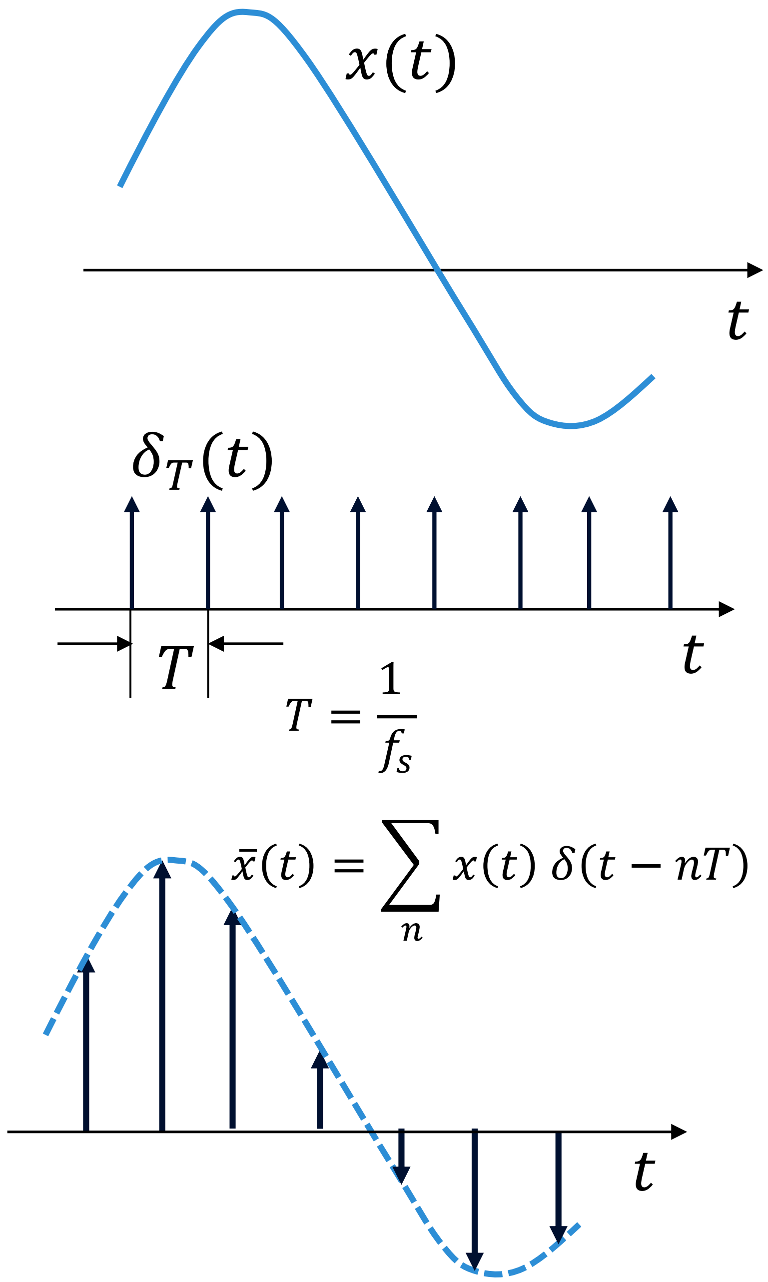
EM TEMPO DISCRETO



$$\bar{x}(t) = x(nT) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA





$\delta_T(t)$ é um sinal periódico, e, portanto, pode ser escrito em função da série de Fourier,

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{-jn\omega_0 t}$$

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_T \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore\ \delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}[1 + 2(\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cdots)]$$

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T}[x(t) + 2x(t)\cos\omega_0 t + +2x(t)\cos 2\omega_0 t + \cdots]$$

$$\bar{x}(t)=\frac{1}{T}[x(t) + 2x(t)\cos\omega_0 t + +2x(t)\cos 2\omega_0 t + \cdots]$$

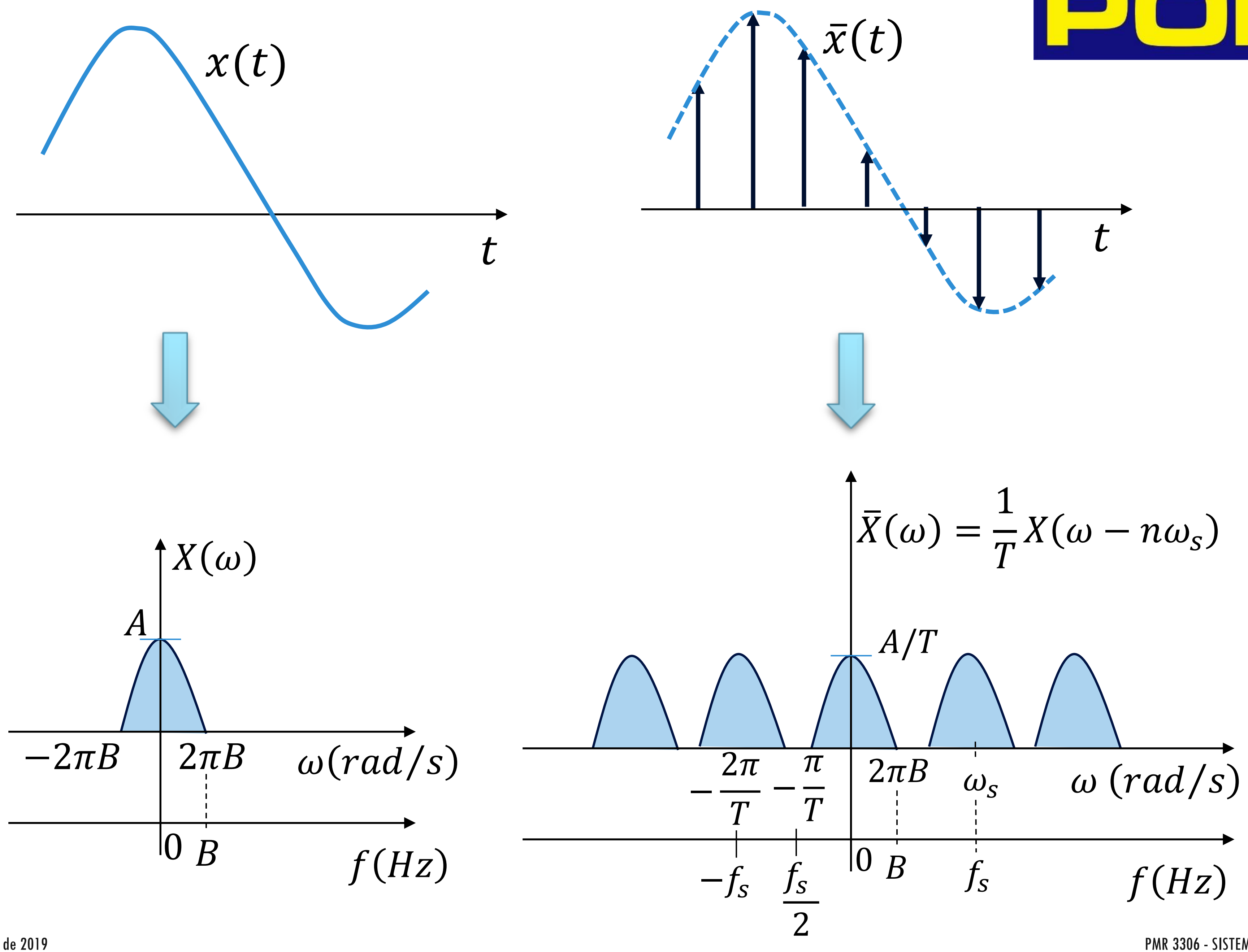
$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} 2x(t)\cos\omega_0 t\, e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} 2x(t)\cos 2\omega_0 t\, e^{-j\omega t}dt + \cdots$$

$$\breve{x}(t) = 2x(t)\cos\omega_s t$$
$$\breve{X}(\omega) = X(\omega - \omega_s) + X(\omega + \omega_s)$$

$$\bar{X}(\omega) = X(\omega) + \boxed{X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)} + \boxed{X(\omega - 2\omega_0) + X(\omega + 2\omega_0)} + \cdots$$

Espectro de $X(\omega)$ deslocado de $\pm\omega_0$

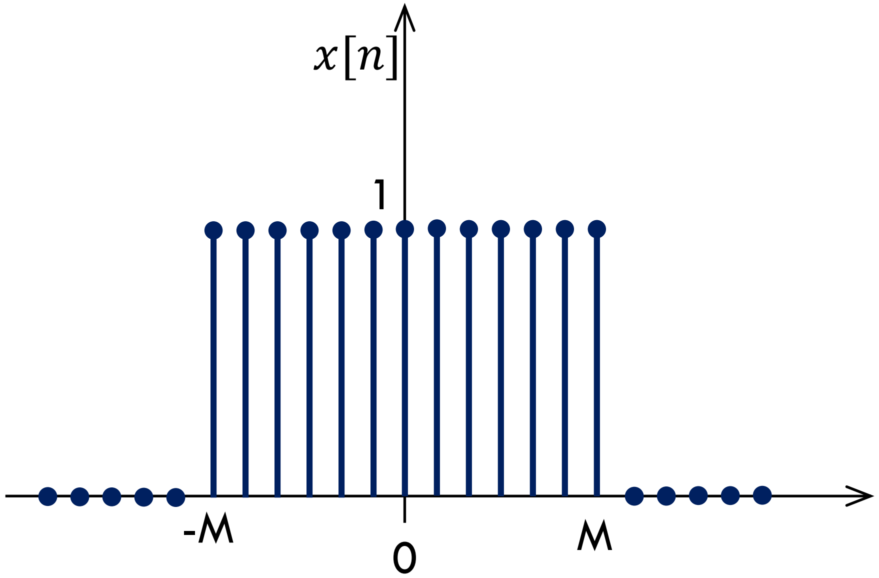
Espectro de $X(\omega)$ deslocado de $\pm 2\omega_0$



