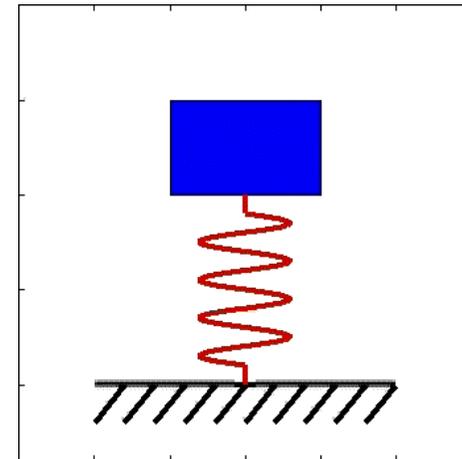


Em um oscilador, o período da oscilação depende da amplitude?

1) Não, nunca.

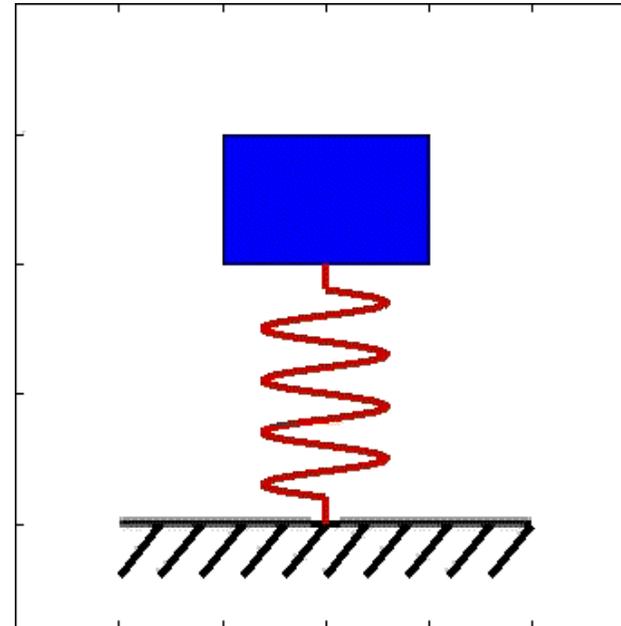
2) Sim, sempre.

3) Não, em primeira aproximação.



Em um oscilador, que grandeza pode ser considerada constante?

- 1) posição da massa
- 2) velocidade da massa
- 3) energia total
- 4) energia da massa
- 5) energia da mola

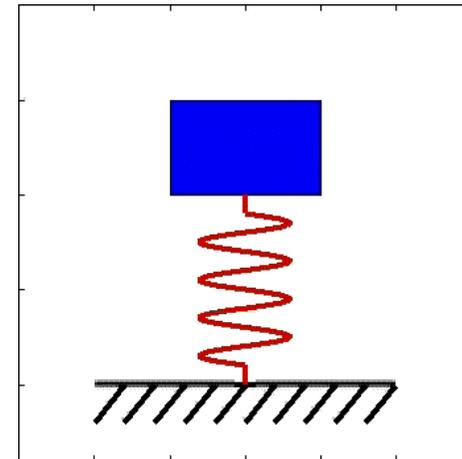


Em um oscilador **harmônico**, o período da oscilação depende da amplitude?

1) Não, nunca.

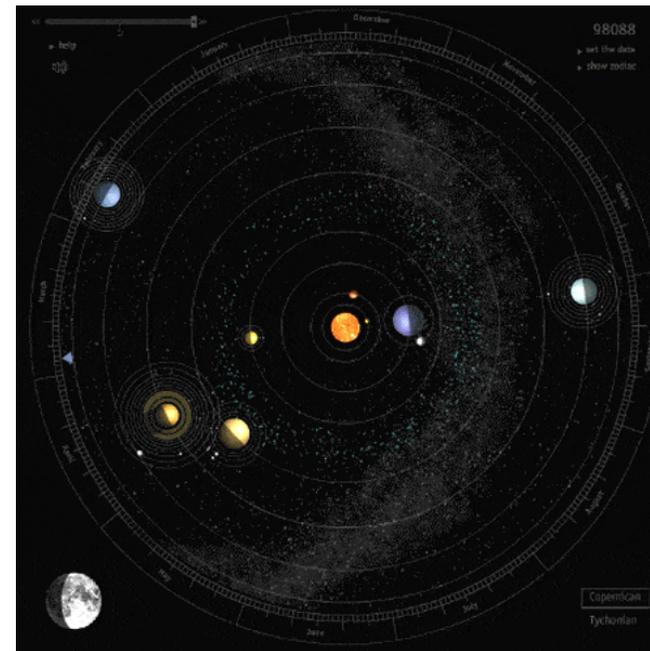
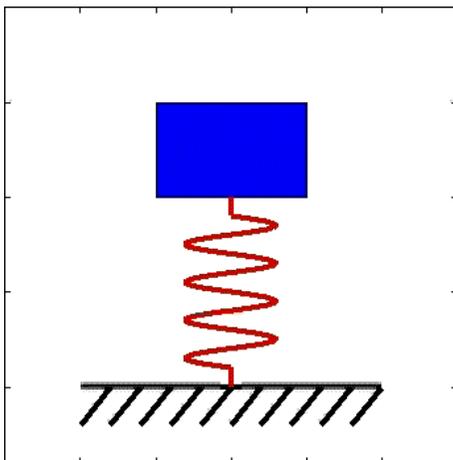
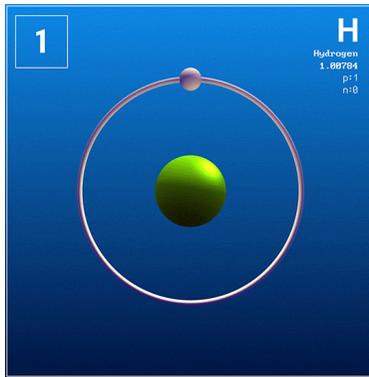
2) Sim, sempre.

3) Não, em primeira aproximação.



# Oscilador Harmônico

Que sistemas podem ser descritos por um oscilador harmônico?

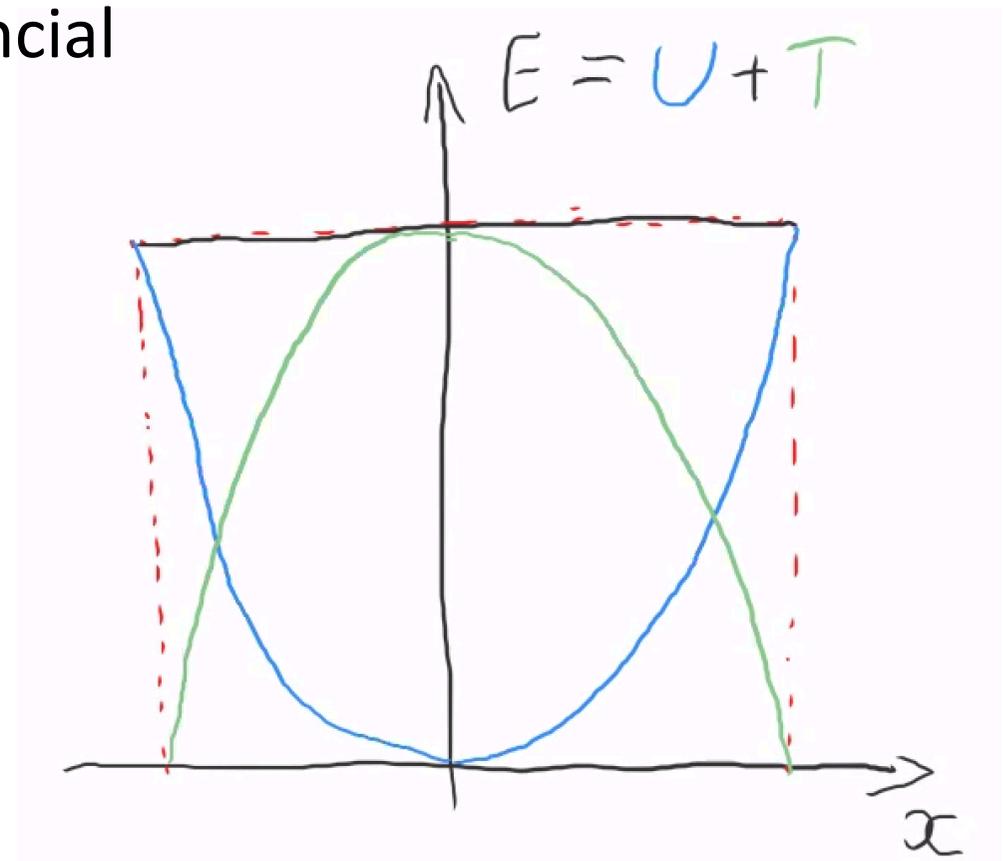
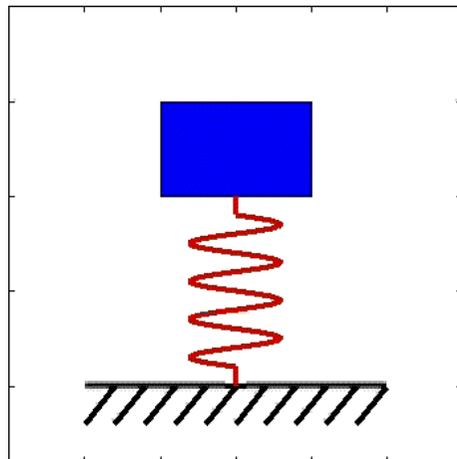


