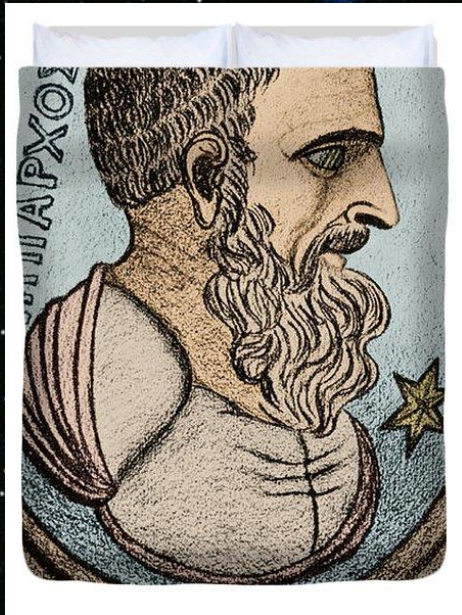


Evolução Estelar 1

J.E. Horvath
IAG-USP



Hipparcos via **as mesmas** estrelas que você ve
(lembram que não tinha telescópio, nem internet
nem nada de nada...)



As estrelas são estruturas **altamente estáveis** no tempo
Não mudam ou mudam muito pouco (há exceções...)

Tempo de vida na MS: a estimativa mais simples

$$\tau = \frac{M}{L}$$

Quanto combustível (cuidado!)

Taxa de consumo do combustível ("metabolismo")

"Tipo Sol"



"Massiva"



Carregando a mesma quantidade de combustível, o primeiro "vive" (anda mais...)

$$\tau_{\star} = \frac{E_{rad}}{L_{\star}} \approx 10^{11} f X_H \frac{M_{\star}/M_{\odot}}{L_{\star}/L_{\odot}} \text{ anos}$$

$$M_{\star} > M_{\odot}$$



$$L_{\star} \gg L_{\odot}$$

evolução rápida

$$M_{\star} < M_{\odot}$$



$$L_{\star} < L_{\odot}$$

evolução lenta

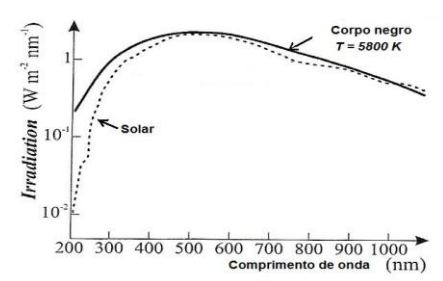
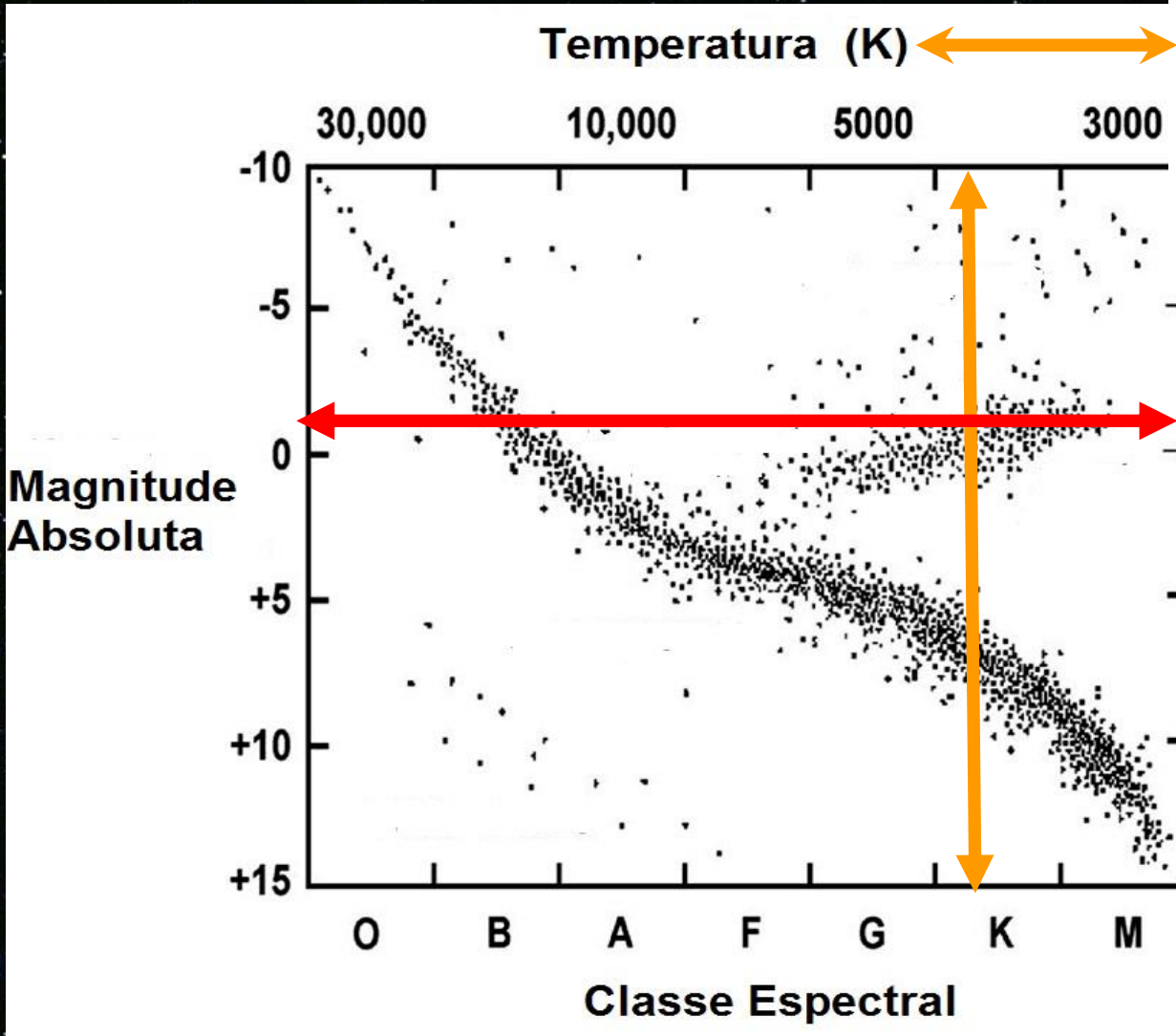
Ajustando

