

Oscilador Amortecido

Mundo Real: ~~A~~ $E = T + U = \text{cte}!$



$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

← Energia Cinética

↳ Forças Conservativas

+ **Dissipação** \Rightarrow Trabalho de Forças não-conservativas

$$U(x) \Rightarrow F_c(x) = -\frac{d}{dx} U(x) = -kx$$

$$F = F_c(x) + F_d \rightarrow \text{depende geralmente da velocidade}$$
$$= -kx - \rho \dot{x}$$

↓
aprox.
parabólica

← Aproximação Linear (1ª ordem)

$$m \ddot{x} = -kx - \rho \dot{x}$$

Equação Diferencial Linear de 2ª ordem Homogênea

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m} > 0$$

$\rho < 0$? Não será dissipativo

Soluções? $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$?

Estas soluções simples deixam o problema complexo,

$$A [-m^2 \cos(\omega t) + m\gamma \sin(\omega t) + \omega_0^2 \cos(\omega t)] \\ + B [-m^2 \sin(\omega t) - m\gamma \cos(\omega t) + \omega_0^2 \sin(\omega t)] = 0; \omega = ?$$

Soluções complexas vão simplificar o problema

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] \quad z \in \mathbb{C}$$

$$= z(t) + z^*(t)$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z + \text{c.c.} = 0$$

{ complexo conjugado

$$\Rightarrow \ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\text{Se } z = e^{pt} \rightarrow \dot{z} = p e^{pt}; \ddot{z} = p^2 e^{pt}$$

$$\Rightarrow (p^2 + \gamma p + \omega_0^2) e^{pt} = 0 \Rightarrow p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad \text{!}$$

A equação diferencial de segunda ordem é resolvida por um polinômio de segundo grau!

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Dois soluções, a partir das duas raízes

$$z = \alpha e^{p_+ t} + \beta e^{p_- t}$$

Três regimes possíveis:

$$1) \text{ Se } m_0 > \gamma/2 \Rightarrow \rho = -\frac{\gamma}{2} \pm im; \quad m = \sqrt{m_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$z = (\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$\cos \omega t + i \sin \omega t$

$$z = [(\alpha + \beta) \cos(\omega t) + i(\alpha - \beta) \sin(\omega t)] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Escolhendo $\beta = \alpha^*$

$$\alpha + \beta = A \quad -i(\alpha - \beta) = B \Rightarrow z \in \mathbb{R}, \quad z = x$$

$$x(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\frac{\gamma}{2}t} =$$

$$= C \cos(\omega t + \varphi) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$= \text{Re} \left[\underbrace{C e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega t + \varphi)}}_{z(t)} \right]$$