## Oscilador – caso geral

Oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável.

Mínimo de energia potencial.

Balanço entre energia potencial e energia cinética

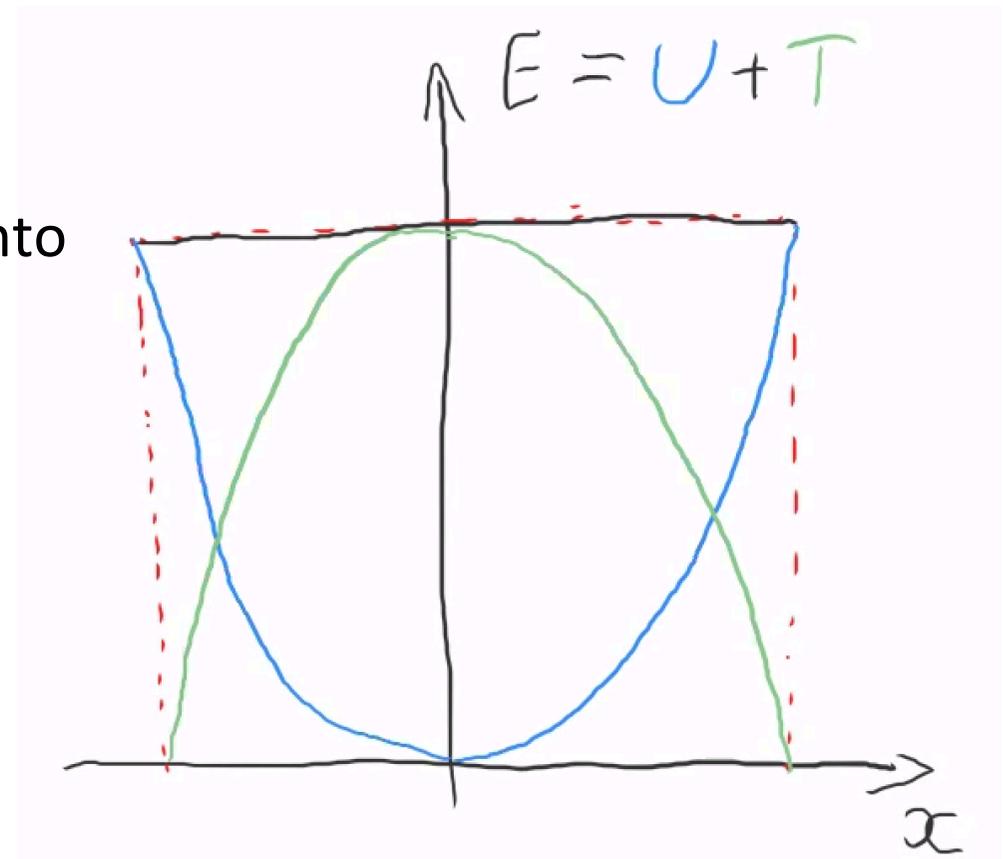
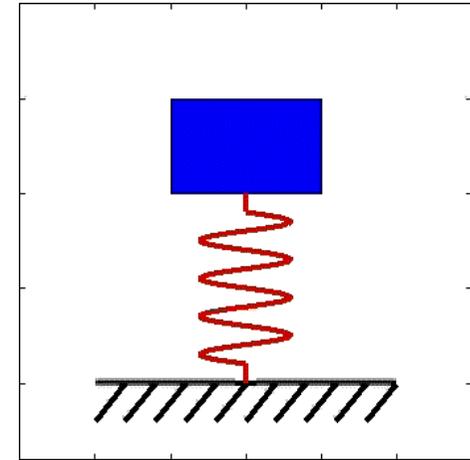


# Oscilador Harmônico

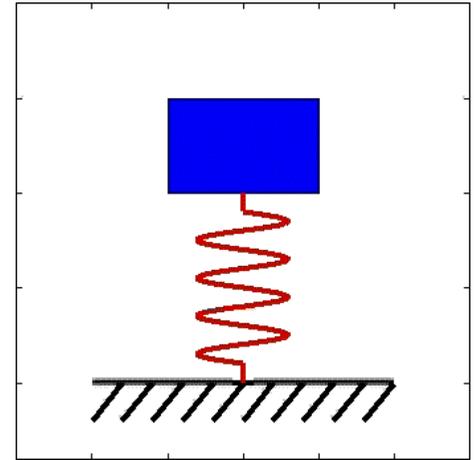
Potencial quadrático – Parábola

Características

- Período envolvido
- Amplitude do movimento
- Velocidade máxima do movimento
- Aceleração máxima
- Fase – Condições Iniciais



Dinâmica:  $F = m \cdot a$



Lei de Hooke:

$$F = -k \cdot x(t)$$

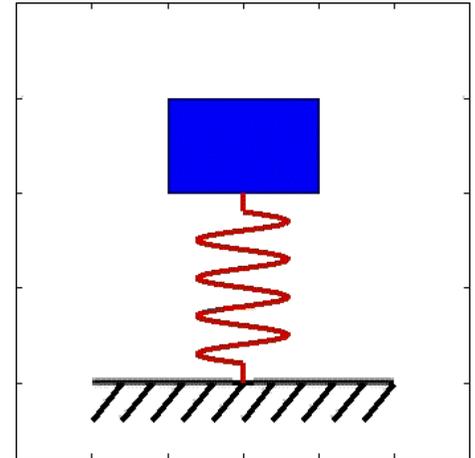
Cinemática:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Dinâmica:  $F = m \cdot a$

Cinemática:  $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$

Lei de Hooke:  $F = -k \cdot x(t)$



Equação do movimento: diferencial ordinária de 2<sup>a</sup>. ordem

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \geq 0$$

Já vimos equações deste tipo

- Exemplo → aceleração constante

$$F = m \cdot a \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \left(\frac{F}{m}\right)$$

- Solução → Integração Direta

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt}x(t) \right]_0^t &= v(t) - v_0 = \int_0^t \frac{d^2}{dt^2}x(t) dt \\ &= \int_0^t \left(\frac{F}{m}\right) dt = \left(\frac{F}{m}\right) t \end{aligned}$$

- Novamente. 
$$[x(t)]_0^t = x(t) - x_0 = \int_0^t \frac{d}{dt}x(t)dt$$
$$= \int_0^t v_0 + \left(\frac{F}{m}\right)tdt = v_0t + \left(\frac{F}{m}\right)\frac{t^2}{2}$$