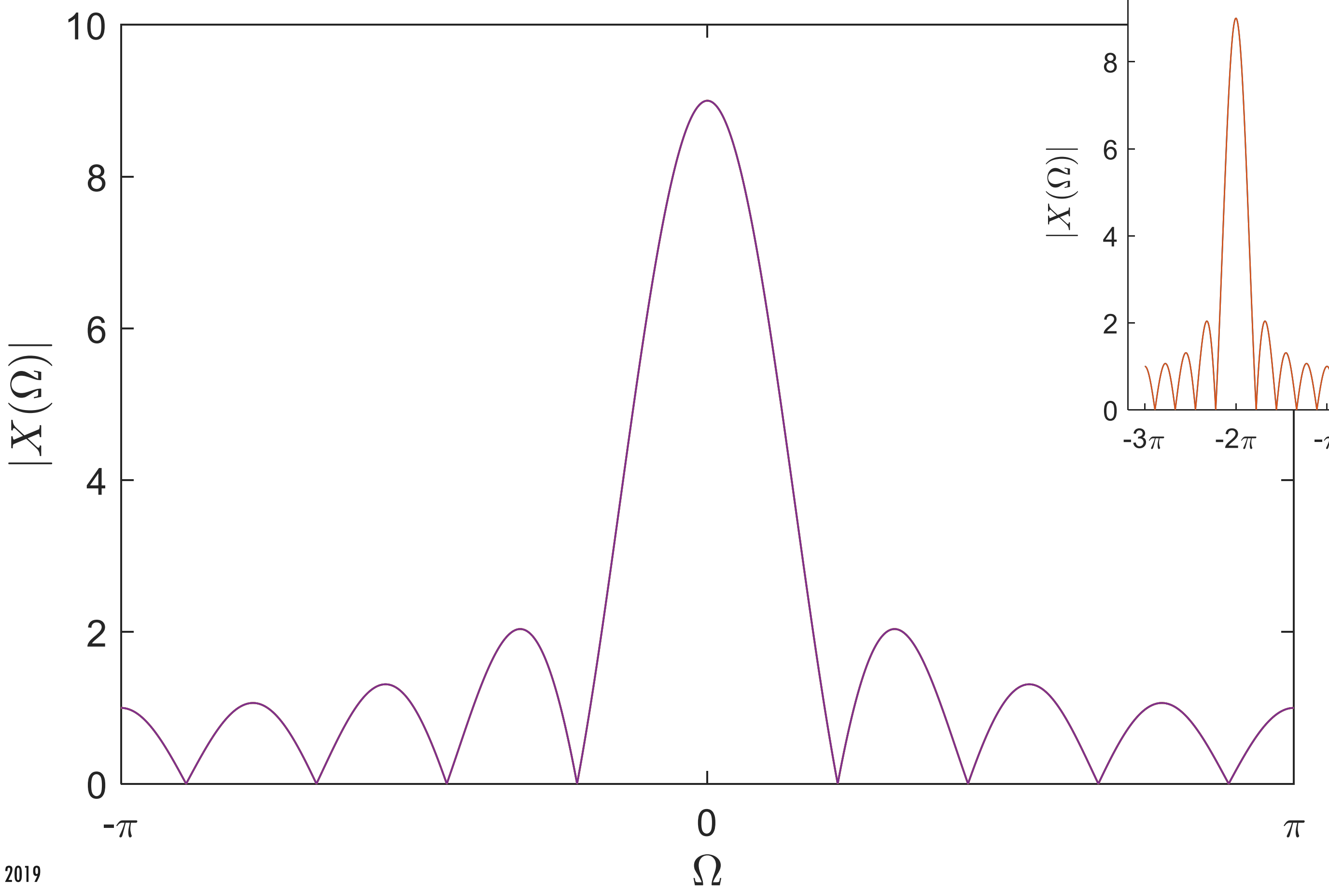
$x(t)$
t
$\bar{x}(t)$
t
$X(\omega)$
A
$-2\pi B$
$2\pi B$
$\omega(rad/s)$
0
B
$f(Hz)$
$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega - n\omega_s)$
A/T
$-\frac{2\pi}{T}$
$-\frac{\pi}{T}$
$2\pi B$
ω_s
$\omega\ (rad/s)$
$-f_s$
$\frac{f_s}{2}$
0
B
f_s
$f(Hz)$

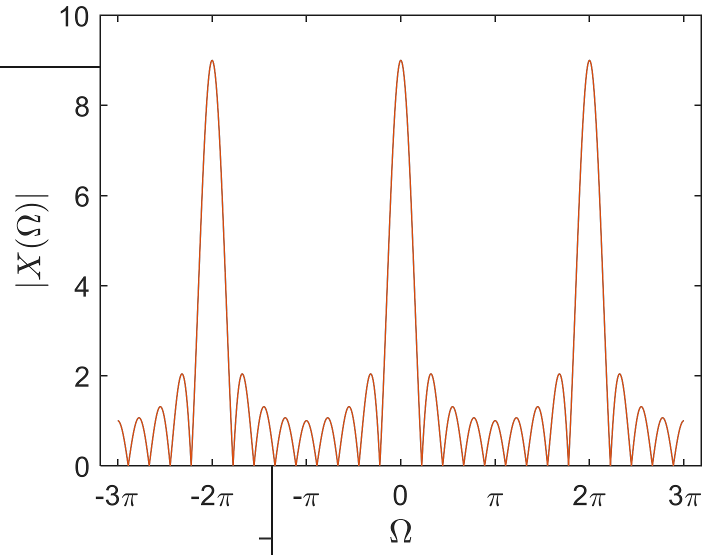
EXEMPLO...

- $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n = -M, \dots, 0, \dots, M \\ 0 & cc \end{cases}$



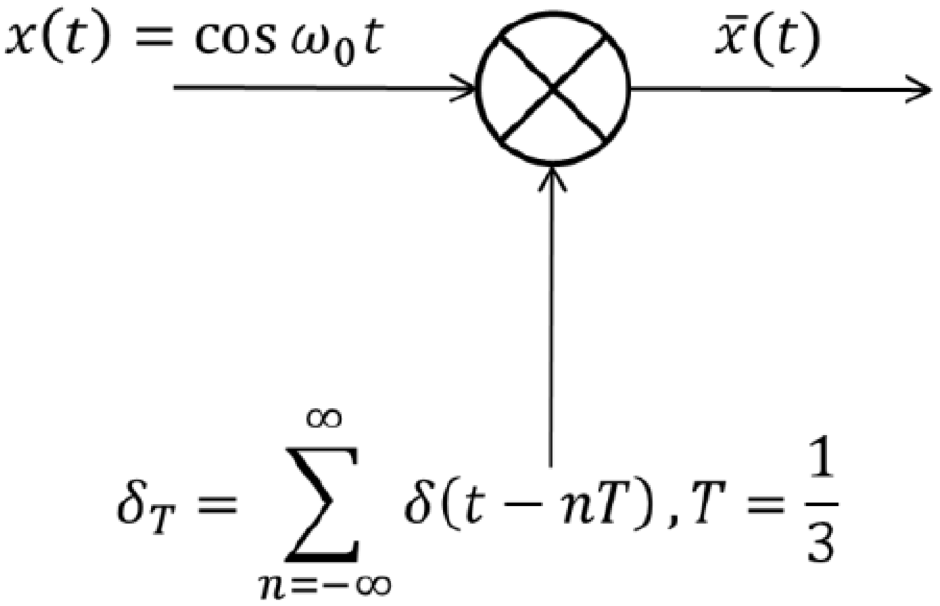
DTFT



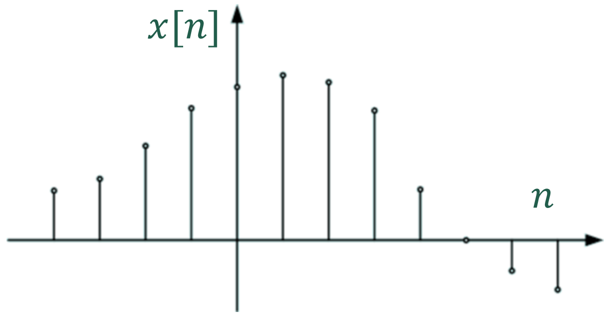


TAREFA

Considere o sistema da figura abaixo.



Compare a transformada do sinal $x(t)$ com o sinal $\bar{x}(t)$.



Só os sinais discretos podem ser armazenados e processados em computadores digitais.

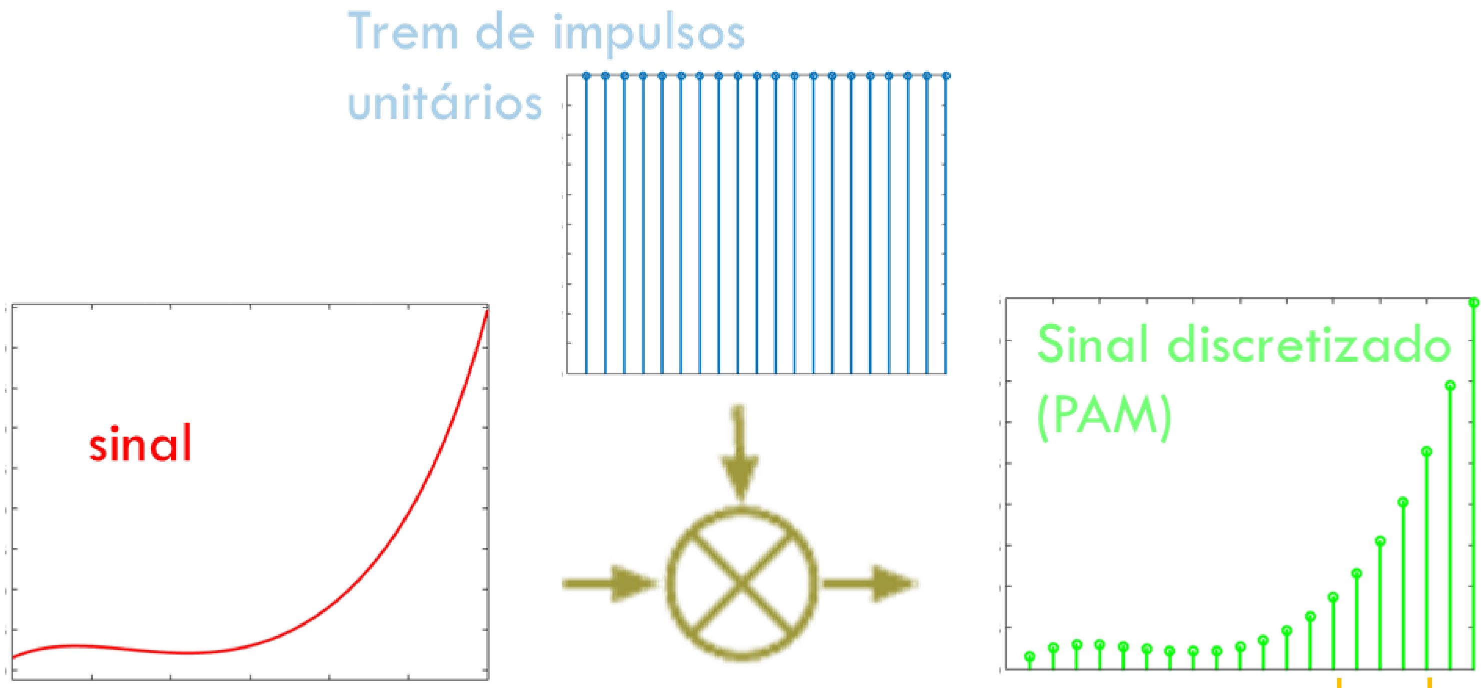
AMOSTRAGEM

“Amostragem é a ponte entre os mundos do contínuo e do discreto”

Lathi, 2007

AMOSTRAGEM

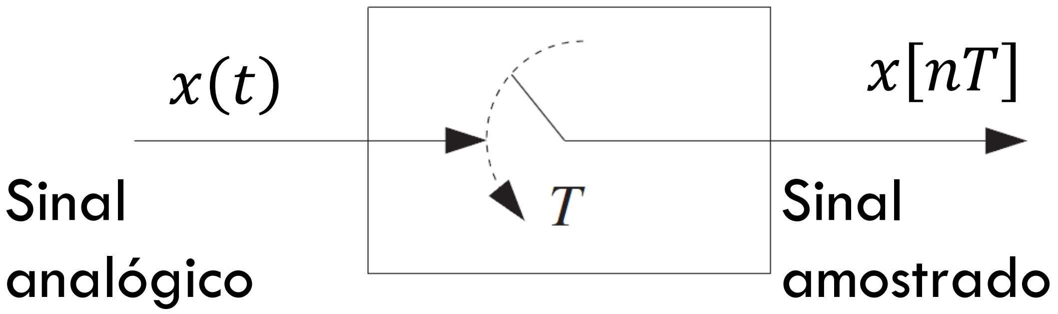
- Discretização temporal do sinal analógico original



Impulsos medidos e guardados como sinais amostrados

..., 3.44, 4.67 , 6.39 , 8.69, ...

