SUBSEQUÊNCIAS

Uma subsequência de $\{a_n\}$ é uma restrição da aplicação $n \to a_n$ a um subconjunto infinito da forma

$$N' = \{n_1 < n_2 < .... < n_k < ....\} \quad de \quad \mathbb{N}.$$

A subsequência é denotada pela notação $\{a_n\}_{n\in N'}$ ou $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e podemos falar do limite da subsequência

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

A subsequência $a_{n_1}, a_{n_1}, a_{n_1}, ...a_{n_1}, ...$ pode ser considera como uma subsequência no seguinte sentido:

$$1 \to a_{n_1}, \qquad 2 \to \ a_{n_2}, \qquad 3 \to a_{n_3}, ... \quad k \to a_{n_k}, ...$$

EXEMPLO: Seja a sequência

$$2, 4, 8, 16, ...2^n, , , , , , ,$$

Possue a subsequência

$$4, 16, 64, ..., 4^k, ...$$

onde N' é o conjunto dos números pares.

Teorema Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então toda subsequência de $\{a_n\}$ converge para L.

Corolário Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_{n\to\infty} a_{n+p} = L$.

Observação Se uma sequência $\{a_n\}$ possui duas subsequências que convergem para limites distintos então $\{a_n\}$ é divergente. Isso vem do teorema acima pois:

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então toda subsequência de $\{a_n\}$ convergiria para L, mas como o limite é único temos uma contradição. Portanto temos o afirmado.

EXEMPLO: A sequência $\{(-1)^n\}$ é formada pelos elementos $\quad -1, 1, -1, 1, , , , , , , (-1)^n, , , , , ,$

Agora pegue a subsequência: 1,1,1,1,....... (Isto é a subsequência formada pelos elementos a_{2n}), converge para 1.

Mas a subsequência: -1,- 1, -1, -1,....... (Isto é a subsequência formada pelos elementos a_{2n-1}), converge para -1.

Portanto podemos concluir pela observação acima que a sequência $\{(-1)^n\}$ diverge, pois o limite não existe.

MAIS EXEMPLOS

1) Seja a sequência $\{a_n\}$ dada pela formula

$$a_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}).....(1 - \frac{1}{n^2}), \quad n \geq 2$$

Analise as seguintes afirmações:

I) $\{a_n\}$ é divergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

II) $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

III) $\{a_n\}$ é limitada inferiormente por 0 e limitada superiormente por 1

IV) $\{a_n\}$ é convergente com $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$

São verdadeiras:

(Escolha uma resposta)

a) I) é a única verdadeira

b) II) é a única verdadeira

c) II) e III) são as únicas verdadeiras

d) III) é a única verdadeira

e) III) e IV) são as únicas verdadeiras

Solução: Observe

$$a_2 = (1 - \frac{1}{2^2}),\ a_3 = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}),\ a_4 = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}), ...$$

Logo

$$(\frac{2^2 - 1}{2^2}).(\frac{3^2 - 1}{3^2}).....(\frac{n^2 - 1}{n^2}) =$$

$$= \frac{(2-1)}{2}\frac{(2+1)}{2}.\frac{(3-1)}{3}\frac{(3+1)}{3}.\frac{(4-1)}{4}\frac{(4+1)}{4}.......\frac{(n-1)}{n}\frac{(n+1)}{n}.$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n+1}{n}$$

Portanto a sequência é convergente e converge para 1/2. Isso é $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

Portanto ela é convergente a 1/2.

Também observe que a sequência é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1. Logo os items certos são III) e IV). Logo resposta e).

2) O limite da sequência:

$$a_n = n - n^2 \sin(\frac{1}{n})$$

é igual a:

(Escolha uma resposta)

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$.