Condições iniciais: $x_0, v_0 \Rightarrow$

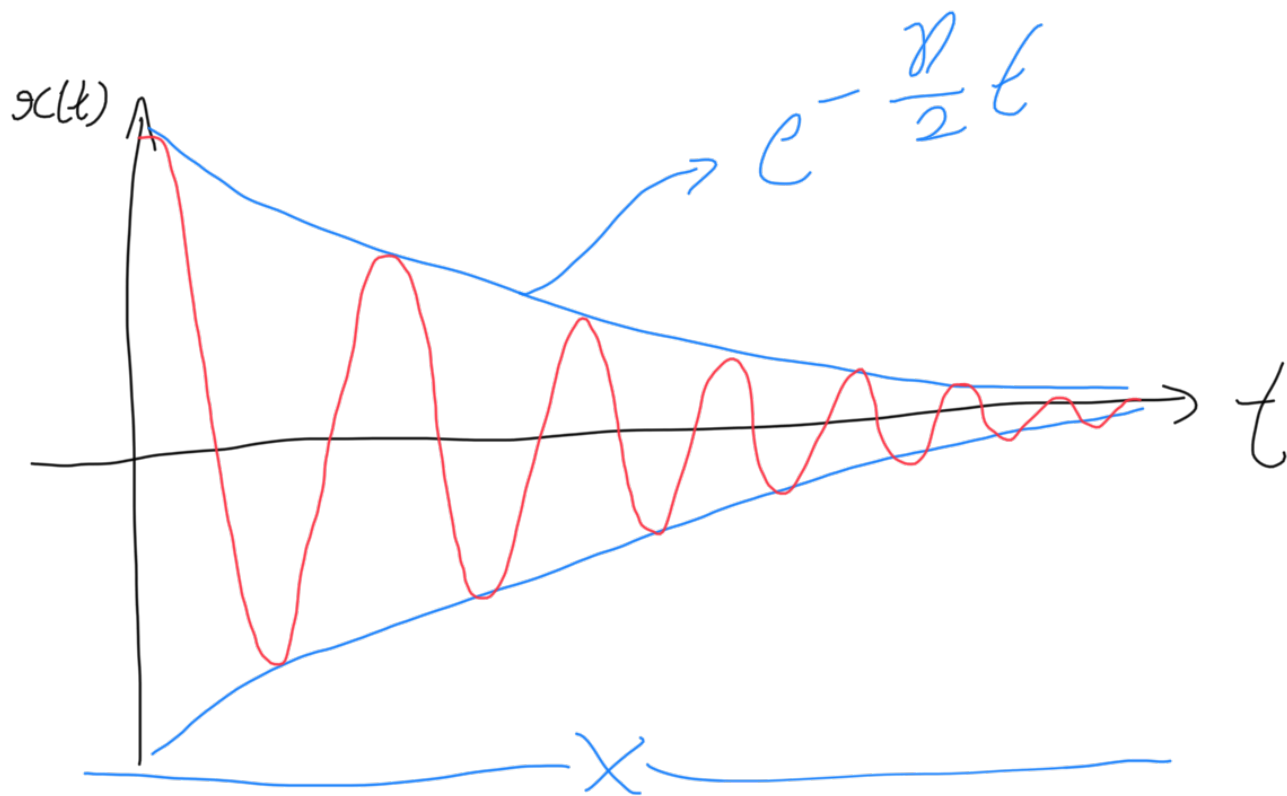
$$x(0) = A = x_0; \quad v(t) = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$+ [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \frac{d}{dt} e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$v(t) = \left[\left(-\frac{\gamma}{2} A + \omega B \right) \cos(\omega t) + \left(-\frac{\gamma}{2} B - \omega A \right) \sin(\omega t) \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2} A + \omega B \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}$$

$$v(t) = \left[v_0 \cos(\omega t) - \left(\frac{\gamma v_0}{2\omega} - \frac{m_0^2 x_0}{\omega} \right) \sin(\omega t) \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$



O Jogo da Energia

Energia mecânica variável: $E \rightarrow E(t)$

$$E(t) = T[\dot{x}(t)] + U[x(t)] = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

Taxa de dissipação: $\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k \frac{d}{dt} x^2(t) =$

$$= m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x)$$

Mas: $F = m \ddot{x} = -kx + F_d \Rightarrow \frac{d}{dt} E(t) = F_d \cdot \dot{x}$

Potência dissipada!

Caso linear $F_d = -\rho v$ $\frac{d}{dt} E = -\rho \dot{x}^2 \leq 0$

$$\frac{d}{dt} E(t) = P(t) = 0 \quad \text{se } \dot{x} = 0$$

Função $E(t) \rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$

$$i(t) = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\gamma/2 t} \cos(\omega t + \varphi) - m A e^{-\gamma/2 t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma^2}{4} \cos^2(\omega t + \varphi) + m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \gamma m \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) + m_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \right]$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left[m_0^2 + \frac{\gamma}{2} m \sin 2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma^2}{4} \cos 2(\omega t + \varphi) \right]$$