Amostrador ideal



COMO ESCOLHER A FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM????

DOMÍNIO DO TEMPO

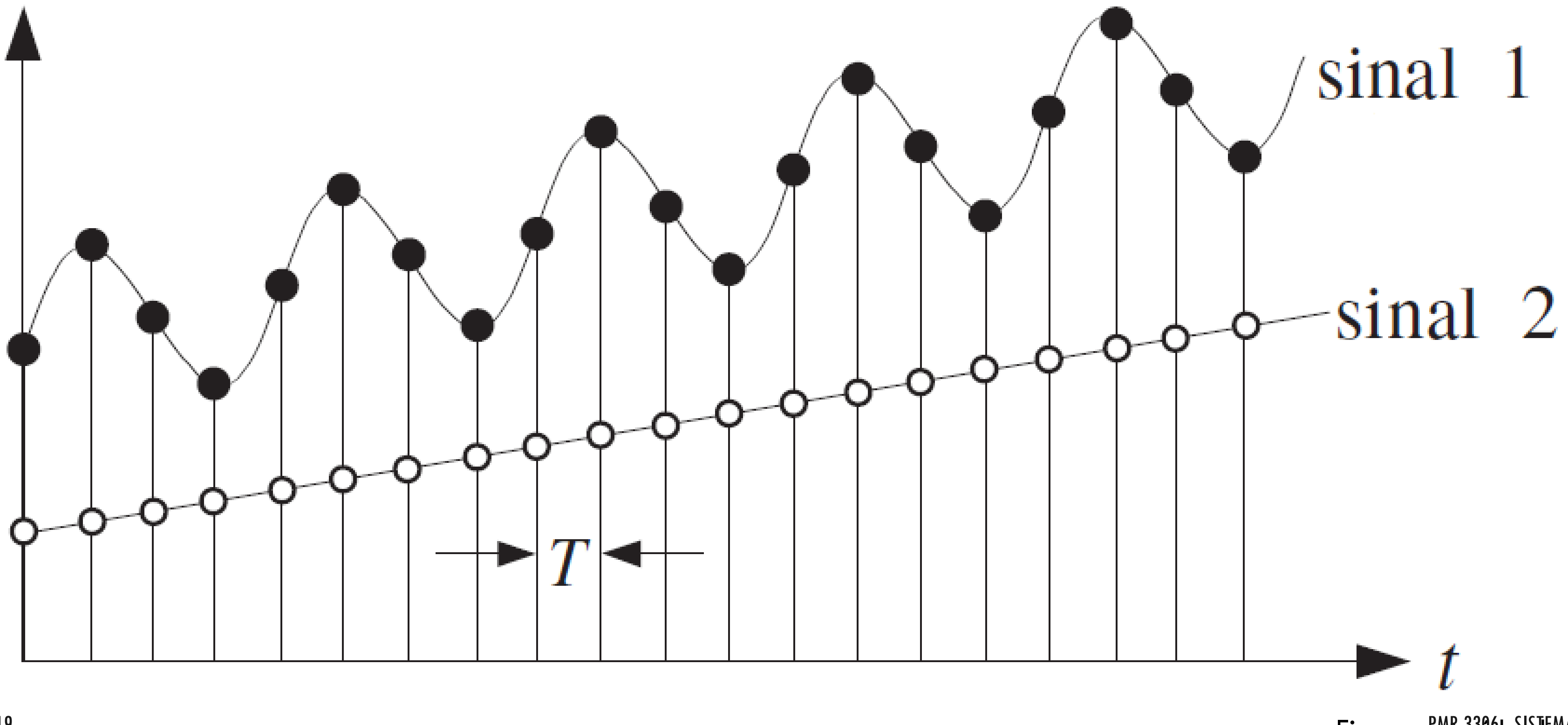
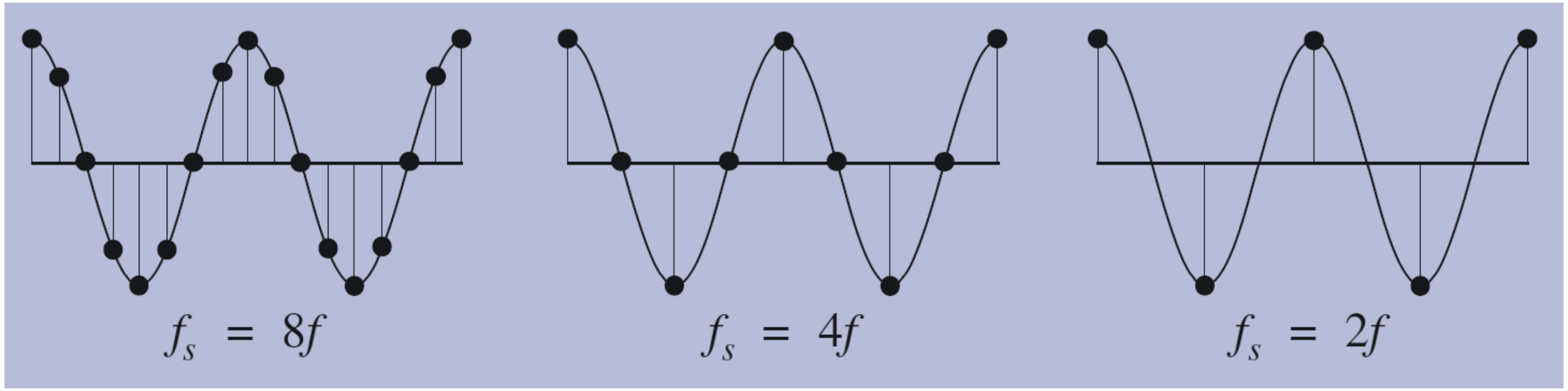


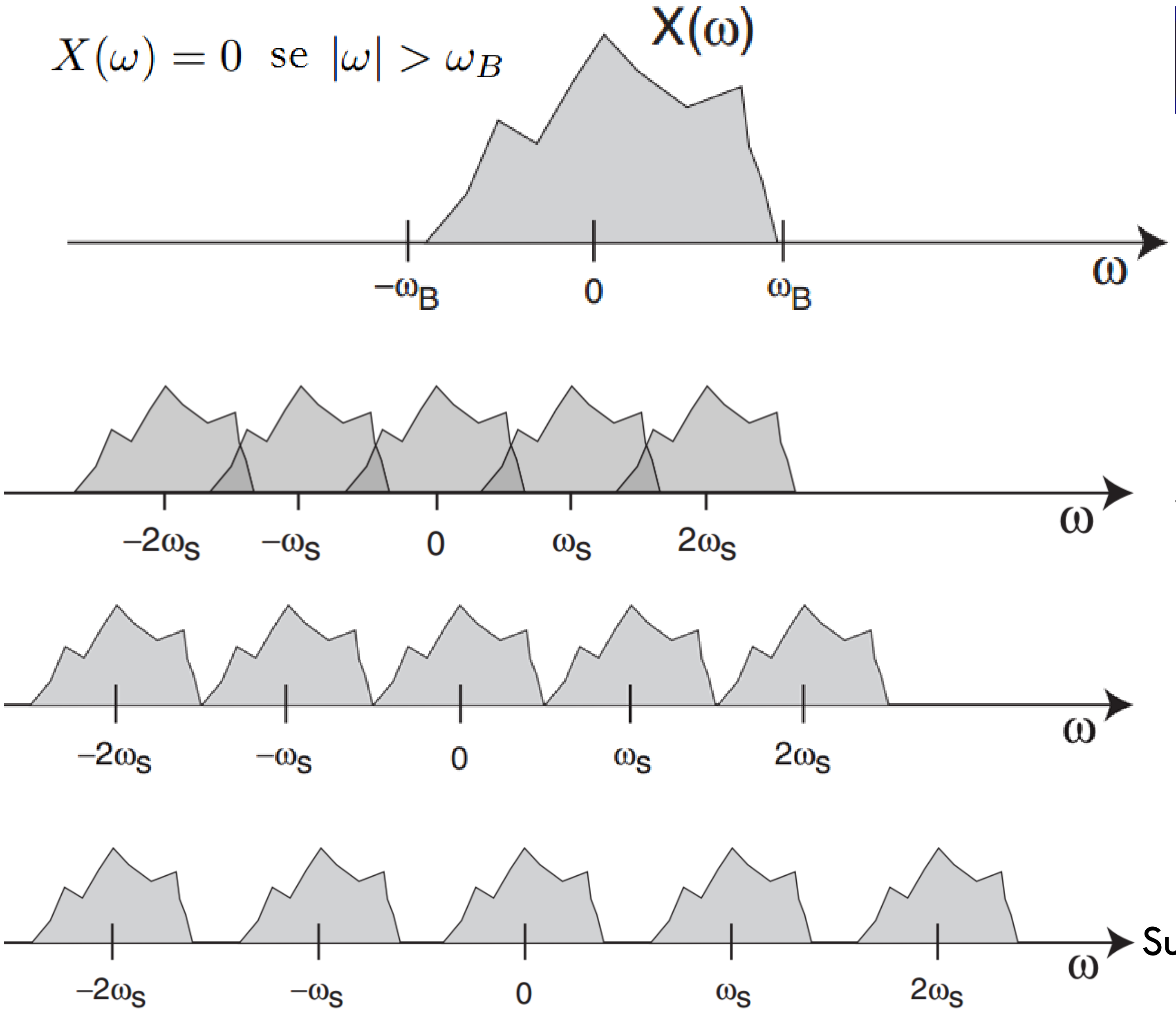
Figura extraída de [3]

AMOSTRAGEM DE SENOIDES

$$x(t) = \cos \omega t = \cos 2\pi f t$$



$$X(\omega) = 0 \;\; \text{se} \;\; |\omega| > \omega_B$$



$\omega_s \ll 2\omega_B$
Subamostragem

$\omega_s = 2\omega_B$
Frequência de Nyquist

$\omega_s \gg 2\omega_B$
Superamostragem

TEOREMA DA AMOSTRAGEM DE NYQUIST–SHANNON

Se um sinal analógico $x(t)$ tem banda limitada, ou seja, se a frequência mais elevada do sinal é B ou seja,

$$X(\omega) = 0 \text{ para } |f| > B,$$

então, é suficiente uma amostragem a qualquer taxa

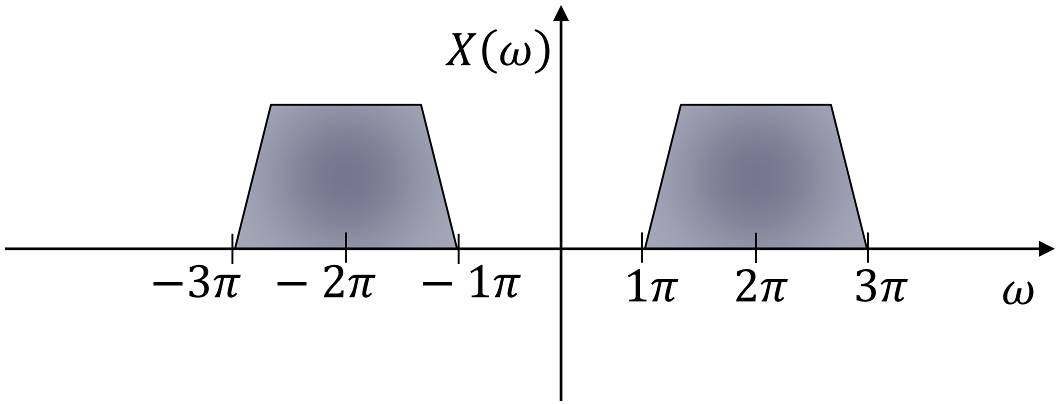
$$f_s > 2B$$

TESTE...