Solução: Observe que a sequência tem a forma:

$$a_1 = 1 - \sin(1),\ a_2 = 2 - 4\sin(1/2),\ a_3 = 3 - 9\sin(1/3), ..., a_n = n - n^2\sin(1/n), , , , , , ,$$

Aqui precisaremos usar o limite fundamental da cálculo, isto é

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pois

$$a_n = n - n^2 \sin(\frac{1}{n}) = n[1 - n\sin(\frac{1}{n})] = \frac{(1 - \frac{\sin(\frac{1}{n})}{1/n})}{\frac{1}{n}}$$

Logo fazendo a mudança $x = 1/n$, temos

$$\lim_{x\to 0} = \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cos(x) + \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + x\sin x + \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\sin x = 0.$$

Portanto a sequência é convergente e converge para 0. Isso é $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Assim é item b).

3) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e seja $f : A \to A$ uma função continua em $a \in A$. Seja $\{a_n\}$ uma sequência definida por:

$$a_1 \in A \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = f(a_n), \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

Suponha que a sequência $\{a_n\}$ converge para a.

Analise as seguintes afirmações:

I) $f(a) = 0$

II) $f(a) = 0$ e $f(a_1) = a_2$

III) $f(a) = a$

IV) $f(a)$ não esta definida

São verdadeiras as afirmações:

(escolha uma resposta):

a) I) e IV) são as únicas verdaderias

b) II) é a única verdadeira

c) III) é a única verdadeira

d) Todas são verdadeiras

e) Todas são falsas.

Solução: Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e f é continua então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Mas $f(a_n) = a_{n+1}$. Agora como

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a,$$

segue-se que $f(a) = a$. Logo item c) é verdadeiro.

4) Considere a seguinte sequência numérica:

$$a_1 = \frac{1}{e}, \qquad a_2 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}, \qquad a_3 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3}, \qquad a_4 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^4}, \ ,,,,,,,,,,$$

Analise as seguintes afirmações:

I) A sequência é limitada inferiormente por 0 e ela é convergente

II) A sequência é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e-1}$

III) A sequência é limitada superiormente por $\frac{1}{e-1}$ e é monotônica crescente.

IV) A sequência é limitada inferiormente por $\frac{1}{e}$ e é decrescente.

São verdadeiras as afirmações:

(escolha uma resposta):

a) I) e IV) são as únicas verdaderias

b) II) é a única verdadeira

c) III) é a única verdadeira

d) I), II) e III) são as únicas verdadeiras

e) Todas são falsas.

Solução: Observe que $a_1 < a_2 < a_3 < ...... < a_n < .....$ portanto a sequência é monotônica crescente.

Também observe que

$$a_2 = \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{e}) = \frac{1}{e}(1 + a_1), \quad a_3 = \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}) = \frac{1}{e}(1 + a_2), ...$$

$$...., \ a_{n+1} = \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n}) = \frac{1}{e}(1 + a_n).$$

Agora:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{e} + \frac{a_n}{e} - a_n = \frac{1}{e} + a_n(\frac{1-e}{e})$$

Mas

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{e} + a_n(\frac{1-e}{e}) \geq 0 \qquad \text{se e so se} \qquad a_n(\frac{1-e}{e}) \geq -\frac{1}{e}$$

$$\text{se e so se} \quad a_n(1-e) \geq -1 \qquad \text{se e so se} \qquad a_n \leq \frac{1}{e-1}$$

Portanto a sequência é limitada superiormente por $\frac{1}{e-1}$.

Agora pelo teorema da sequência monotônica a sequência é convergente a um valor L. Vamos agora calcular o limite L:

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{e} + \frac{a_n}{e}) = \frac{1}{e} + \frac{L}{e}, \qquad \text{onde} \qquad L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Como também $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$, segue-se que

$$L = \frac{1}{e} + \frac{L}{e}$$

ou seja $L(e-1) = 1$, isto é

$$L = \frac{1}{e-1}.$$

Resumindo: a sequência $\{a_n\}$ é monotônica crescente, limitada superiormente por $\frac{1}{e-1}$, é convergente a $\frac{1}{e-1}$. Logo são verdadeiras os items I), II) e III). Logo a resposta é (d).