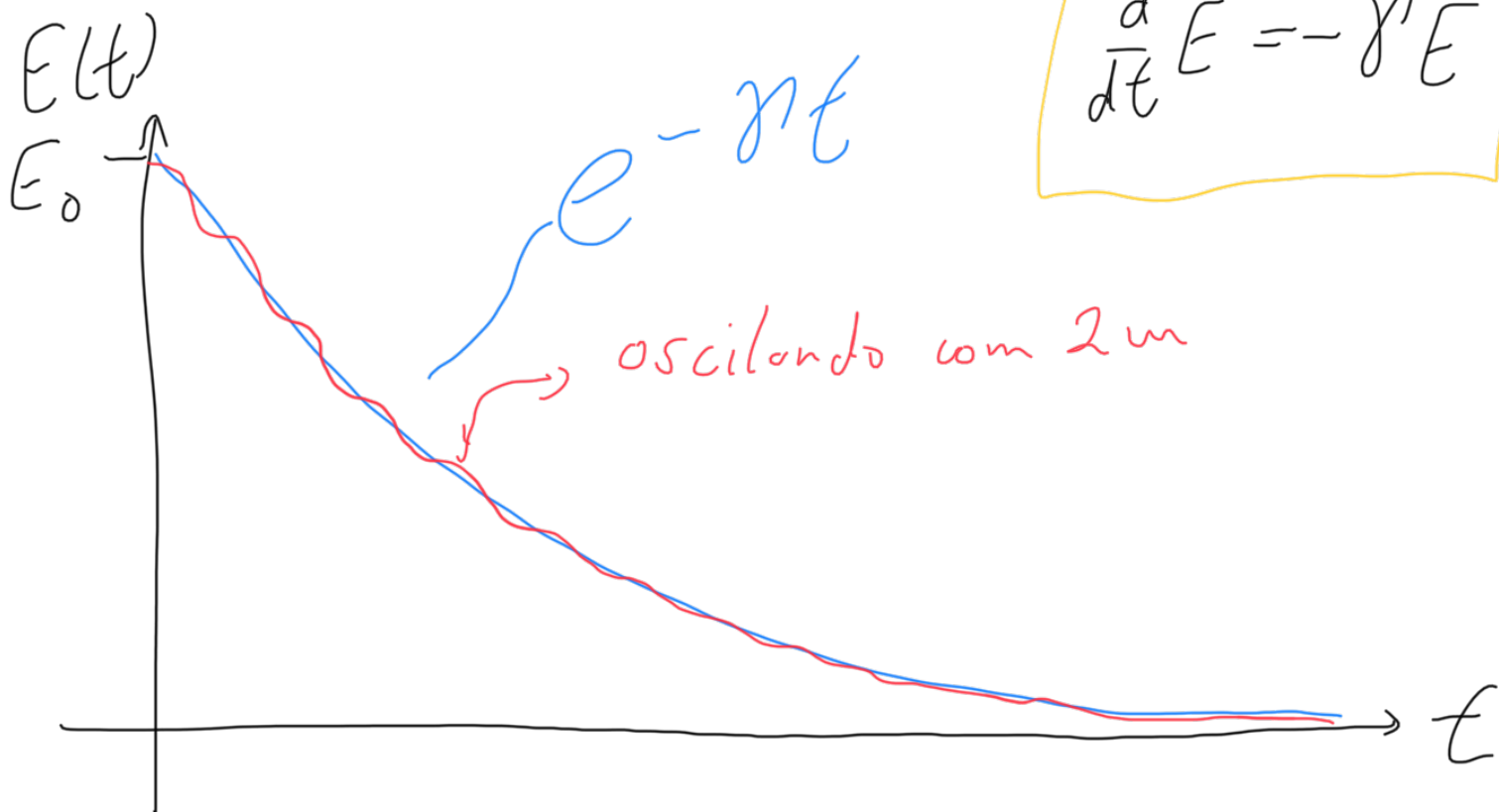
decaimento exponencial

termo oscilante

Amortecimento Fraco: $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$

$$\overline{E}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(t') dt' = \frac{1}{2} m m_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -\gamma \overline{E}$$



Definição útil: Fator de mérito

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{Energia no oscilador}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} \right) = 2\pi \frac{\bar{E}}{\Delta \bar{E}}$$

$$\Delta \bar{E} = -\frac{d}{dt} \bar{E} \cdot T = \gamma T \cdot \bar{E}$$

$$Q = \frac{2\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{\gamma} \gg 1 \quad \begin{array}{l} \text{amortecimento} \\ \text{fraco} \end{array}$$

$$\frac{1}{\gamma} = T_d \rightarrow \text{tempo de decaimento}$$

$$Q = 2\pi \frac{T_d}{T}$$

2º caso: Amortecimento supercrítico

$$z(t) = A e^{p-t} + B e^{p+t}$$

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}; \quad \frac{\gamma}{2} > \omega_0; \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$p_{\pm} \in \mathbb{R}; \quad A, B \in \mathbb{R} \Rightarrow z(t) = x(t) \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A e^{-\beta t} + B e^{\beta t})$$