- Resultado  $\rightarrow$  duas condições iniciais

$$x(t) = x_0 + v_0t + \left(\frac{F}{m}\right)\frac{t^2}{2}$$

- Verificação

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \left(\frac{F}{m}\right)$$

Precisamos encontrar soluções para a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Solução: funções cuja derivada  
é proporcional à própria função

Solução: funções cuja derivada retorna a própria função

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\exp(\alpha t) = e^{\alpha t}$$

---

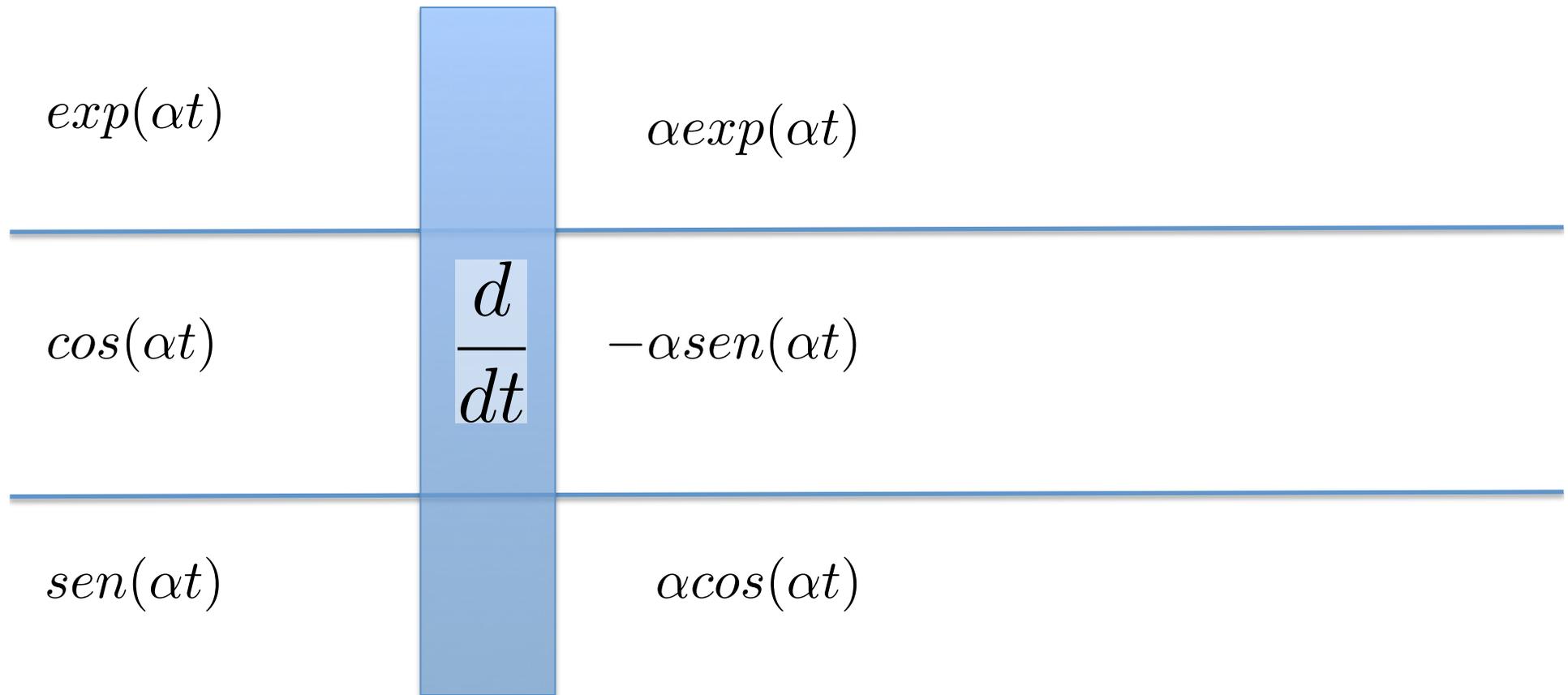
$$\cos(\alpha t)$$

---

$$\text{sen}(\alpha t)$$

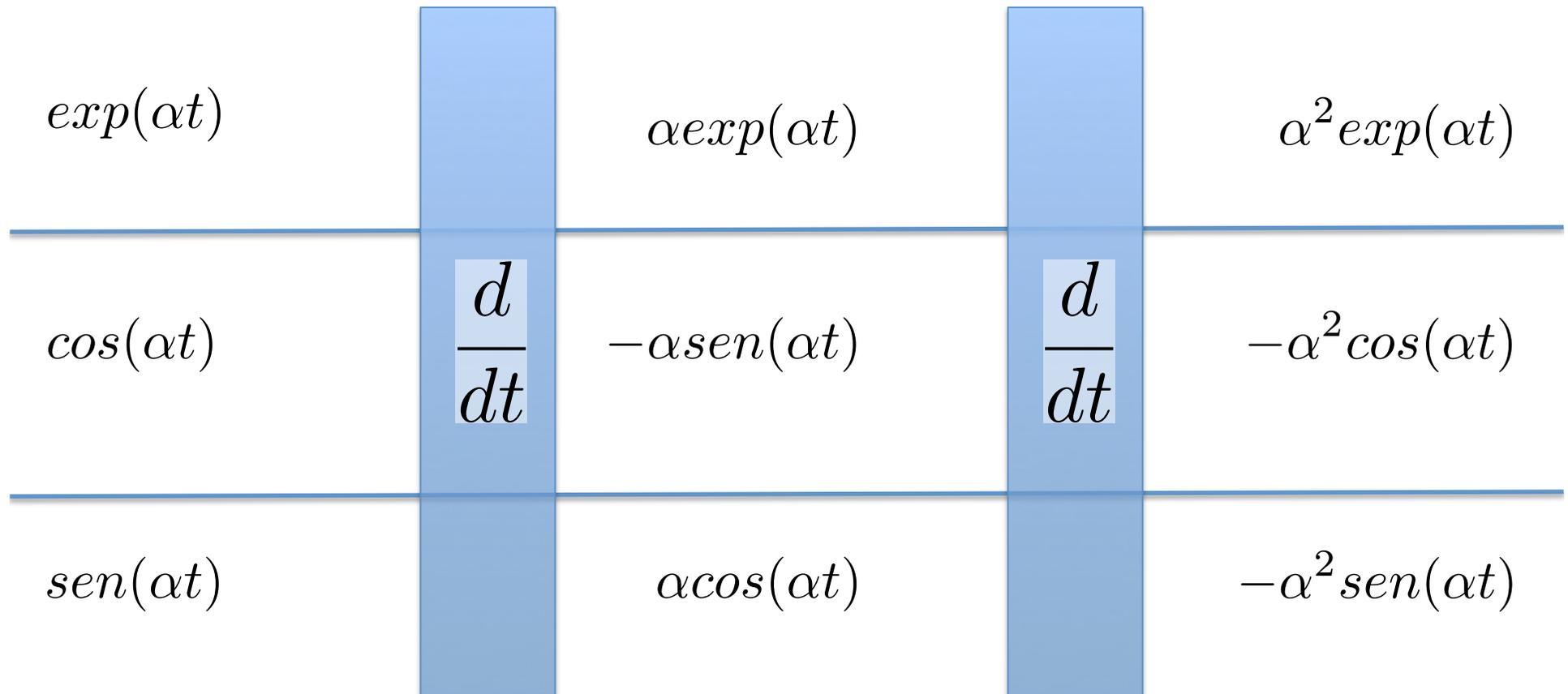
Solução: funções cuja derivada retorna a própria função

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$



Solução: funções cuja derivada retorna a própria função

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$



Solução: funções cuja derivada retorna a própria função

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$

	$exp(\alpha t)$		$\alpha^2 exp(\alpha t)$	$\alpha = \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$
$\frac{d^2}{dt^2}$	$cos(\alpha t)$	<b>=</b>	$-\alpha^2 cos(\alpha t)$	$\alpha = \pm \sqrt{\omega^2} = \pm \omega$
	$sen(\alpha t)$		$-\alpha^2 sen(\alpha t)$	$\alpha = \pm \sqrt{\omega^2} = \pm \omega$

Temos 3 funções que podem nos ser úteis.