$$L_{\star} \propto M_{\star}^4$$



$$\tau_{\star} \approx 1.2 \times 10^{10} \left(\frac{L_{\star}}{L_{\odot}} \right)^{-3/4} \text{ anos}$$

$$f = 0.15 \text{ (Schöenberg-Chandrasekhar)} \text{ e } X_H = 0.6$$



10,000

100

1.0

0.01

$\frac{L}{L_{\odot}}$

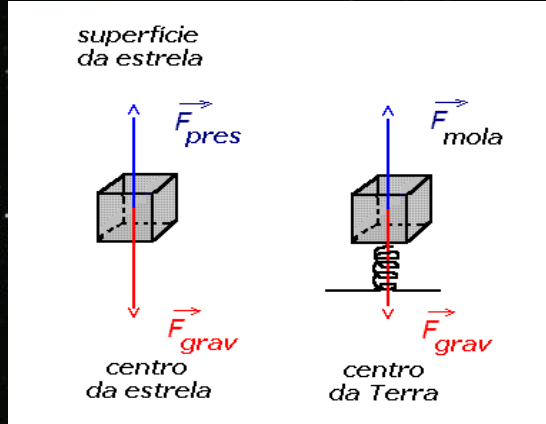
Medimos o Fluxo e estimamos a distância



$$L = \underbrace{4\pi R^2}_{\text{Área}} \times \underbrace{\sigma T^4}_{\text{Fluxo}}$$

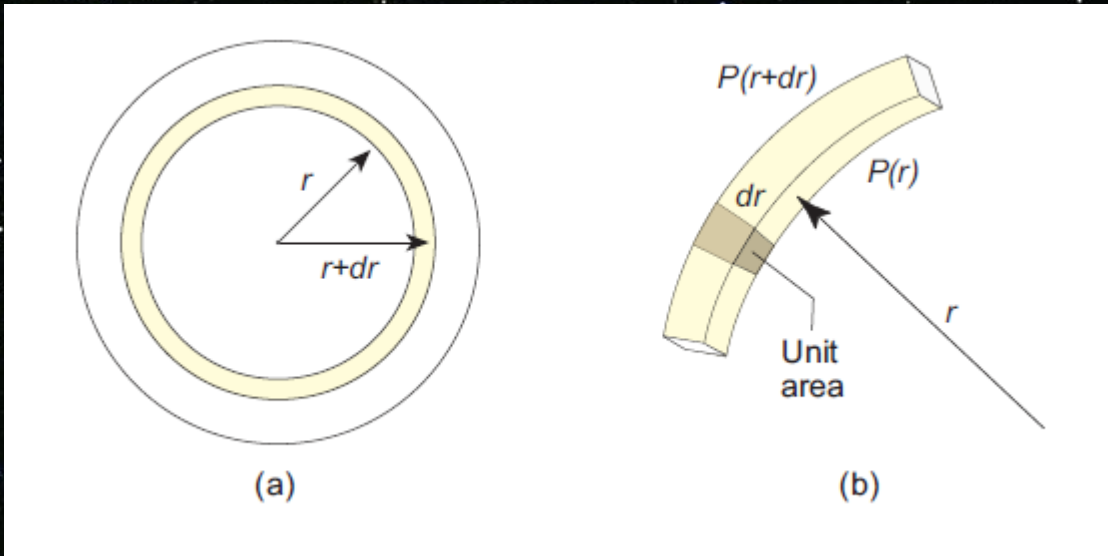
As estrelas são **estruturas em equilíbrio**

Como descrever as estrelas com a física **conhecida**?



Equilíbrio de forças

$$F_{grav} = F_{mola}$$



No caso de cascas concêntricas...

A força gravitacional vai aumentando para fora...

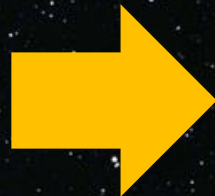
$$F_g = - \underbrace{g(r)}_a \underbrace{\rho dr}_m = -\rho \frac{Gm(r)}{r^2} dr,$$

A força por unidade de área é

$$P(r) - P(r + dr) = -\frac{\partial P}{\partial r} dr$$

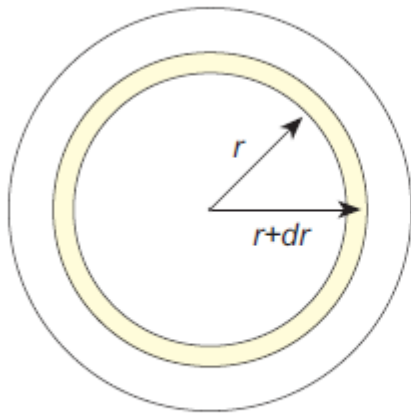
Então o equilíbrio de forças resulta

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{mola}}$$

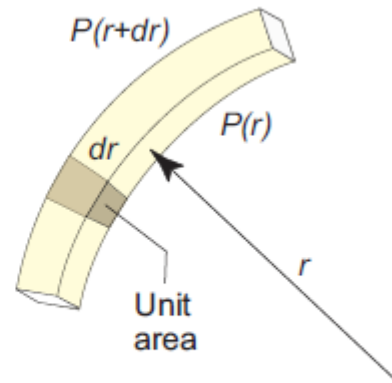


$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

A continuidade da massa na esfera fluida: a massa dentro de um raio r



(a)