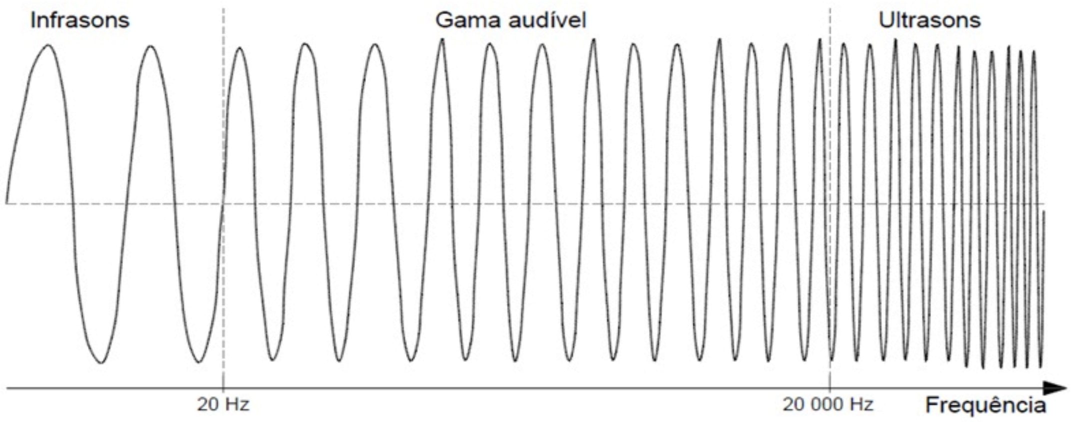
Encontre T_s máximo para correta amostragem de $x(t)$,

A. $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(5\pi t + 0{,}1) + \cos(\pi t)$

B.



ENTÃO...



Os sons audíveis pelo ouvido humano têm uma frequência entre 20Hz e 20kHz.

Qual o intervalo máximo de amostragem T_s que podemos usar para amostrar um sinal sem perda de informação audível?

A. 100 μs

B. 50 μs

C. 25 μs

D. $100\pi\ \mu s$

E. $50\pi\ \mu s$

F. $25\pi\ \mu s$

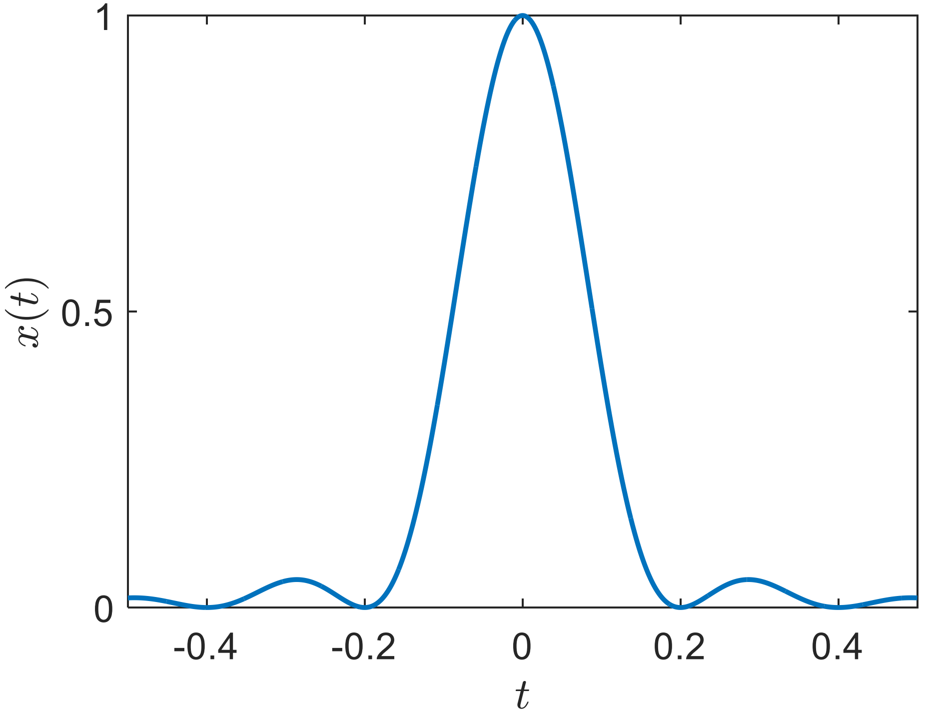
EXEMPLO

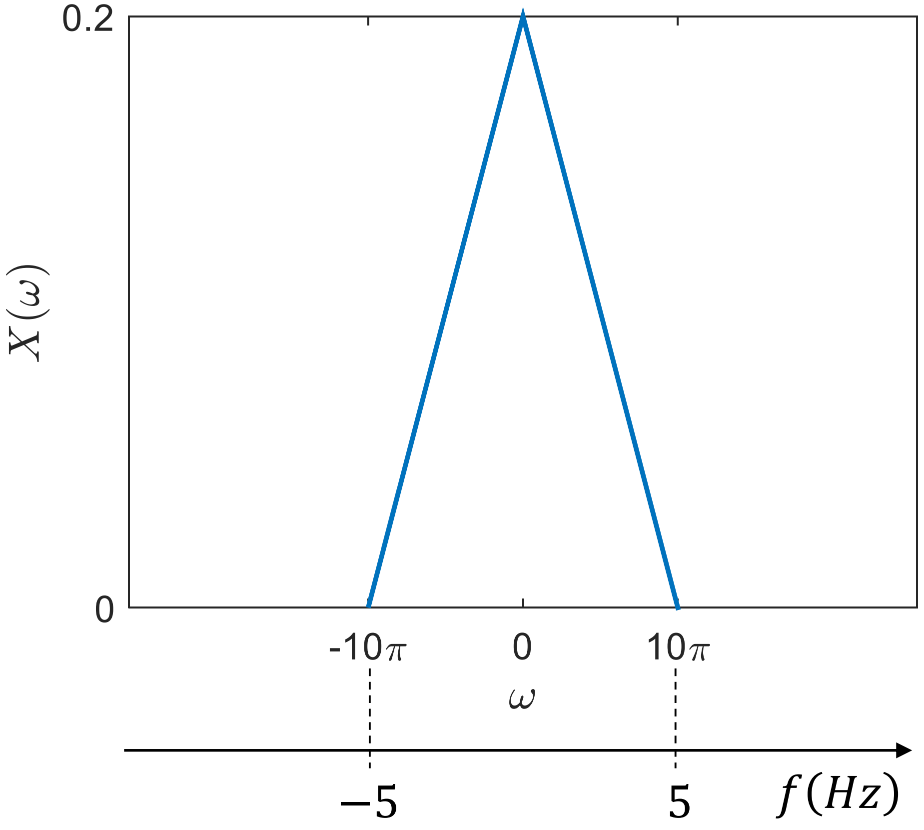
- Sonata No 1 In G Minor Presto - Johann Sebastian Bach, amostrada a:

A. 44.1 kHz
B. 22 kHz
C. 11 Hz
D. 5.5 kHz
E. 2.8 kHz

EXEMPLO

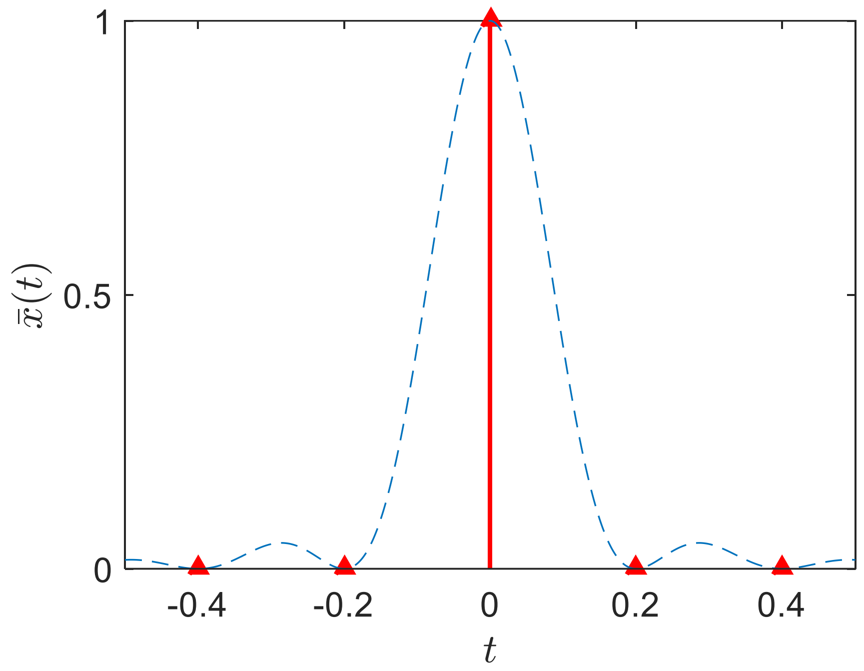
$$\text{sinc}^2\left(\frac{T}{2}t\right) \overset{\mathcal{F}_\omega}{\Longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T}\text{triang}\left(\frac{\omega}{2T}\right)$$