Devemos usar todas elas?

Um pouco de matemática:

Equação diferencial linear de 2<sup>a</sup>. ordem.

$$A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = F$$

$A, B, C, F$  são independentes de  $x$ .

Podem ser dependentes de  $t$ .

*Modulação do parâmetro – dispositivos!*

No caso de  $F = 0 \rightarrow$  Equação homogênea

$$A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

$x_1$  é solução  $\rightarrow a \cdot x_1$  também é solução,

$x_1$  é solução,  $x_2$  é solução  $\rightarrow x_1 + x_2$  também é solução,

Para duas soluções tais que  $x_1 \neq c x_2$  :

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow \text{Linearidade / superposição}$$

$a$  e  $b$  são as constantes iniciais do problema!

Bastam duas soluções independentes.

O que precisamos agora é definir as condições iniciais.

Tomando as soluções seno e cosseno:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

Note que usar a solução com o sinal – seria

equivalente a trocar  $b$  por  $-b$

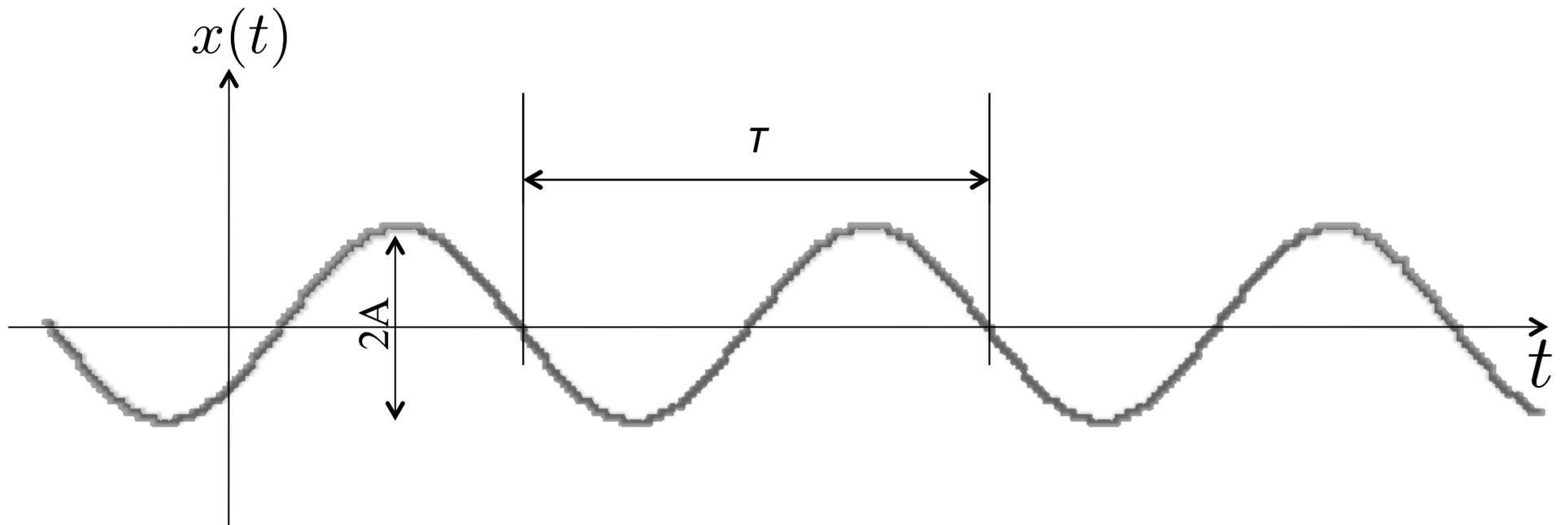
$a, b \rightarrow$  quadraturas

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$$

Escrito de forma mais compacta: Amplitude e fase

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

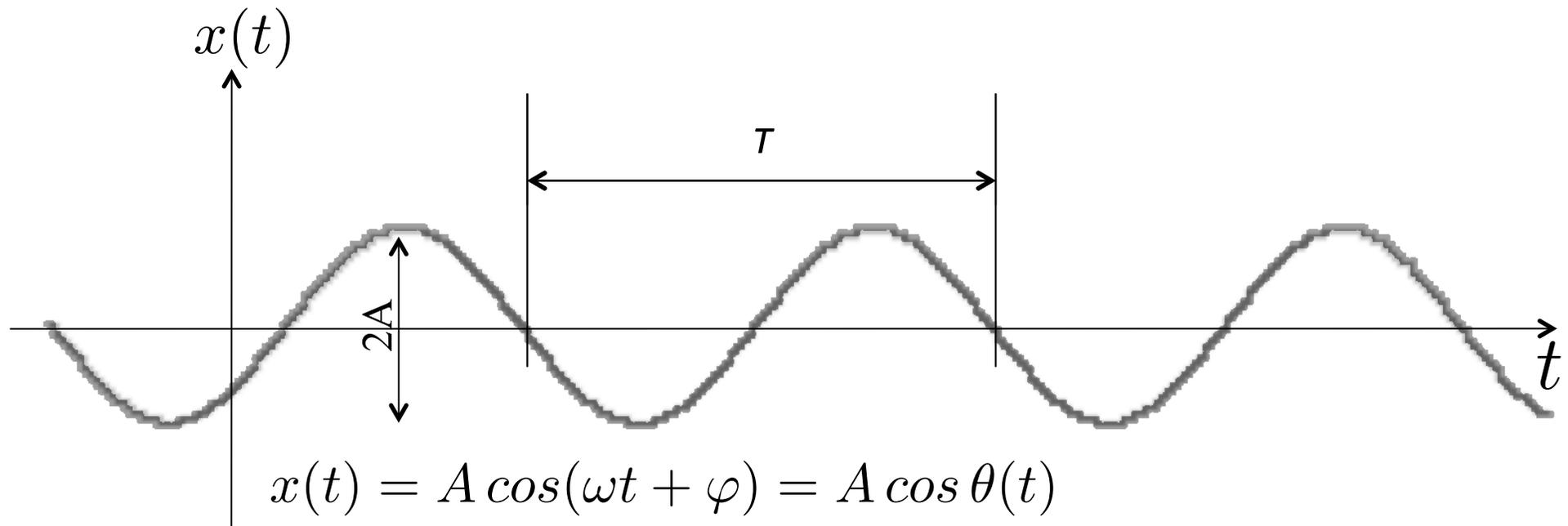
$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\operatorname{sen} \varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \theta(t)$$

$$\theta(t) = \omega t + \varphi$$

$$\theta(t + T) = \omega t + \varphi + 2\pi$$



$T$  : período (medido em segundos).

Frequência angular  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  (medida em rad/s).

Frequência  $\nu = \frac{1}{T}$  , medida em Hertz (Hz = s<sup>-1</sup>).