(b)

$$dm = m(r + dr) - m(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr.$$

Soma as camadas para ter a massa total, ρ deve ser conhecida

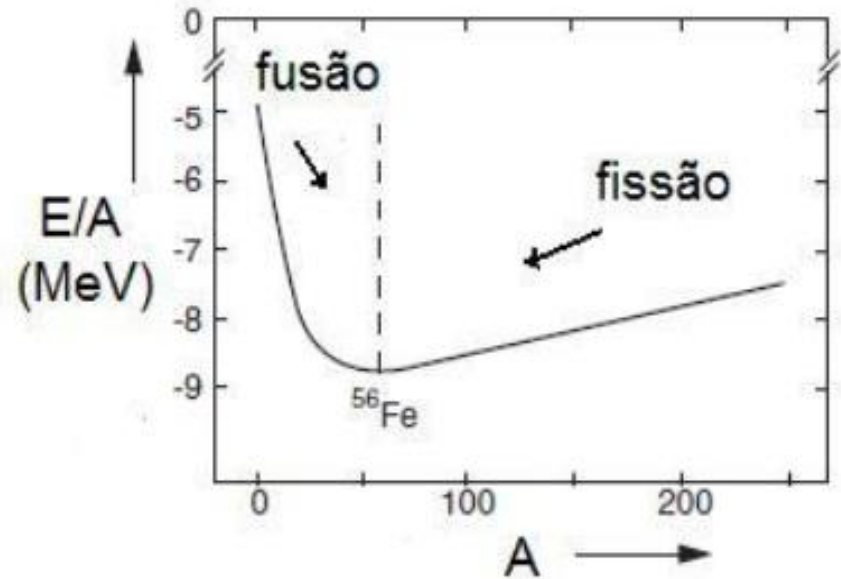
De onde sai essa pressão?

Um primeiro exemplo:
2 partículas clássicas
"grudadas"

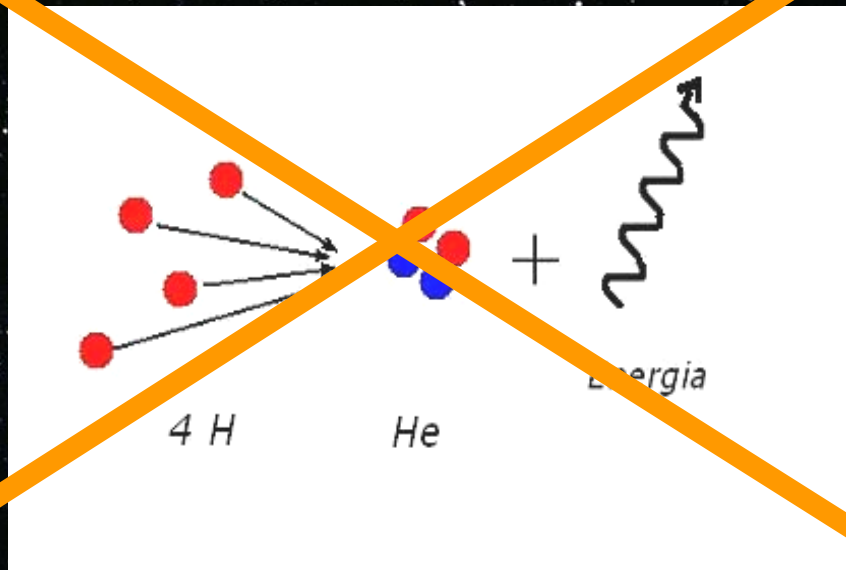
$$M = M_1 + M_2 - \frac{GM_1M_2}{r}$$

A energia de ligação
dos núcleos

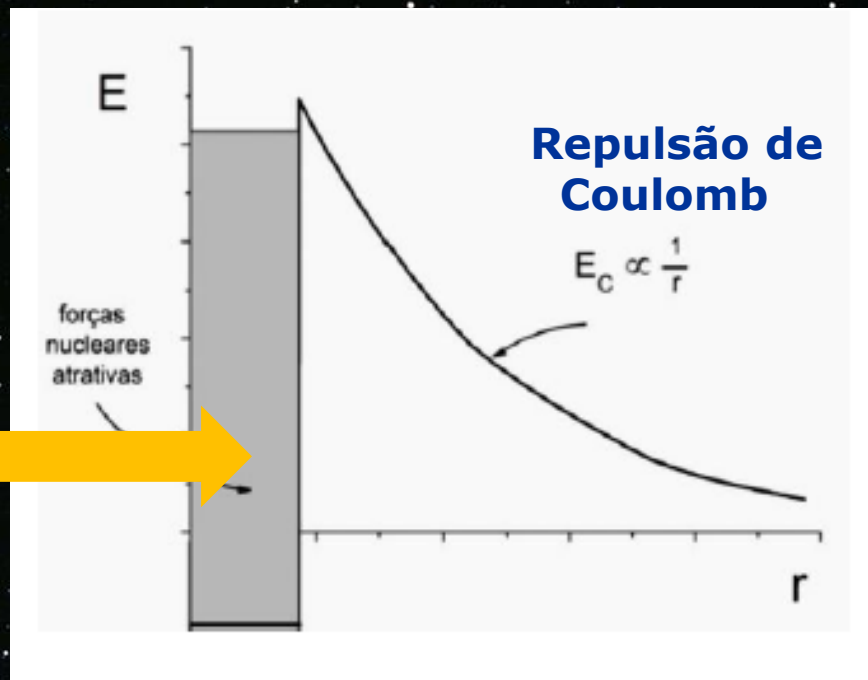
Fusão e fissão



A evolução estelar consiste em longos períodos de **equilíbrio** nos quais alguns núcleos fusionam em outros mais pesados, Separados por contrações/expansões que permitem chegar a uma nova condição de T, ρ para começar outro ciclo estável



Fusão nuclear elementar: dois prótons em colisão



O próton precisa chegar aqui para que as interações fortes ajam

condição $\frac{3}{2}k_B T = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

satisfeita para

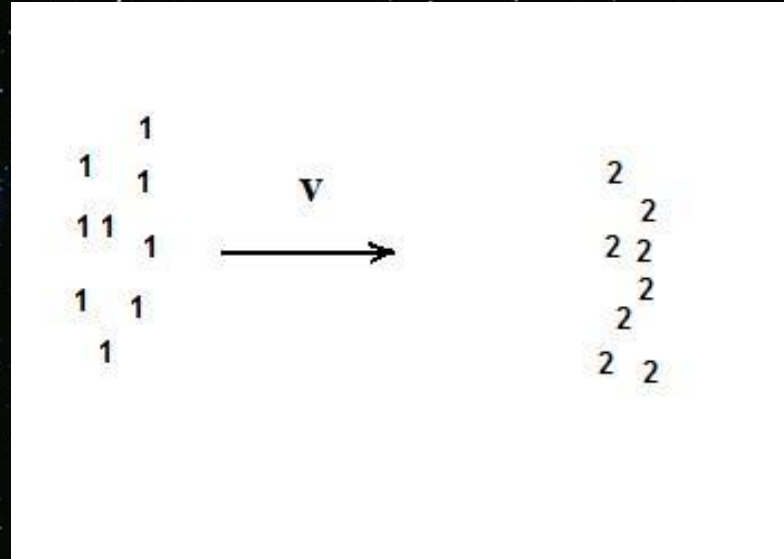
$T \gg T_c \odot$

?