$$x(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$$

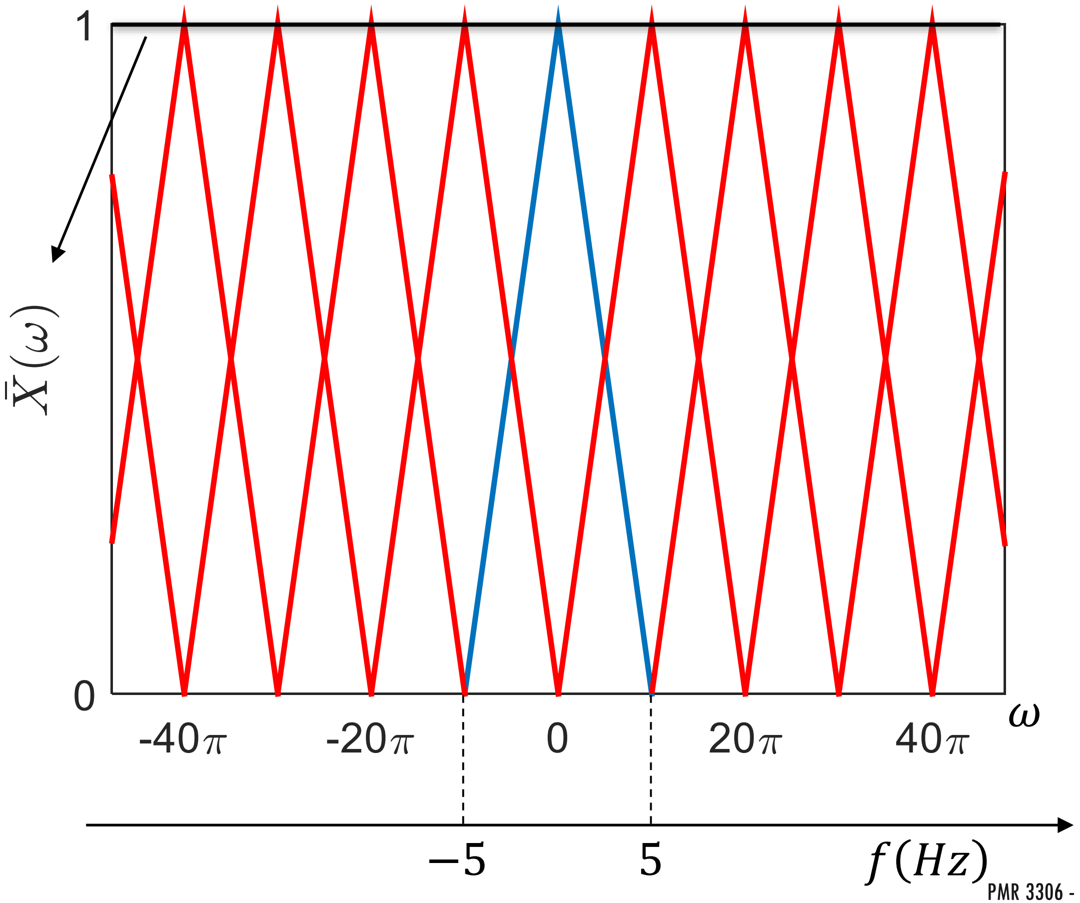
$$X(\omega) = 0{,}2\,\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

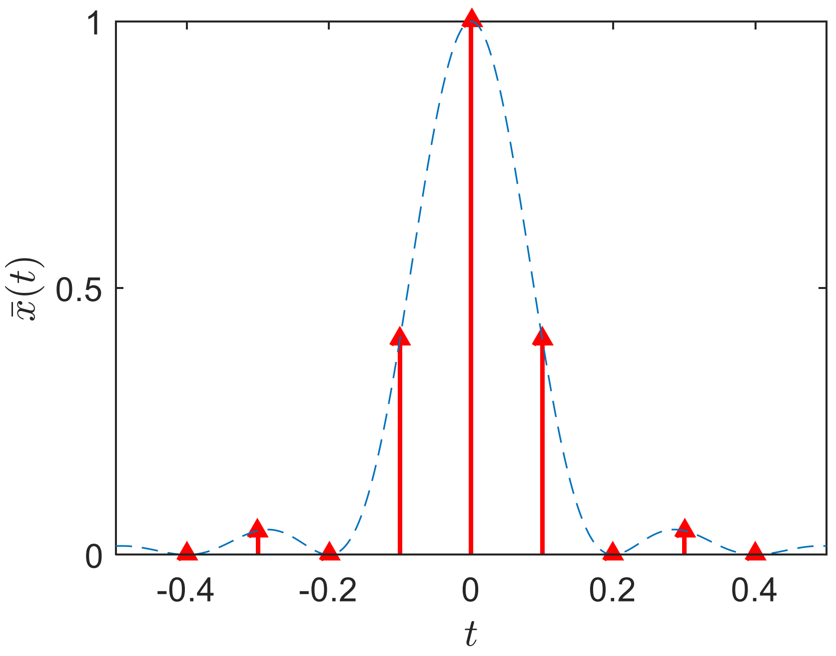


Frequência de amostragem 5Hz

Intervalo de amostragem: 0,2 s

$$\frac{1}{T}X(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

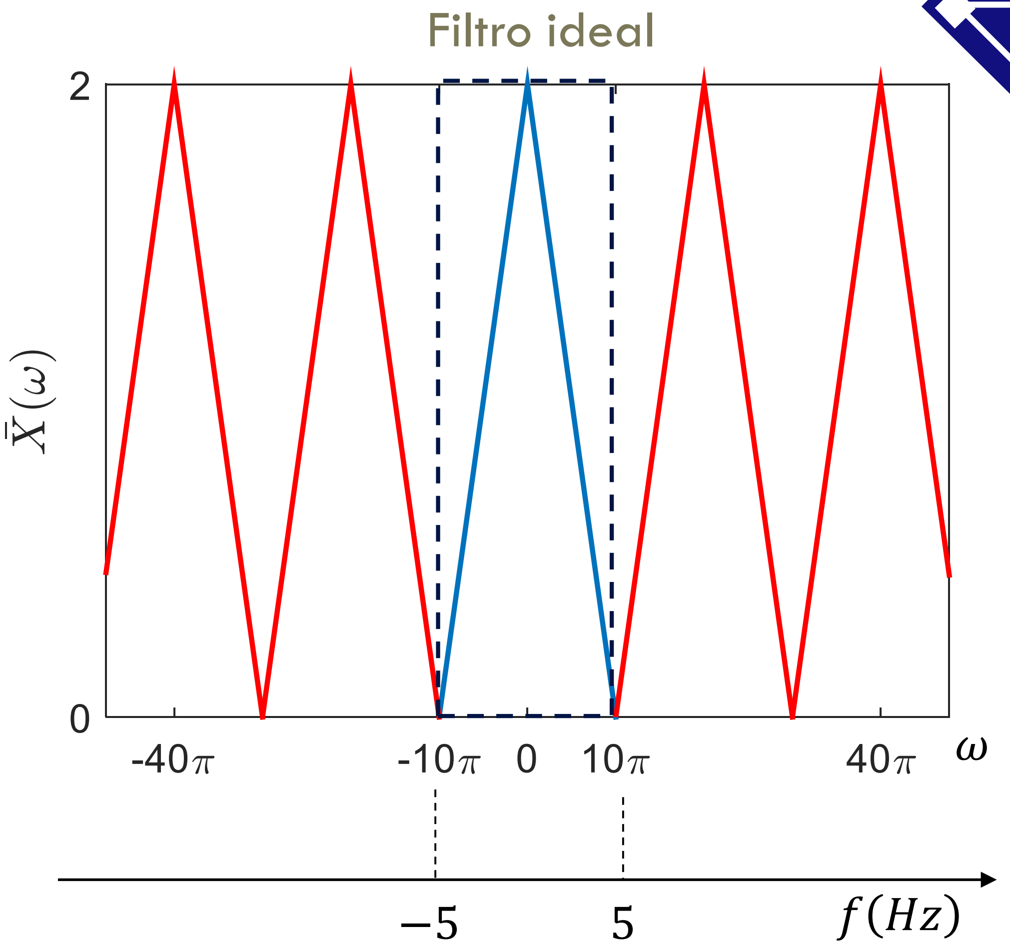


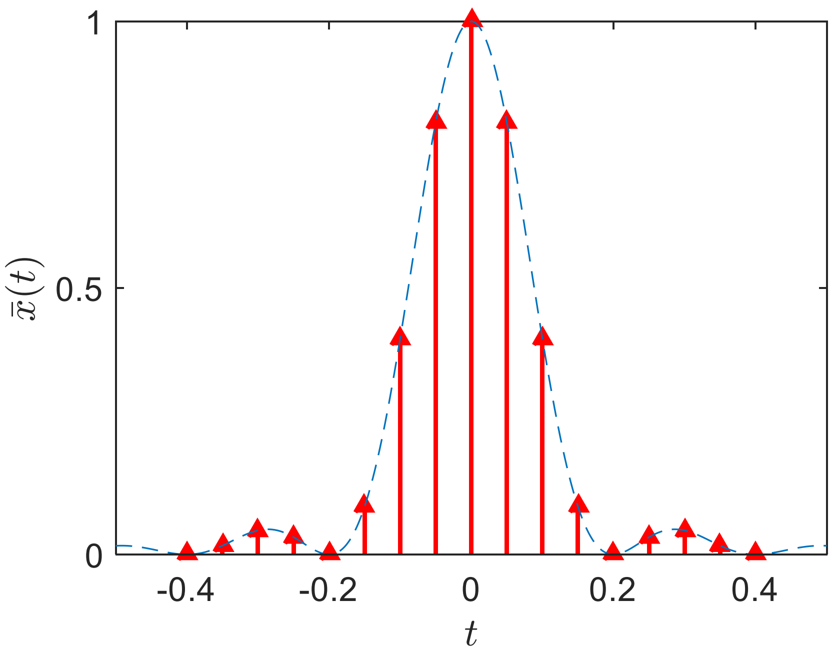


Frequência de amostragem 10Hz

Intervalo de amostragem: 0,1 s

$$\frac{1}{T}X(\omega) = 2\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$