## Condições Iniciais:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Velocidade:  $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

$$x_0 = x(0) = A \cos \varphi$$

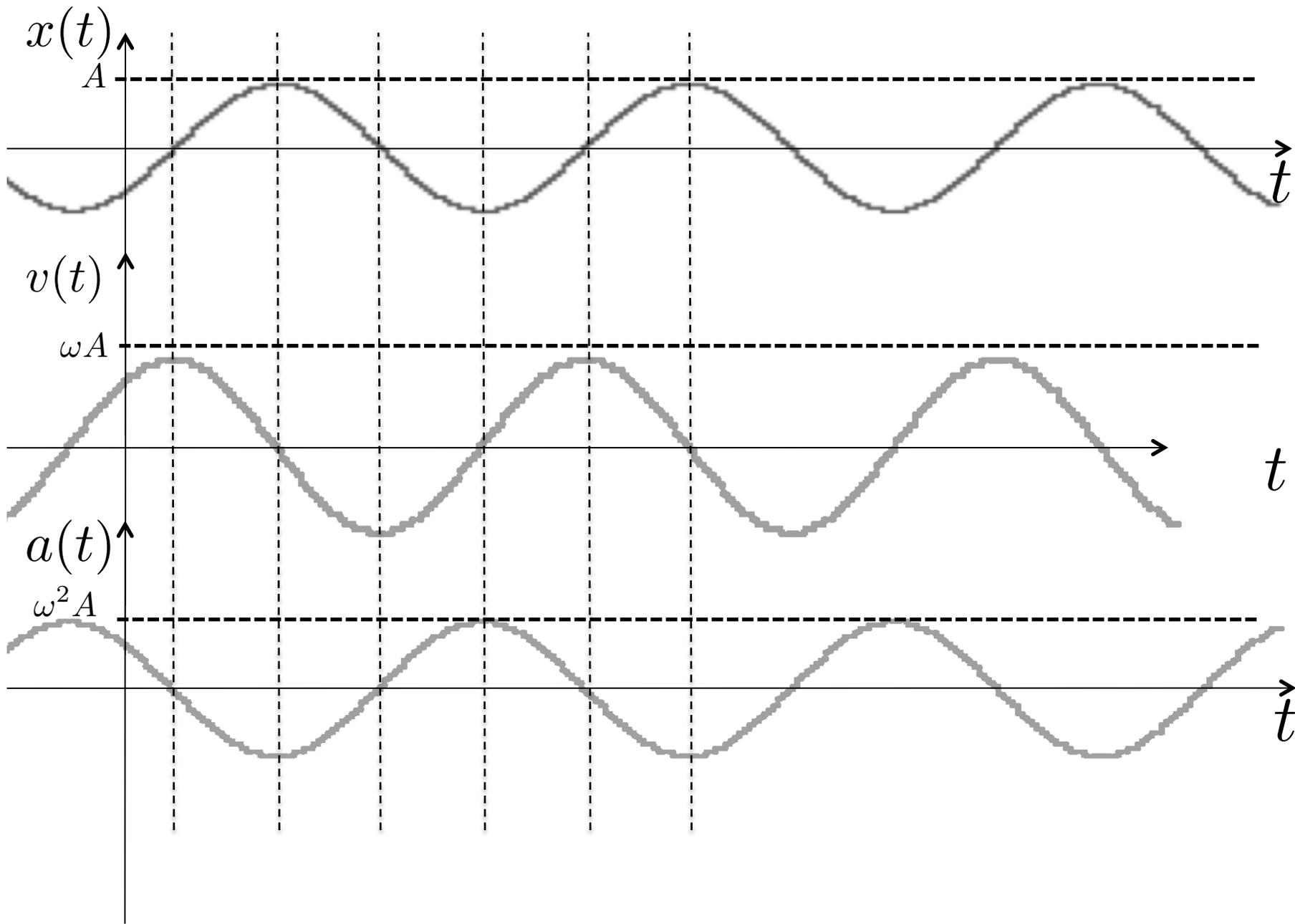
$$v_0 = v(0) = -\omega A \operatorname{sen} \varphi$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

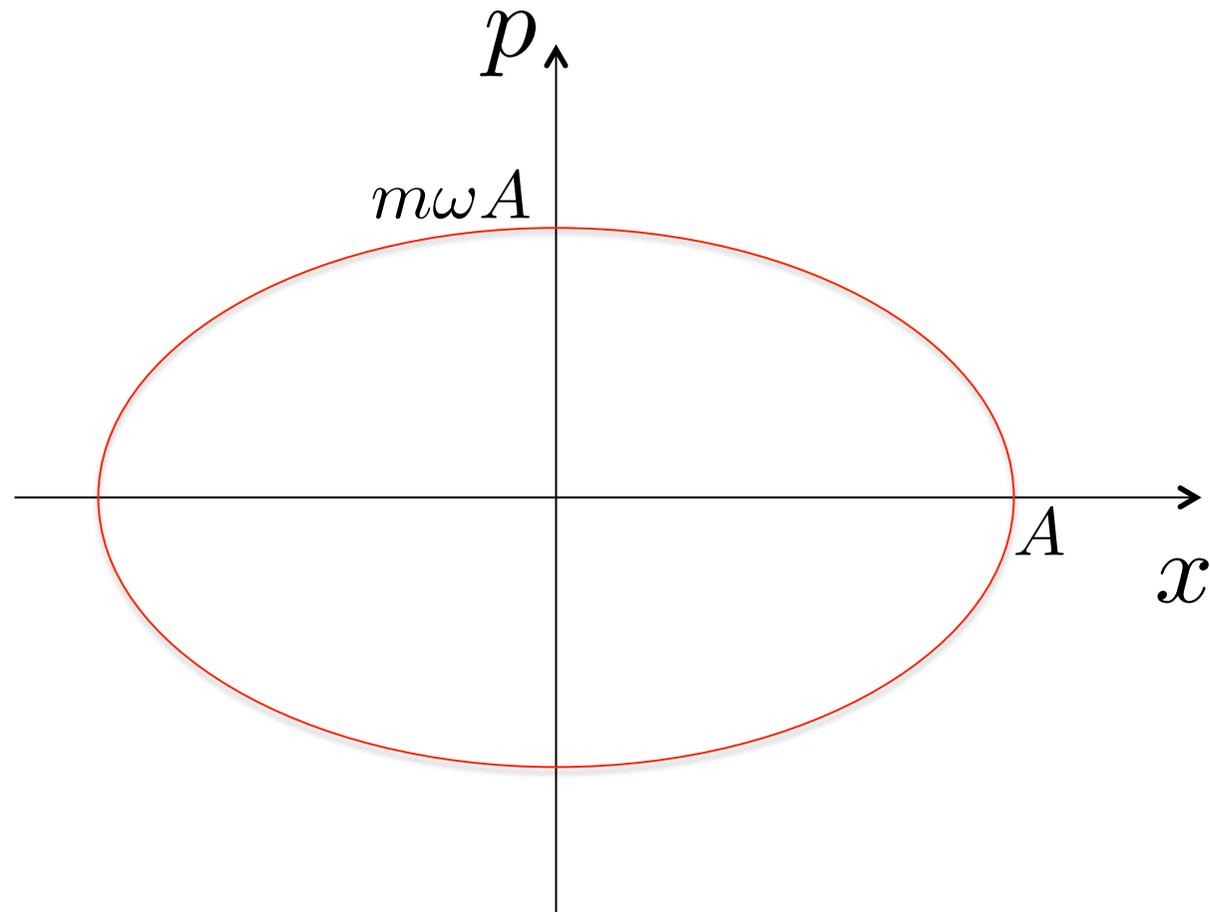
$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = -\frac{v_0}{\omega A}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$$



## Espaço de Fase: Posição X Momento



Trajetória elíptica:

$p$  e  $x$  em quadratura  
(diferença de fase de  $90^\circ$ )

## Energia no oscilador harmônico:

Cinética: 
$$K(t) = \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{p^2(t)}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

Potencial: 
$$U(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{m\omega^2 x^2(t)}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{cos}^2(\omega t + \varphi)$$

Energia mecânica total:

$$E = U(t) + K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

# Energia no oscilador harmônico:

$$E = K(p) + U(x)$$

$$K(p) = \frac{p^2}{2m} \quad U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