Eddington (1920) → Bethe (1939) : efeito túnel

Fluxo

$$N_1 v$$



$$\sigma(v) = \frac{\frac{\text{No de reações}}{\text{núcleo}} / \text{tempo}}{\frac{\text{No de incidentes}}{\text{área}} / \text{tempo}}$$

Seção de choque

área efetiva

Taxa de reações

$$r = N_1 v N_2 \sigma(v)$$

Quantas partículas há entre v e $v+dv$?

$$\phi(v)d^3v = \left(\frac{\mu_m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu_m v^2}{2k_B T}} 4\pi v^2 dv$$

Maxwell-Boltzmann

Maior energia \longrightarrow mais fácil cair na "poça"

Mas um gás de M-B contém *menos* partículas quanto maior for $E \longrightarrow$ "compromisso"

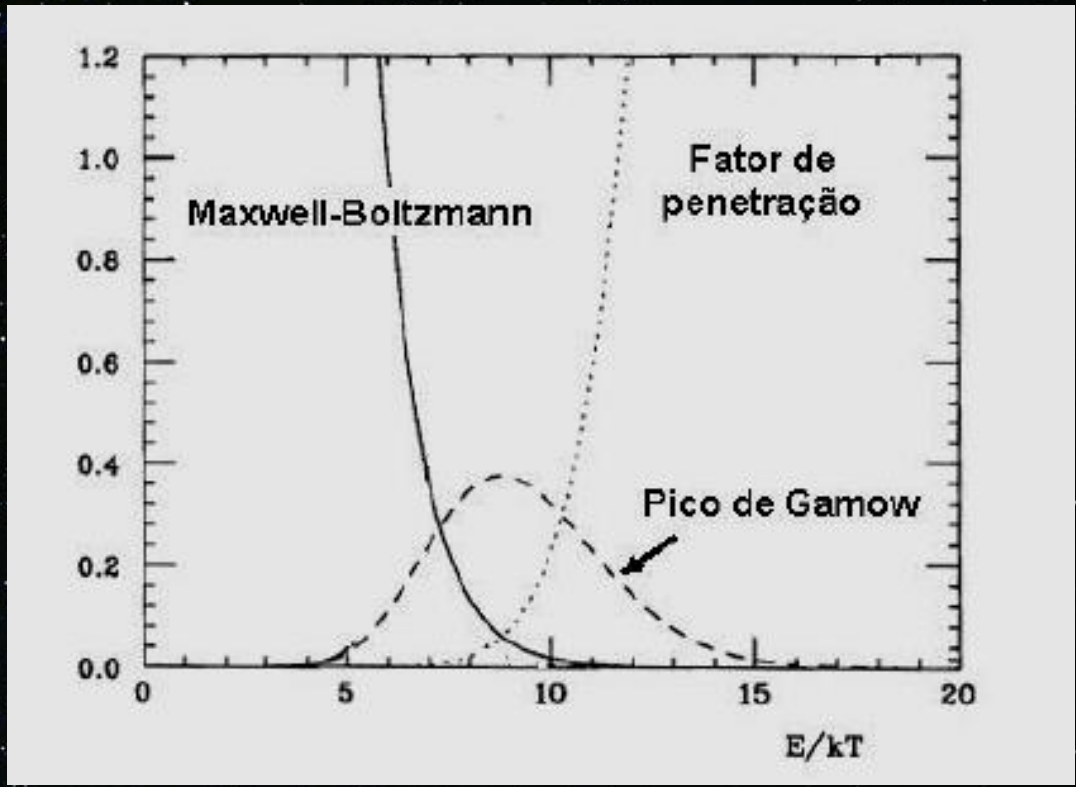
$$P(v) = e^{-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}}$$

Probabilidade de fazer o "túnel" que é impossível na Física Clássica

$$r = \left(\frac{2}{k_B T}\right)^{3/2} \frac{N_1 N_2}{(\mu_m \pi)^{1/2}} \int_0^\infty S(E) \times e^{-\left(\frac{E}{k_B T} + \frac{b}{E^{1/2}}\right)} dE$$

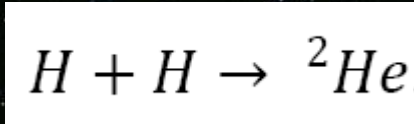
Maxwell-Boltzmann

penetração (túnel)

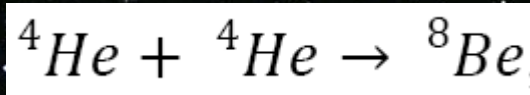
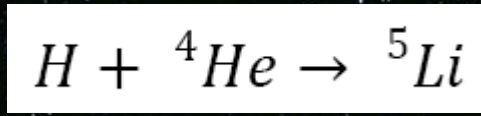


Uma fração MISERÁVEL do total das colisões resulta em fusão...

Para piorar (ou melhorar...) as coisas



? Dois prótons não têm estado ligado (ainda bem!, as estrelas nem existiriam...)