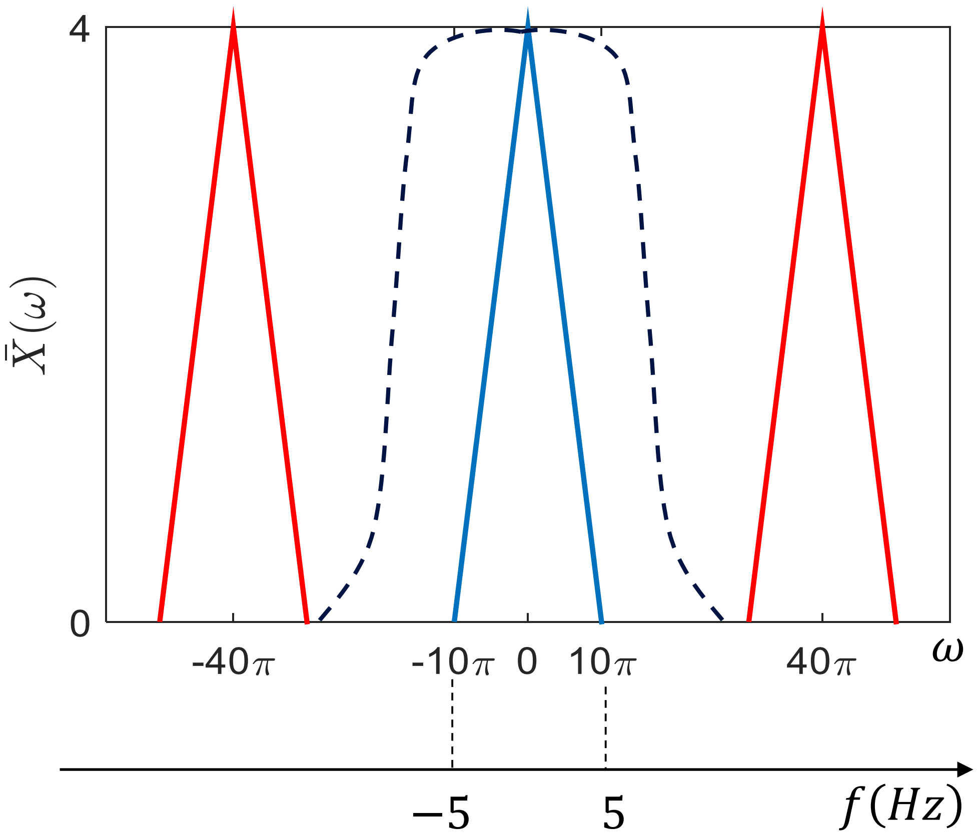


Frequência de amostragem 20Hz

Intervalo de amostragem: 0,05 s

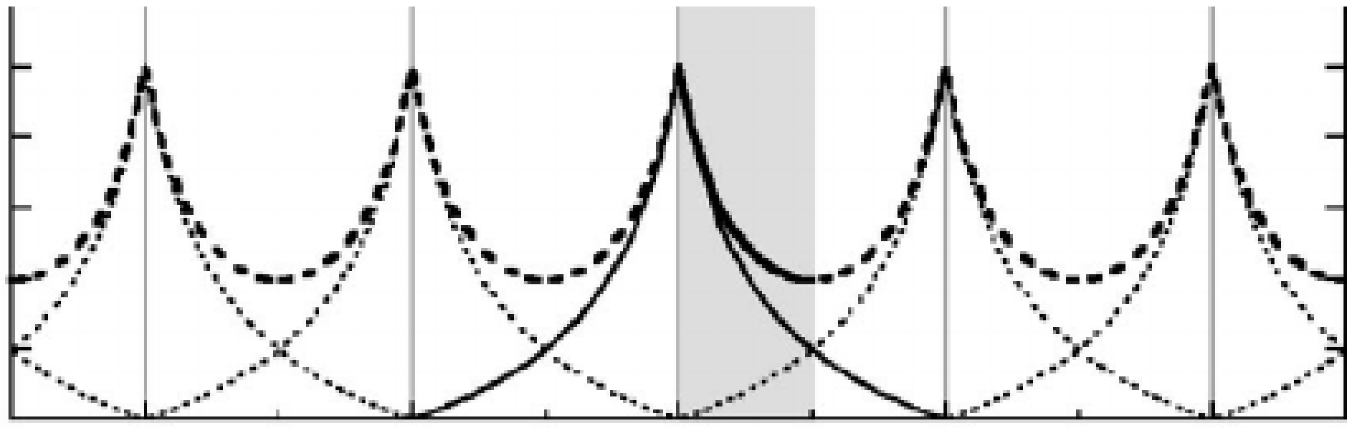
$$\frac{1}{T}X(\omega) = 4\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

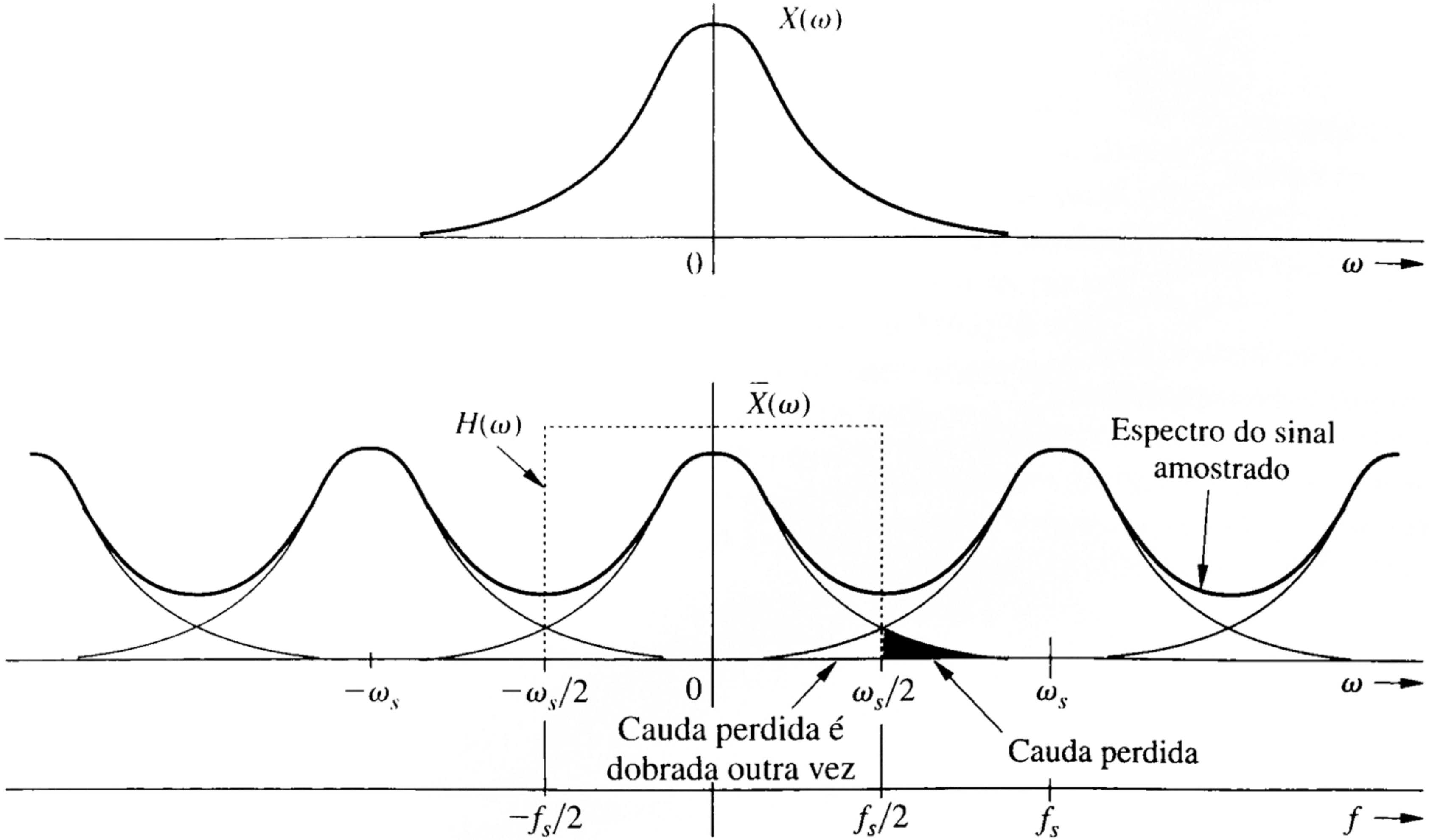
Filtro prático

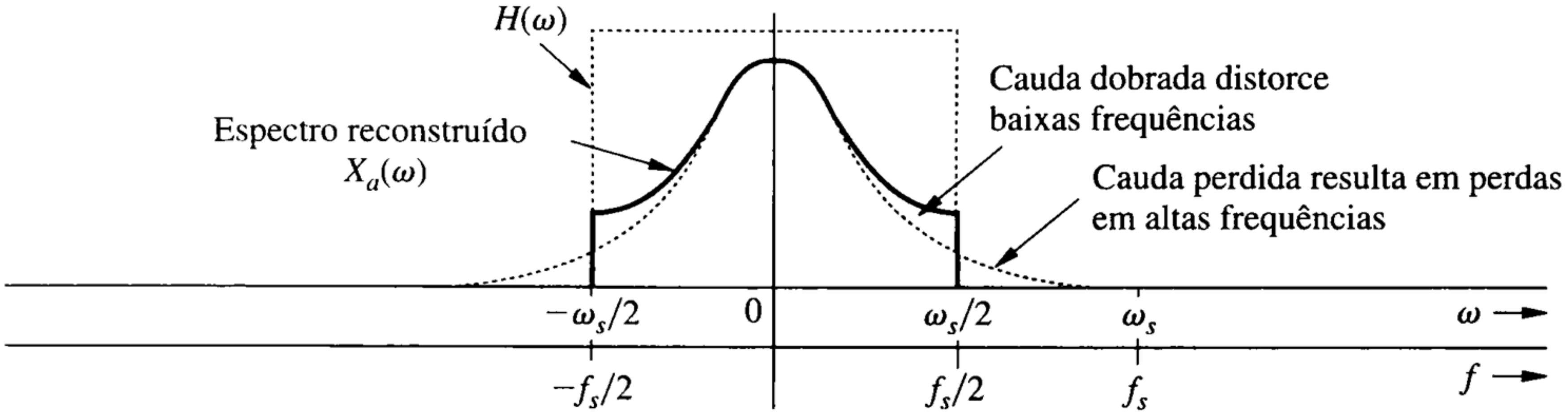


ALIASING

- Muitos sinais não tem largura de banda finita ou não conhecemos. Dessa forma, existe uma grande chance de ocorrer sobreposição nas réplicas da frequência...




X(ω)
0
ω
X̄(ω)
H(ω)
Espectro do sinal amostrado
−ωs
−ωs/2
0
ωs/2
ωs
ω
Cauda perdida é dobrada outra vez
Cauda perdida
−fs/2
fs/2
fs
f



$H(\omega)$
Cauda dobrada distorce
baixas frequências
Espectro reconstruído
$X_a(\omega)$
Cauda perdida resulta em perdas
em altas frequências
$-\omega_s/2$
0
$\omega_s/2$
ω_s
ω
$-f_s/2$
$f_s/2$
f_s
f

SENOIDE E ALIASING

- Os seguintes sinais são amostrados a uma frequência de 4 Hz,

$$-\sin 14\pi t \qquad -\sin 6\pi t \qquad \sin 2\pi t \qquad \sin 10\pi t \qquad \sin 18\pi t$$

Mostre que eles representam todos o mesmo sinal amostrado...