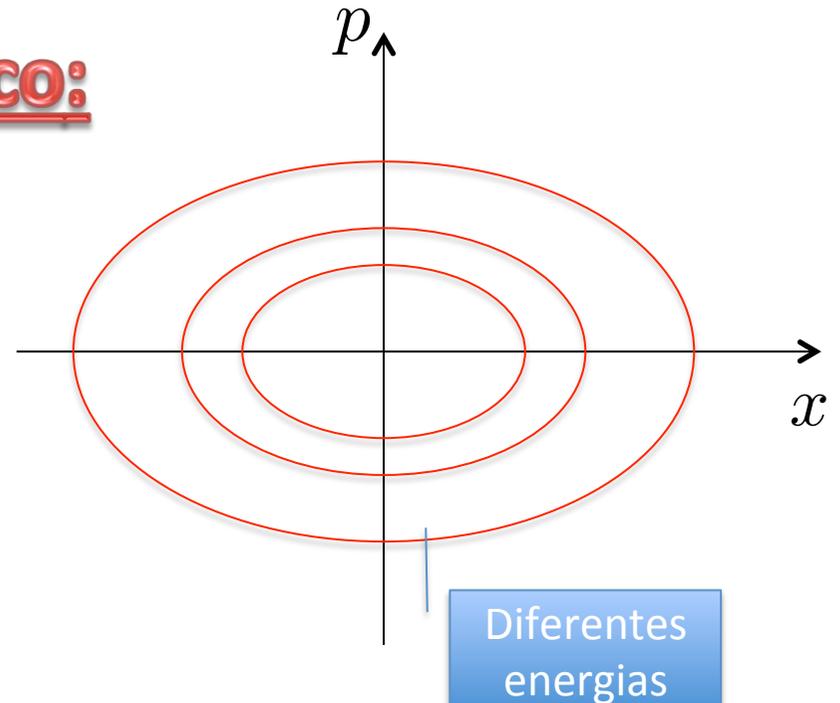
$$p(t) = m \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Aceleração

Força de restauração

Inércia



$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

## Duas abordagens equivalentes

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Uma única resposta:  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

O problema passa a ser:

Encontrar a frequência angular

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \geq 0$$

Encontrar as condições iniciais

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}$$

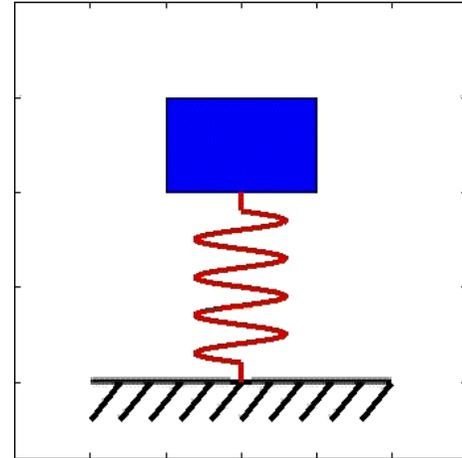
$$\text{sen } \varphi = -\frac{v_0}{\omega A}$$

## Mínimo potencial - Massa-mola

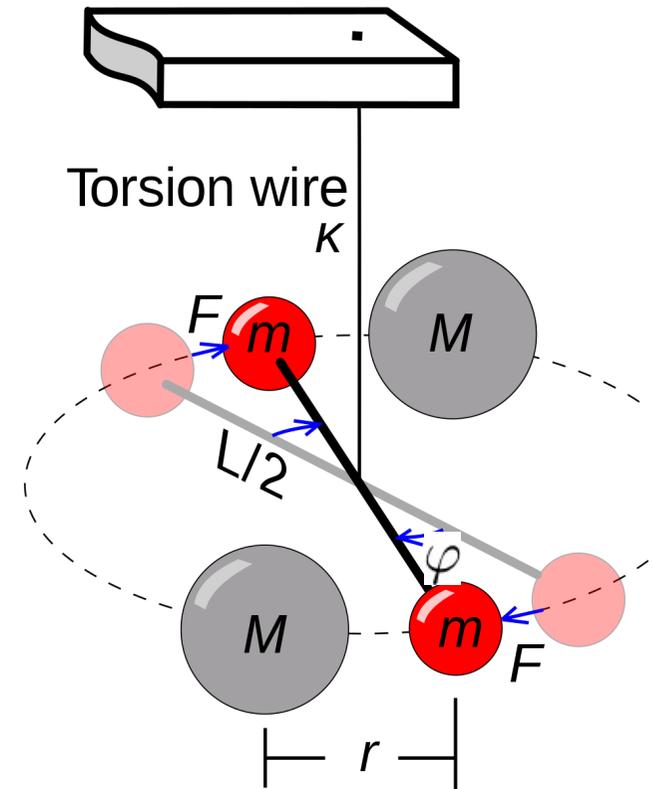
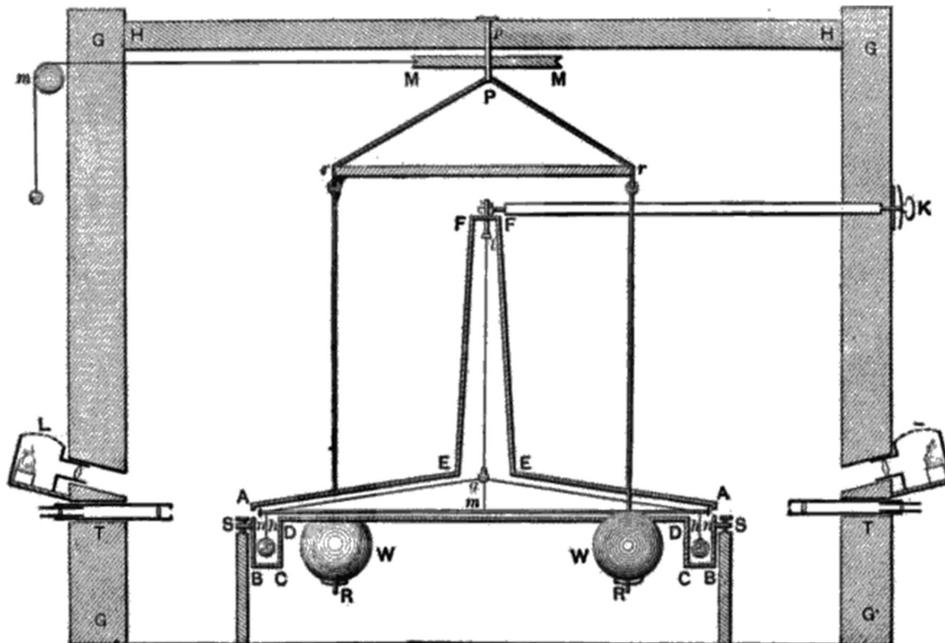
$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) = -kx$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \geq 0$$



# Torque de restauro – Pêndulo de Torção

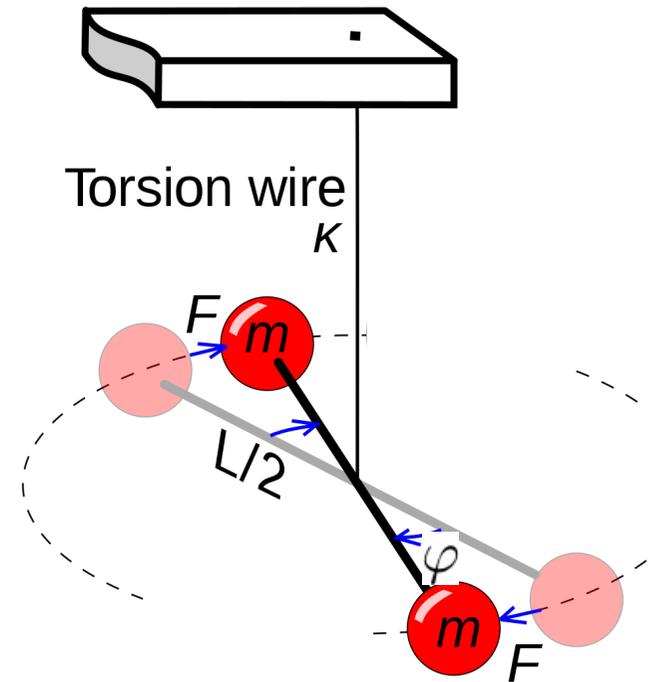


## Torque de restauro - Pêndulo de Torção

$$\tau = I \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) \quad \tau = -K \varphi$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi + \omega^2 \varphi = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K}{I}$$