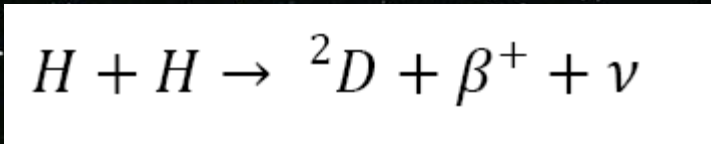


Periodic Table of Elements

1	2																	10																
H	He																	Ne																
3	4																	10																
Li	Be																	Ne																
11	12	13	14	15	16	17	18																	18										
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar																	Ar										
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36																	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr																	Kr
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54																	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe																	Xe
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86																	86
Cs	Ba	*La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn																	Rn
87	88	89	104	105	106	107	108	109	110																	110								
Fr	Ra	+Ac	Rf	Ha	106	107	108	109	110																	110								

único estado ligado de dois partículas

É o deuteron,
um *p* e um *n*



* Lanthanide Series

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

+ Actinide Series

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

Legend - click to find out more...

 Non-Metals	 Transition Metals	 Rare Earth Metals	 Halogens
 Alkali Metals	 Alkali Earth Metals	 Other Metals	 Inert Elements

Dois prótons não fusionam, um deles deve decair
Assim, as interações fracas controlam a vida
das estrelas na Sequência Principal !!!

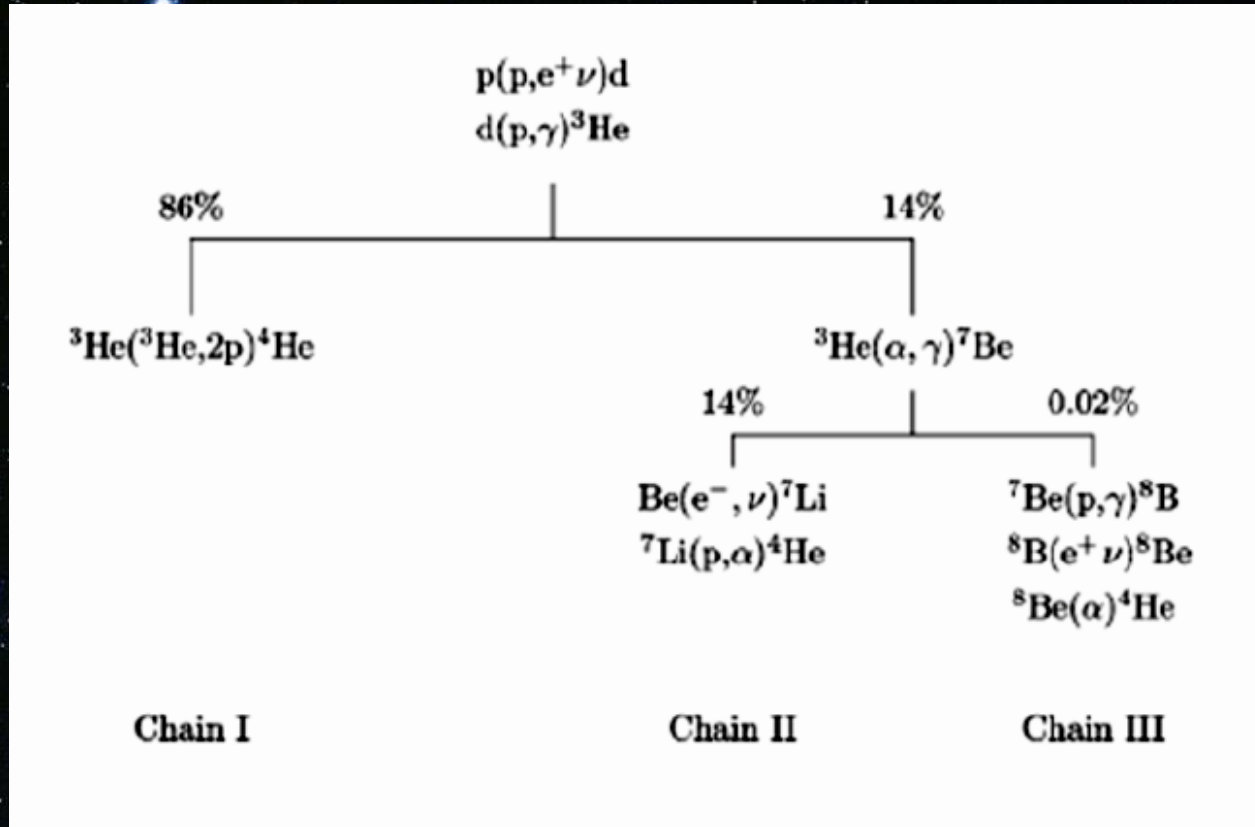
$$\tau_p \approx 7 \times 10^9 \text{ anos}$$

Ou seja, é ridiculamente
baixa a probabilidade de
que em uma colisão, o
próton justamente decaia
antes do par se afastar...

É por isso que **quase nenhuma** colisão resulta em fusão, como
afirmado anteriormente...

E por isso é que as estrelas vivem bilhões de anos e não explodem
em \sim segundos