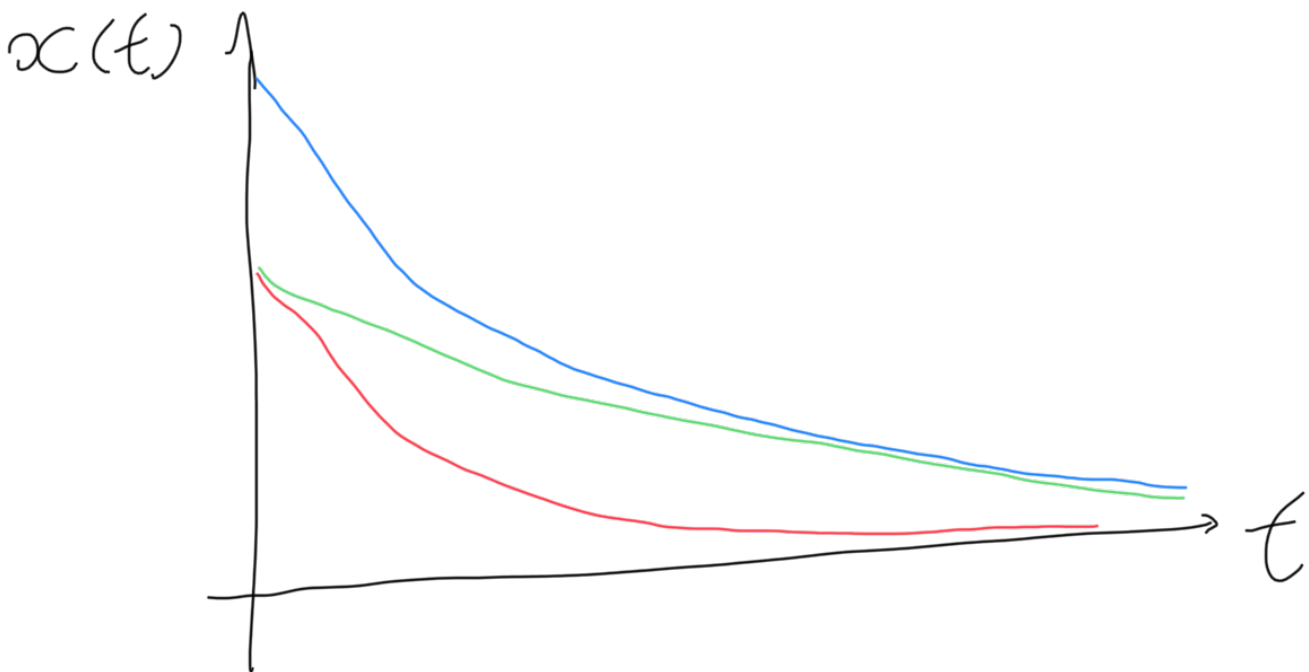
$$= A \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t\right] + B \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t\right]$$

decaimento rápido

decaimento lento

$$m_0 \ll \frac{\gamma}{2} \rightarrow e^{-\gamma t} \text{ domina}$$

$m_0 \rightarrow \frac{\gamma}{2} \rightarrow$ decaimento muito lento!



3º caso: $\frac{\gamma}{2} = m_0 \Rightarrow \beta = 0$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad ? \quad \text{Somente uma solução?}$$

Tomar o limite: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}) =$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cdot \left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$+ e^{-\frac{\gamma}{2}t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \cdot \left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) = 2; \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = 0$$

Aproximando em 1ª ordem

$$e^{\beta t} - e^{-\beta t} \approx (1 + \beta t) - (1 - \beta t) = 2\beta t$$

$$x(t) = \left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot 2\beta t e^{-\frac{\gamma}{2}t} =$$

$$= a e^{-\frac{\gamma}{2}t} + b t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$x(t) = (a + bt) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad \text{é solução!}$$

Verifique!

Amortecimento crítico!