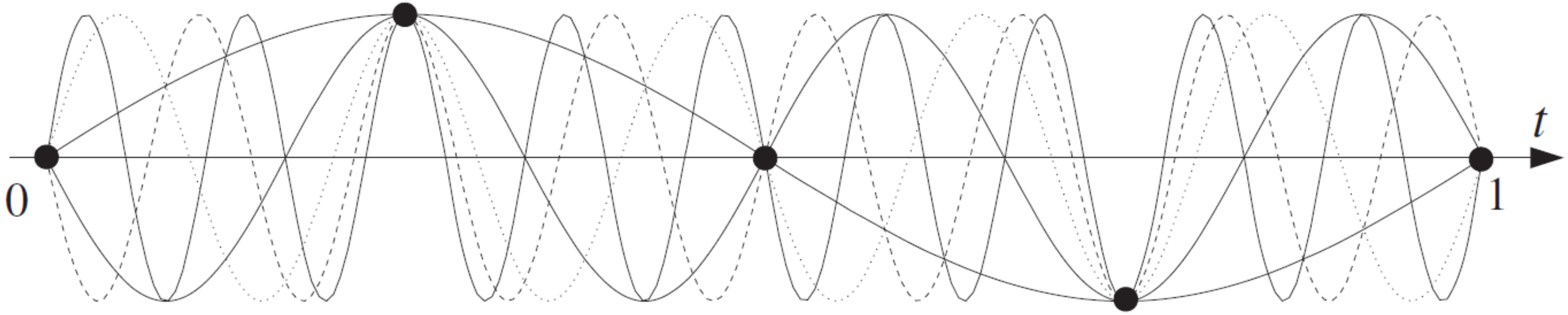


Figura extraída de [3]

EXEMPLO 2

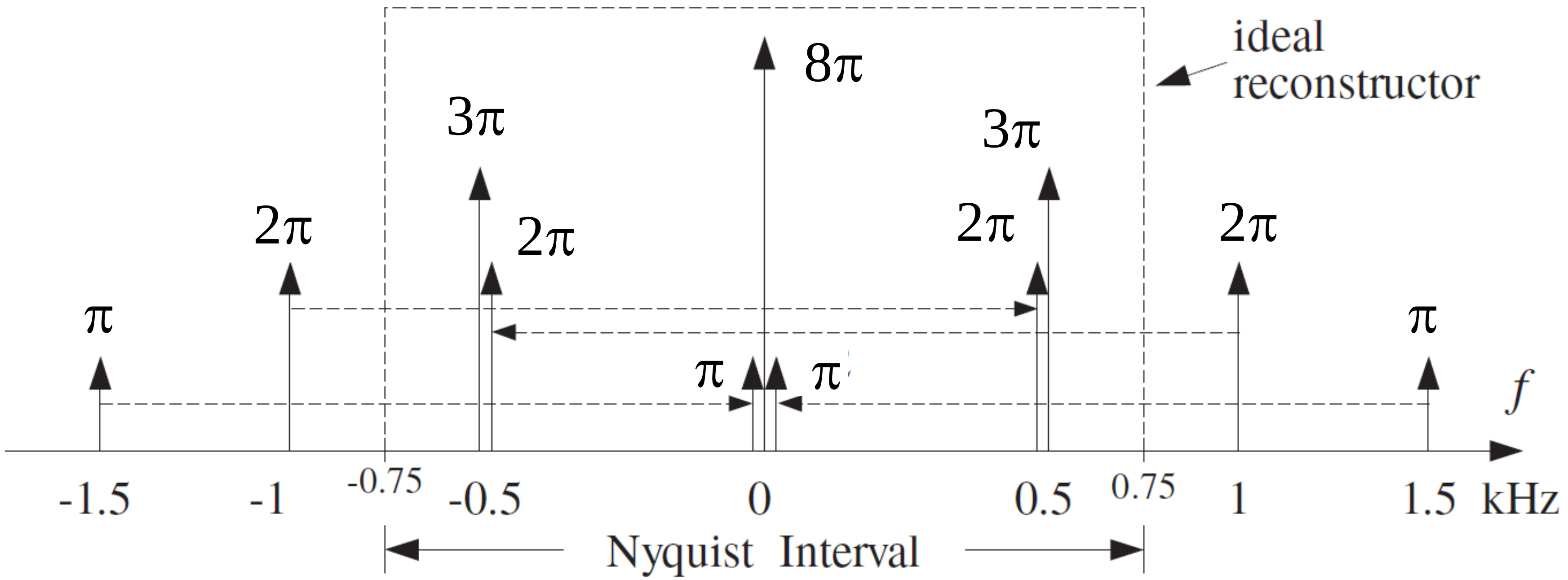
Considere $x(t)$ como a soma de sinais senoidais,

$$x(t) = 4 + 3\cos \pi t + 2\cos 2\pi t + \cos 3\pi t$$

onde t está em milisegundos. Determine a frequência mínima de amostragem para que não ocorra aliasing, i. é, a frequência de Nyquist (f_N). Para observação dos efeitos do aliasing, suponha que o sinal é amostrado à $f_N/2$. Determine o sinal recuperado $x_a(t)$.

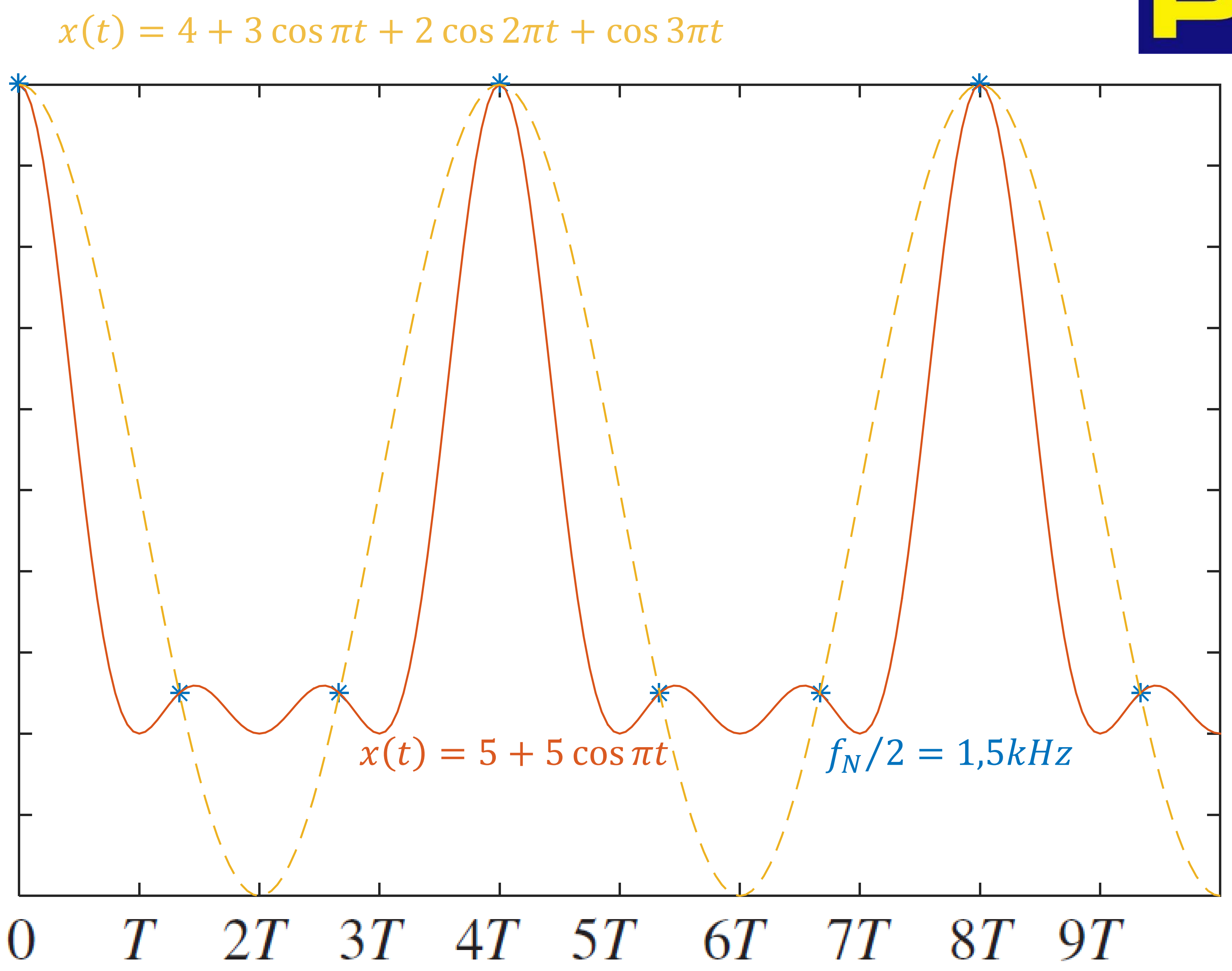
$$x(t) = \cos\omega_0 t \longrightarrow X(\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\bar{x}(t) = \sum_n x(nT)\,\delta(t-nT) \longrightarrow \bar{X}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_n X(\omega - n\omega_s)$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = 5 + 5\cos\pi t$$

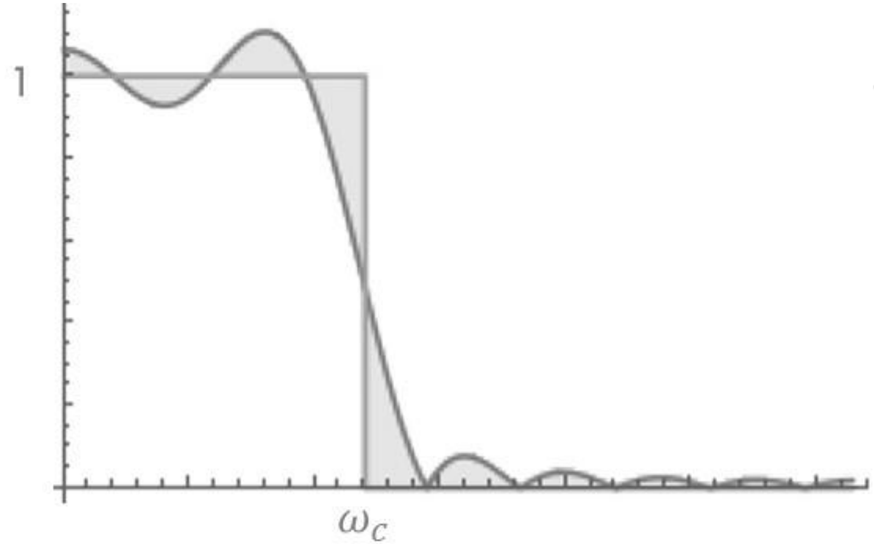


$x(t) = 4 + 3\cos\pi t + 2\cos 2\pi t + \cos 3\pi t$
$x(t) = 5 + 5\cos\pi t$
$f_N/2 = 1{,}5kHz$
0
T
2T
3T
4T
5T
6T
7T
8T
9T

FILTRO

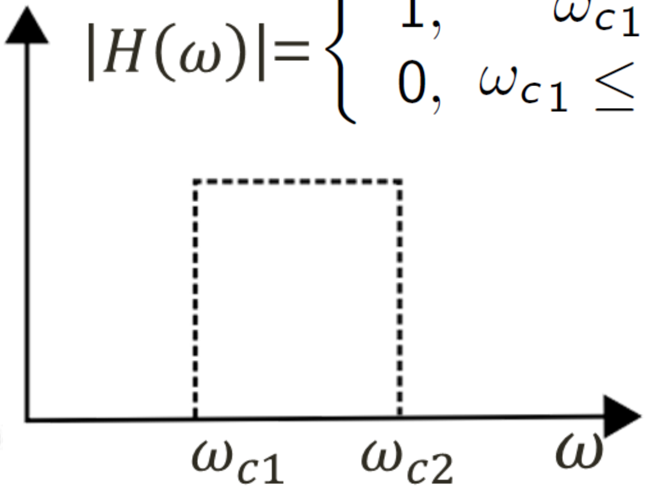
- Para extrair corretamente a informação fundamental do sinal analisado é necessário selecionar as frequências de interesse que compõe esse sinal. Como fazer isso?
- Com um **FILTRO**. Filtros são SLIT capazes de modificar as características dos sinais de entrada de tal modo que apenas uma parcela específica dos seus componentes de frequência chega à saída do filtro.
- A resposta em frequência do filtro é caracterizada por **uma faixa de passagem** e **uma faixa de rejeição**, separadas por uma **faixa de transição ou faixa de guarda**