Os ciclos p-p, veja que em cada caso "somem" 4 prótons

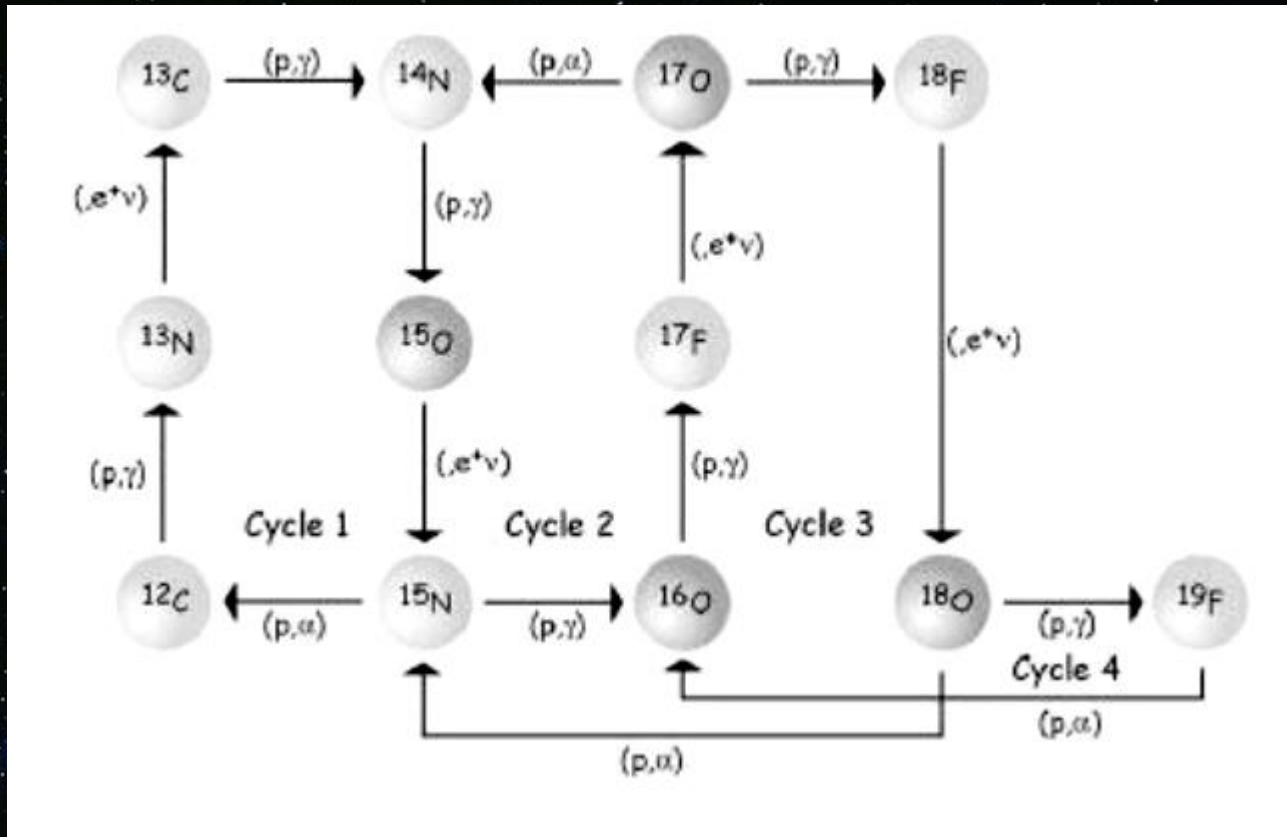


Ainda devemos "pesar" as probabilidades para cada ramo com a energia liberada nele

Existe ainda uma forma diferente de fundionar hidrogênio em hélio...

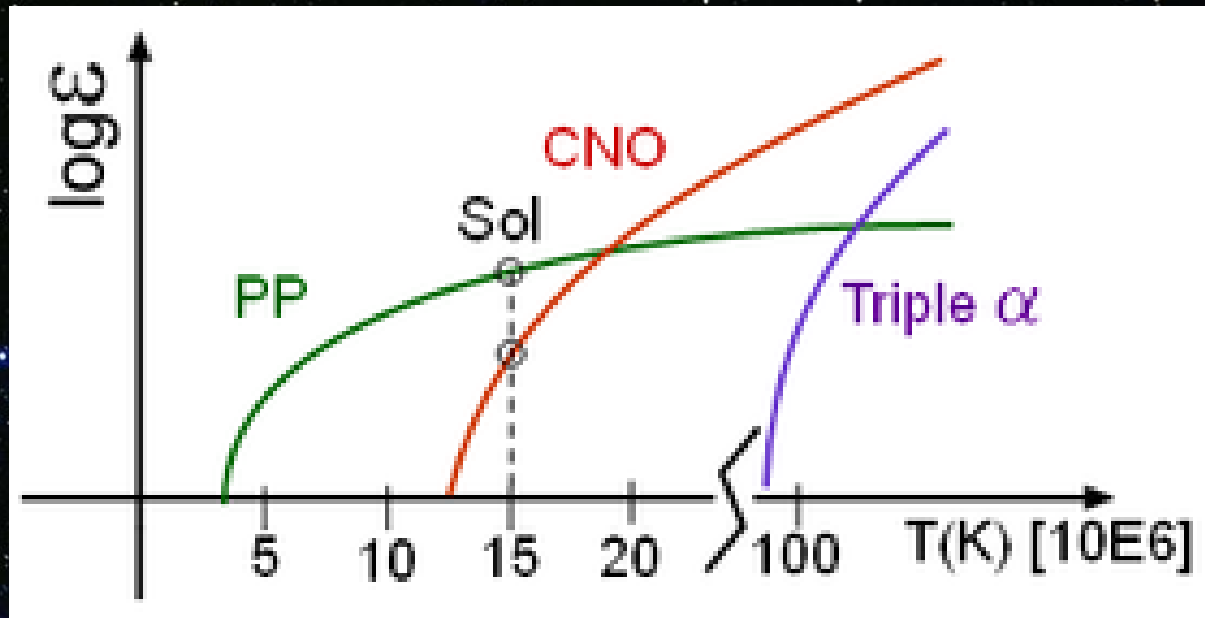
O bi-ciclo CNO (Bethe & von Weizsacker:

Presença de C e populações



A parte do "O" é menos importante energeticamente

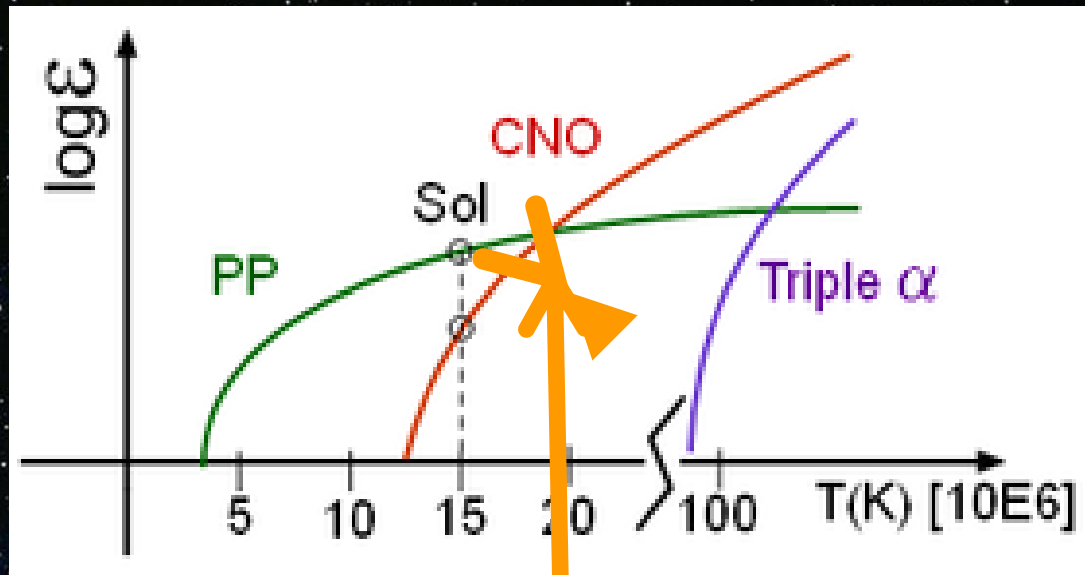
$$\epsilon_{CN} \propto \rho X_H X_{CN} \quad \text{para} \quad X_{CN}/X_H \approx 0.02 \quad (\text{Pop I})$$



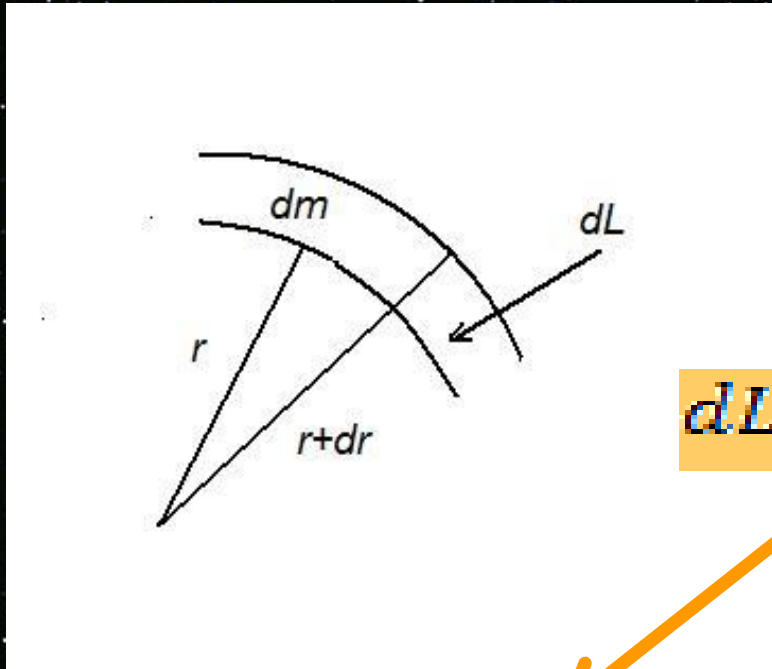
Para estrelas um pouco mais massivas que o Sol, o CNO é mais importante que o p-p...

Precisamos saber a taxa de geração de energia como função de T e ρ

No p-p $\epsilon = T^{1/4}$
No CNO $\epsilon = T^{16}$



$\sim 2M_{\odot}$



$$dL = \epsilon dm$$

Como

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

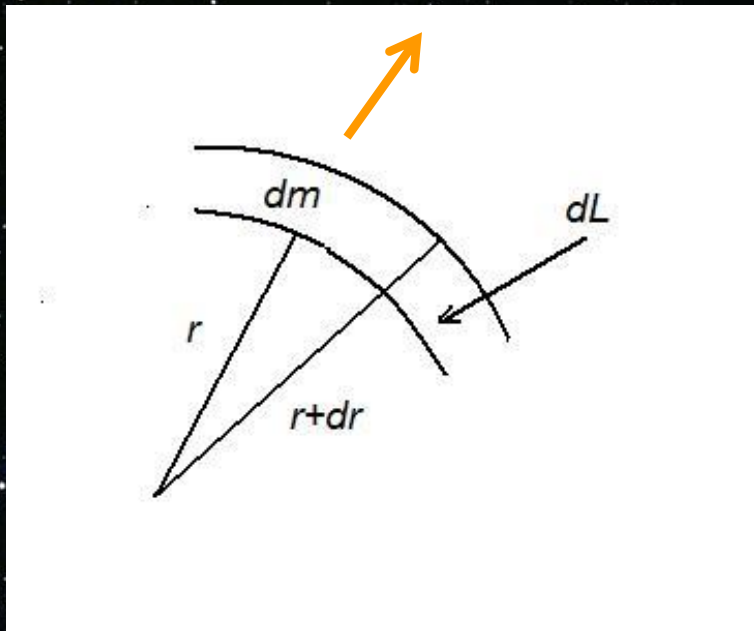
3ra equação da
estrutura estelar

Intervalo !



*Transporte de energia no interior estelar:
falta o dT/dr !!*

*As estrelas **não estão** em equilíbrio termodinâmico*



*Como em qualquer processo difusivo,
o fluxo depende do gradiente de temperatura*

$$\frac{dT}{dr}$$

A diferença de fluxos de radiação nas duas caras da concha é

$$F = \sigma(T + dT)^4 - \sigma T^4 \approx 4\sigma T^3 dT$$

e a diferença de temperatura dada por

$$dT = \bar{\lambda} \frac{dT}{dr}$$

Substituindo

$$F = -4\bar{\lambda}\sigma T^3 \frac{dT}{dr}$$

Livre caminho
médio dos fótons
(difusão)

mas então

assim, e já que $\tau_\lambda(s_0) = \int_0^{s_0} \kappa_\lambda \rho ds$, temos

$$\bar{\lambda} = (\bar{\kappa}\rho)^{-1}$$

$$F_{rad} = -4 \frac{\sigma}{\bar{\kappa} \rho} T^3 \frac{dT}{dr}$$

Fluxo radiativo na aproximação linear (pequenos gradientes...)

Como se relaciona este fluxo com o gradiente de temperatura?