## Pêndulo simples

Aceleração radial

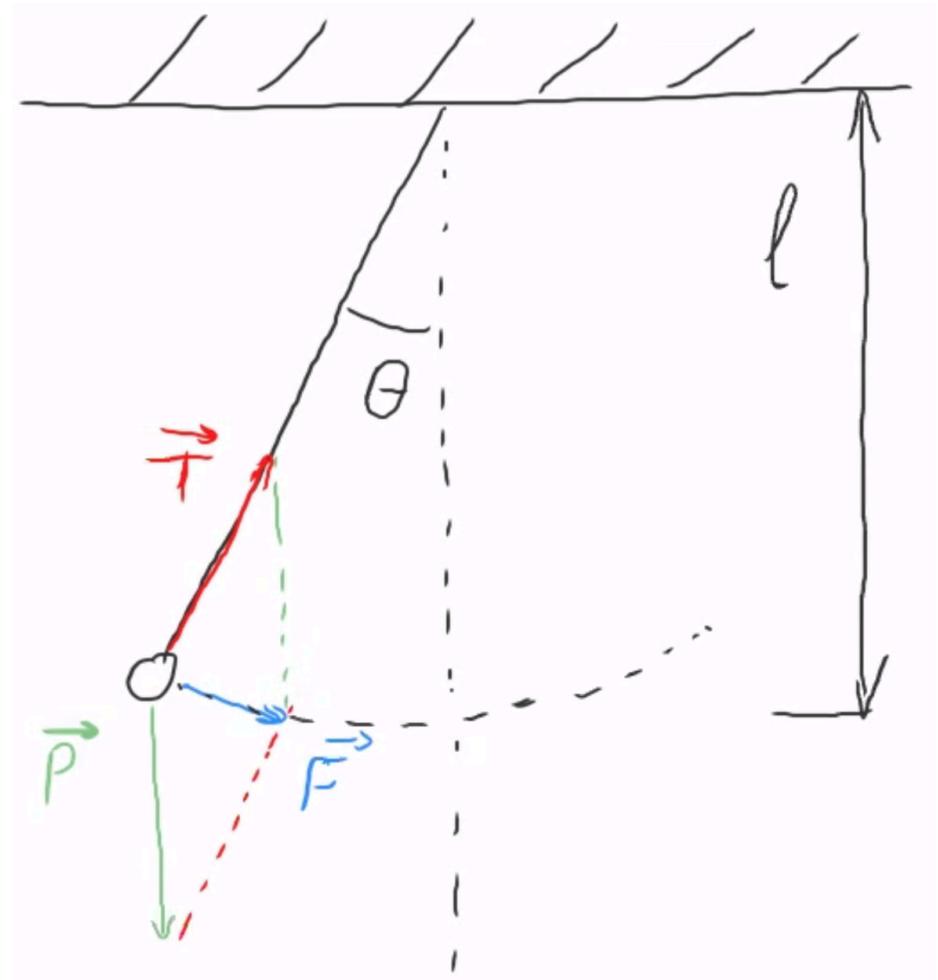
$$m a_r = -m\ell \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T = 0$$

Aceleração tangencial

$$m a_\theta = m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta \simeq \theta \quad \theta \ll 1$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$



## Pêndulo simples

Energia Cinética

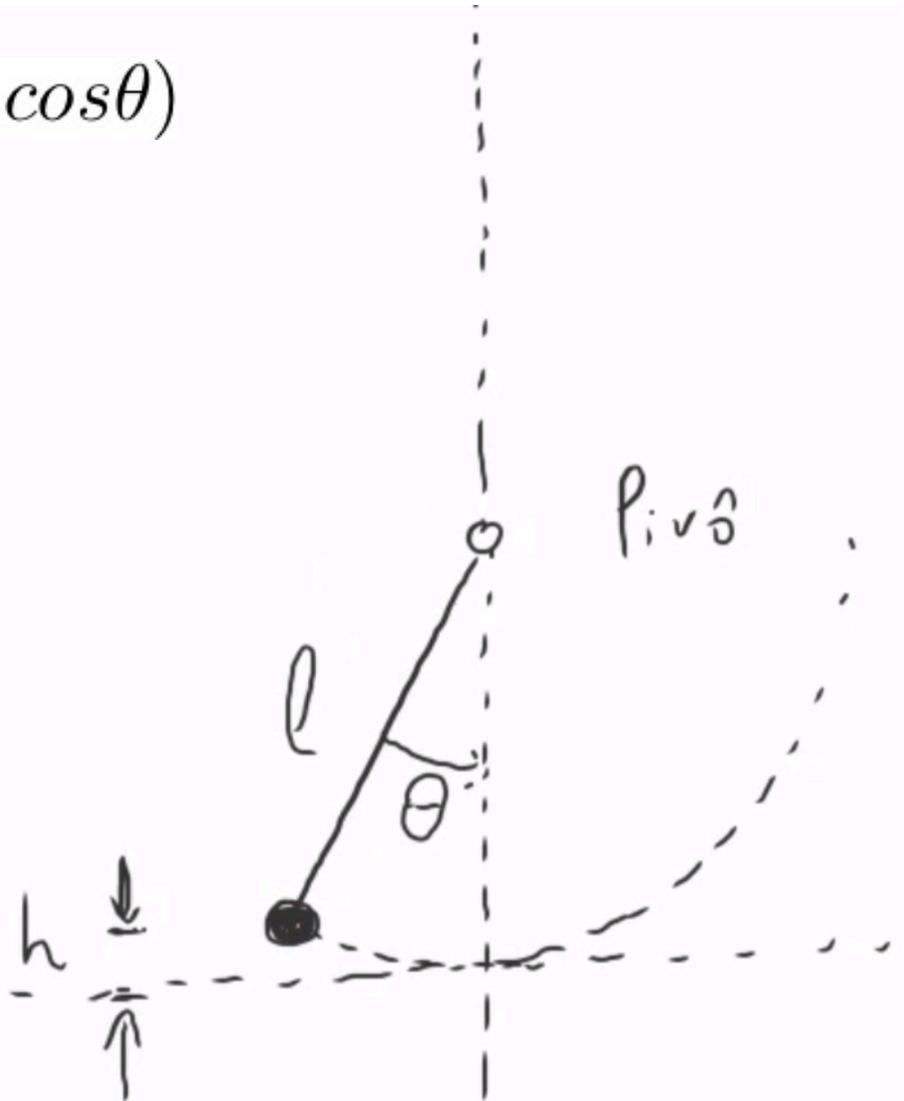
$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Energia Potencial  $U = mgl(1 - \cos\theta)$