Passa baixa



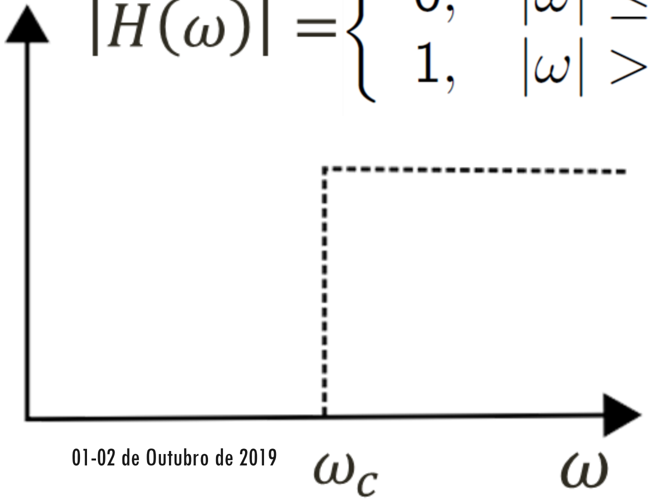
Passa banda (faixa)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1, & \omega_{c1} < |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0, & \omega_{c1} \leq |\omega| \text{ e } |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



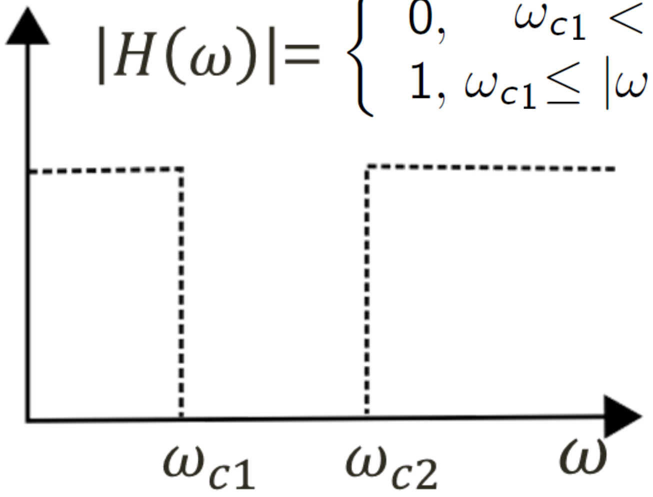
Passa alta

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \omega_c \\ 1, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



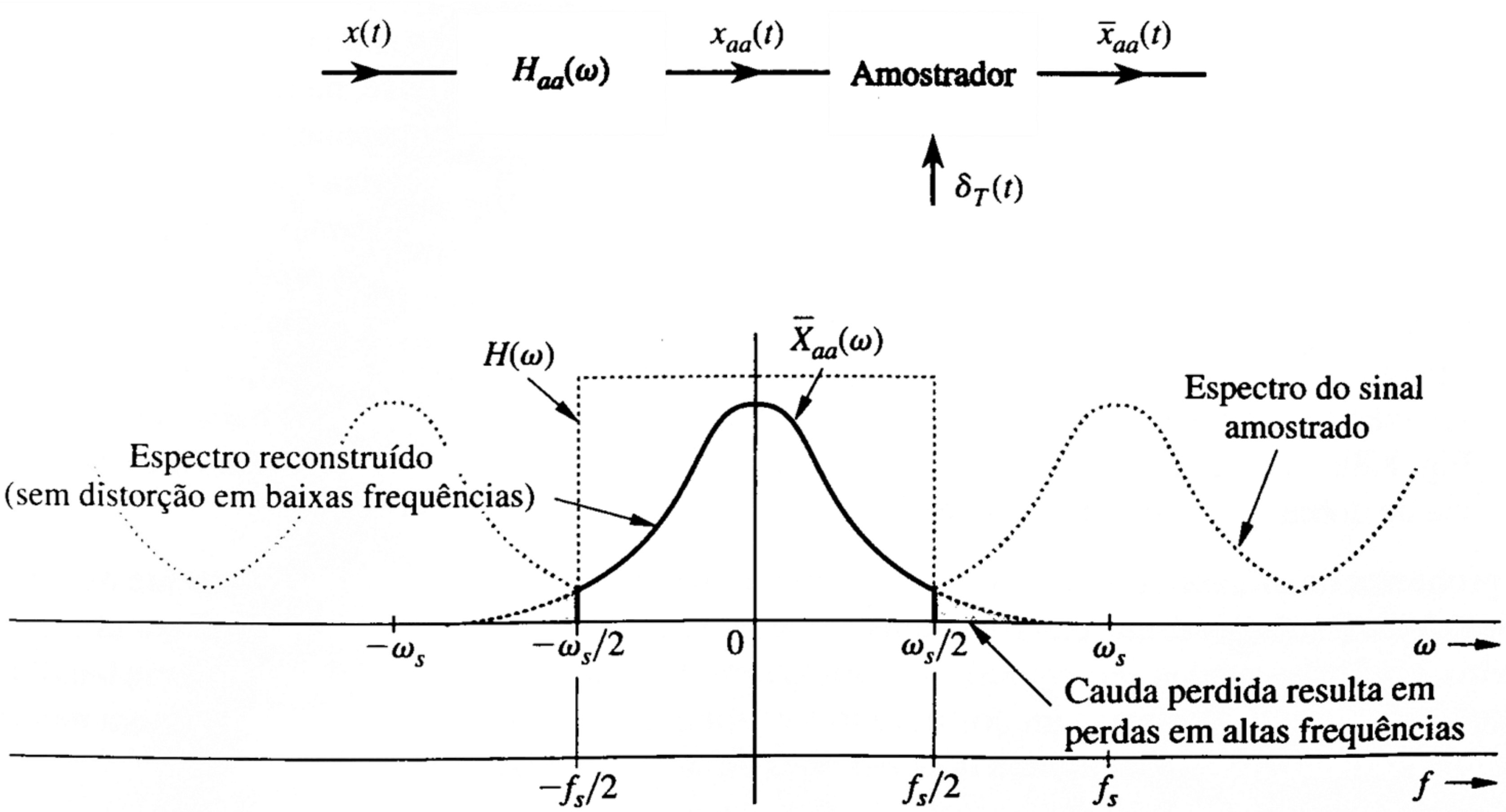
Rejeita banda (faixa)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega_{c1} < |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 1, & \omega_{c1} \leq |\omega| \text{ e } |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



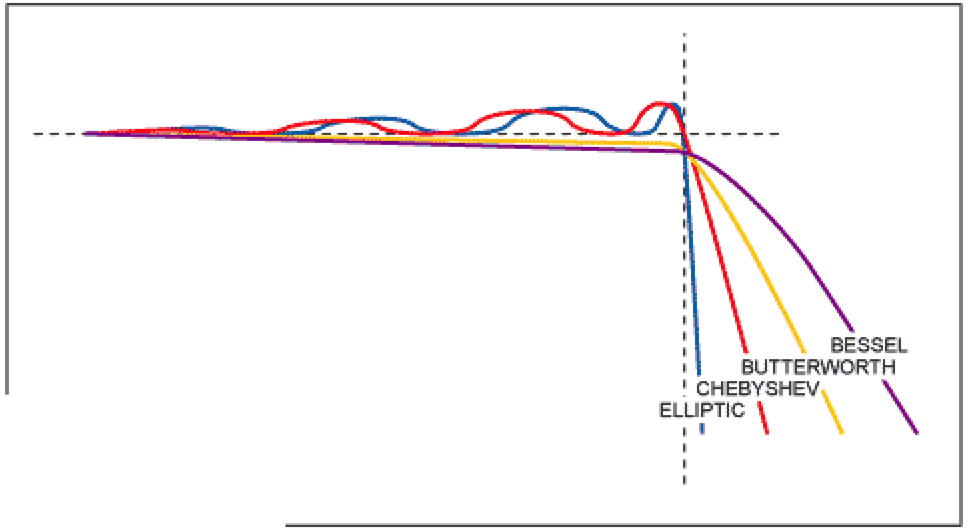
SOLUÇÃO: FILTRO ANTIALIASING

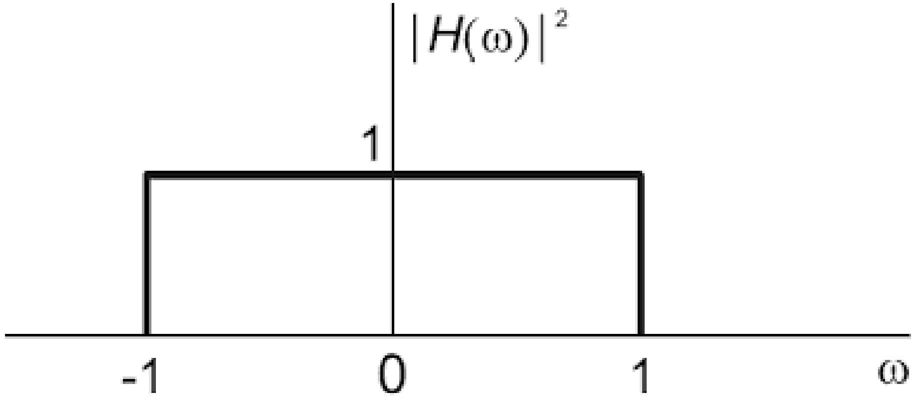
- As frequências altas devem ser eliminadas ANTES da amostragem do sinal. Como???
- Emprega-se um filtro *passa-baixa* com frequência de corte $f_s/2$.
- Esse filtro é chamado de filtro *anti-aliasing*.
- O espectro das componentes de baixa frequência permanece intacto. Como perdemos as componentes de alta frequência, determina-se a frequência de corte com base nas frequências de interesse do sinal e na frequência de amostragem.



x(t)
H_aa(ω)
x_aa(t)
Amostrador
x̄_aa(t)
δ_T(t)
H(ω)
X̄_aa(ω)
Espectro do sinal amostrado
Espectro reconstruído (sem distorção em baixas frequências)
−ω_s
−ω_s/2
0
ω_s/2
ω_s
ω
Cauda perdida resulta em perdas em altas frequências
−f_s/2
f_s/2
f_s
f

FILTROS


BESSEL
BUTTERWORTH
CHEBYSHEV
ELLIPTIC


$|H(\omega)|^2$
1
-1
0
1
ω

FIM

Próxima aula:
Diagrama de Bode