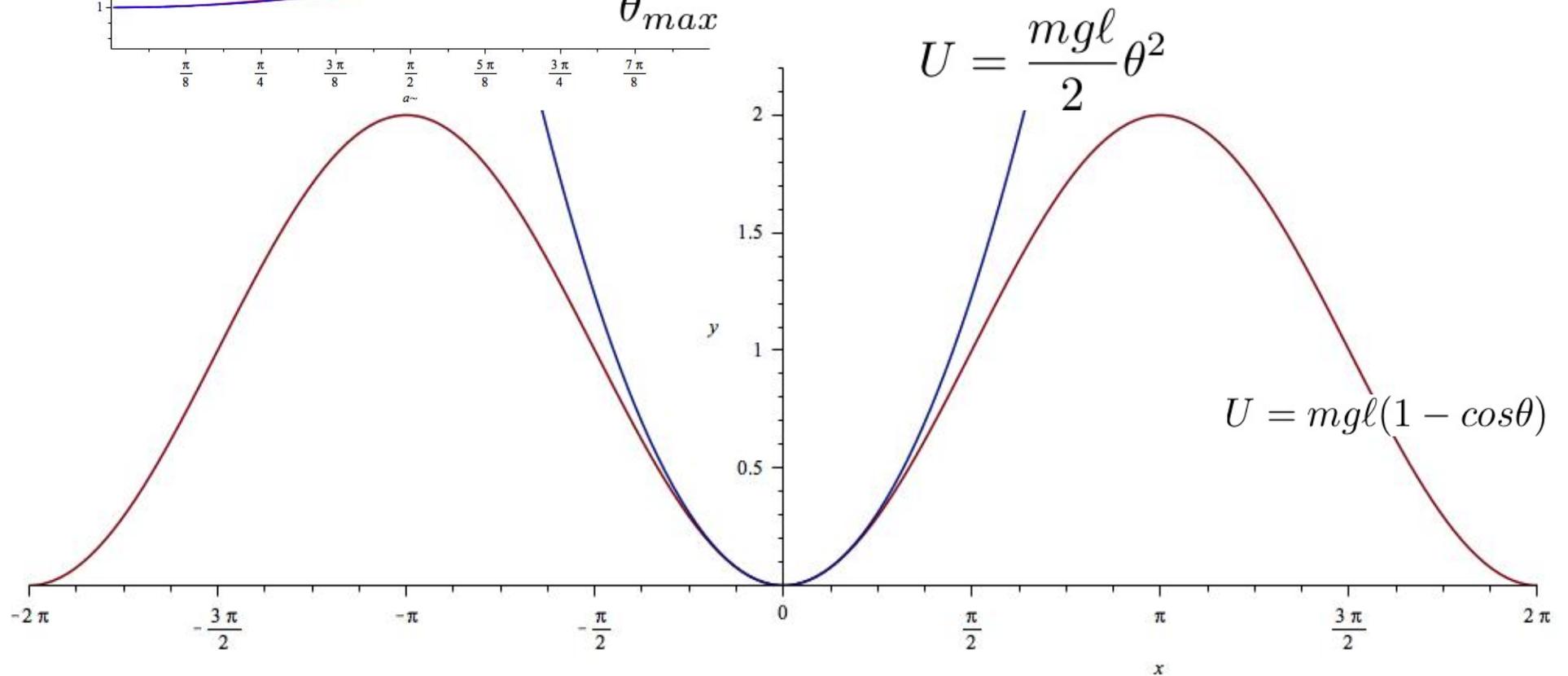
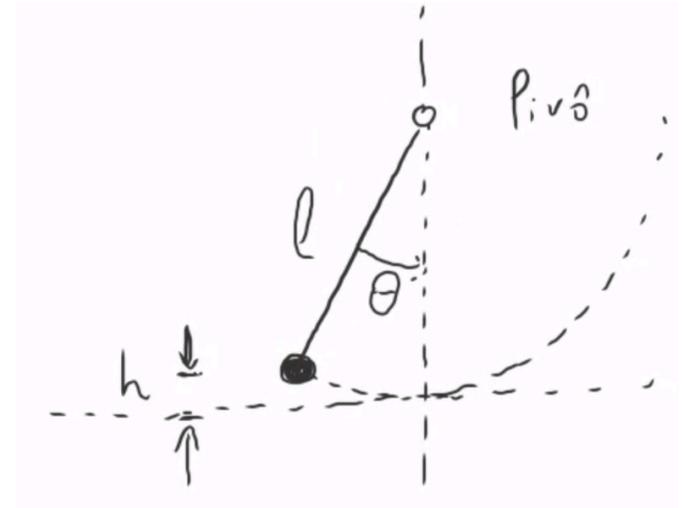
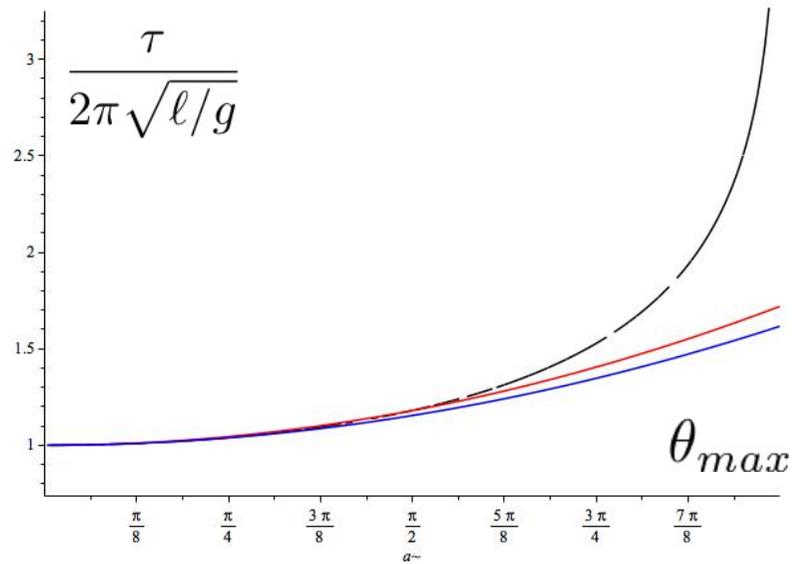
$$\theta \ll 1 \quad U = \frac{mgl}{2} \theta^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$E = \frac{ml^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{ml^2}{2} \left( \frac{g}{l} \right) \theta^2$$



# Pêndulo simples

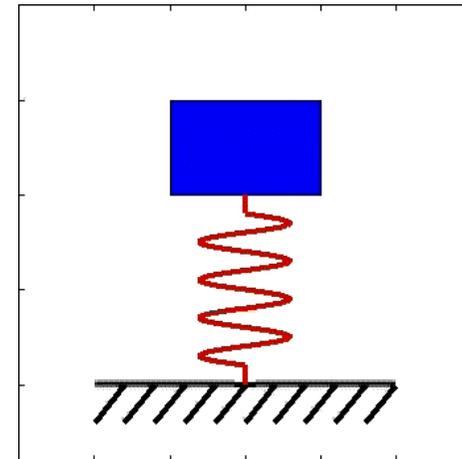


Em um oscilador, o período da oscilação depende da amplitude?

1) Não, nunca.

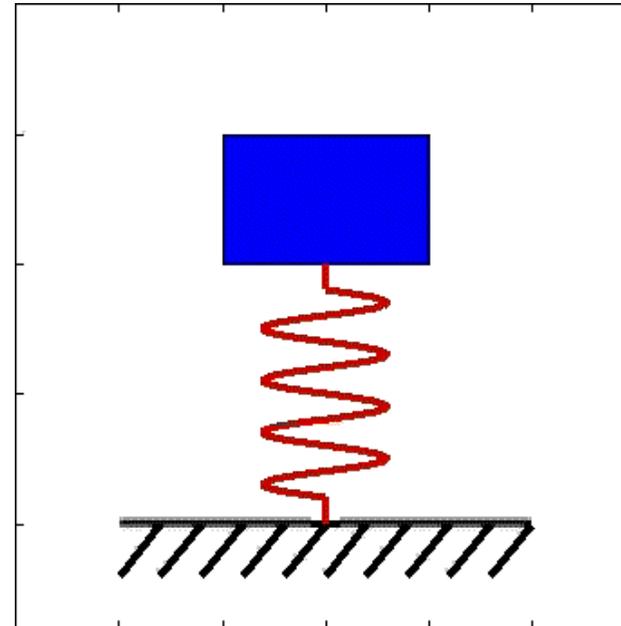
2) Sim, sempre.

3) Não, em primeira aproximação.



Em um oscilador, que grandeza pode ser considerada constante?

- 1) posição da massa
- 2) velocidade da massa
- 3) energia total
- 4) energia da massa
- 5) energia da mola



Em um oscilador **harmônico**, o período da oscilação depende da amplitude?

1) Não, nunca.

2) Sim, sempre.

3) Não, em primeira aproximação.