Para isto, podemos avaliar a pressão diferencial

$$dP_{rad} = -\frac{\bar{\kappa}}{c} \rho F_{rad} dr$$

e já vimos que

$$dP_{rad} = \frac{4a}{3} T^3 dT$$

$$(F_{rad} = \sigma T^4) \quad ; \quad \text{com} \quad a = 4\sigma/c$$

Como por outro lado

$$F_{rad} = \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma} \frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

4ta equação da
estrutura estelar

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G M(r)}{r^2}$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3 \bar{\kappa} \rho}{16\sigma T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

P não aparece, só o gradiente, M, T e L sim.

A equação de estado "engata" P com ρ

Precisamos escolher, para cada caso, ϵ e $\bar{\kappa}$

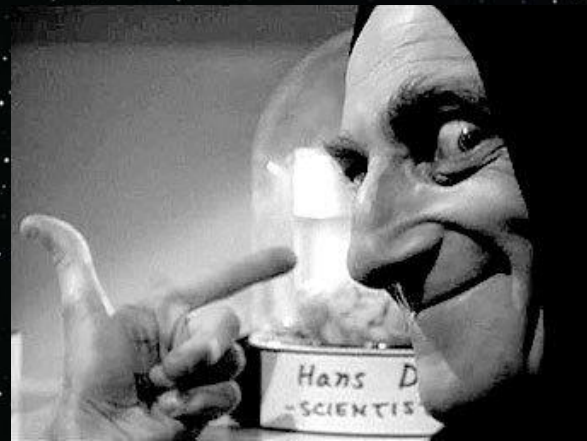
Mais ainda, precisamos definir que tipo de "-" é

Temos restringido todo ao *fluxo radiativo*

Recapitulando: LTE + fluxo radiativo

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3 \bar{\kappa} \rho L_r}{16 \sigma T^3 4 \pi r^2}$$

$\bar{\lambda}$ ~ 1 cm
no interior
estelar



O que é esse $\bar{\kappa}$?

Se formos fazer a integração para cada frequência, teríamos de resolver infinitos sistemas de equações !!!!!!!!!!!

Para contornar este problema, utiliza-se a **média de Rosseland**

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

derivada respeito de T da função de Planck $\frac{\partial B_\nu}{\partial T}$

Privilegia as frequências *elevadas* $\sim 4kT$

Programa executável: avaliar os processos que absorvem (ou espalham) fótons, calcular cada K_{ν} e fazer a média de Rosseland \bar{K}

como se fosse simples...



A realidade: é complicadíssimo !!!

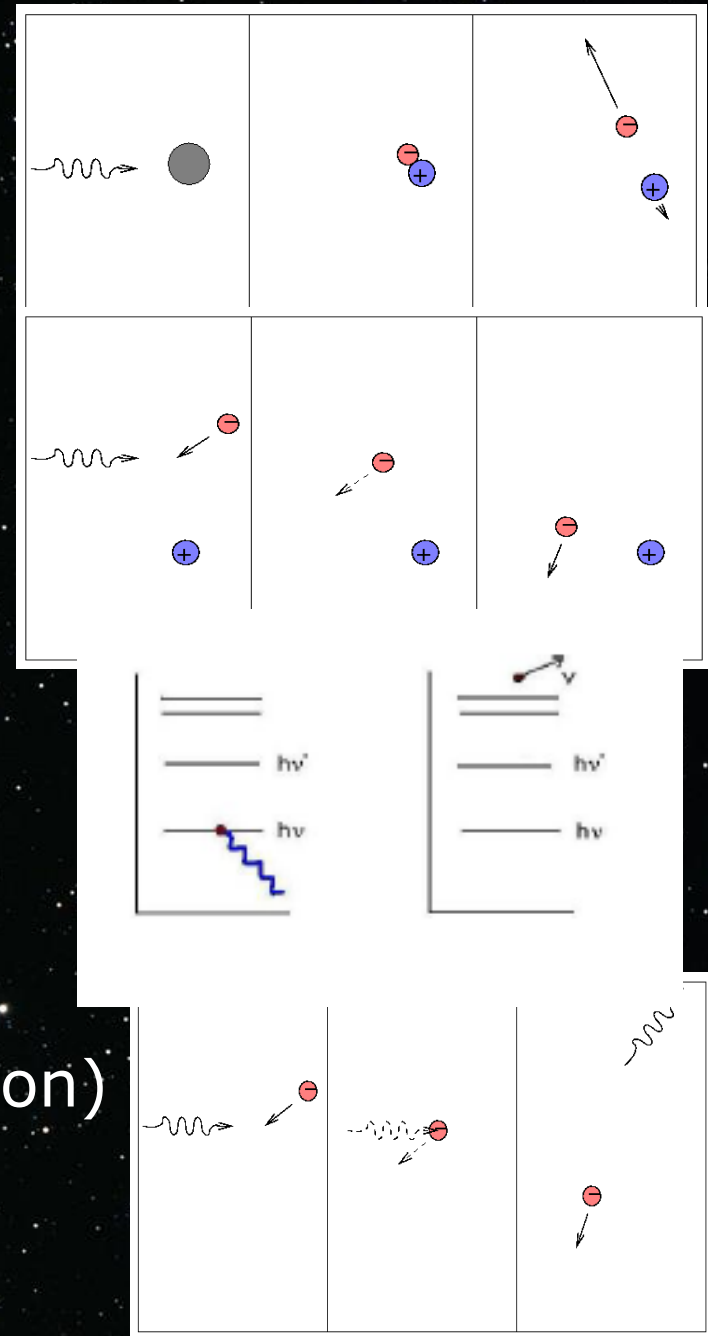
Os processos elementares já foram apresentados

a) Ligado-livre (fotoionização)

b) livre-livre (bremsstrahlung)

c) ligado-ligado (fotoabsorção)

d) Espalhamento eletrônico (Compton)



$$\text{se } \kappa_{\nu} \propto \nu^{-n}$$



$$\bar{\kappa} \propto T^{-n}$$

$n=3$, mas com o $T^{-\frac{1}{2}}$

$$\bar{\kappa} \propto T^{-3.5}$$

Opacidade de Kramers

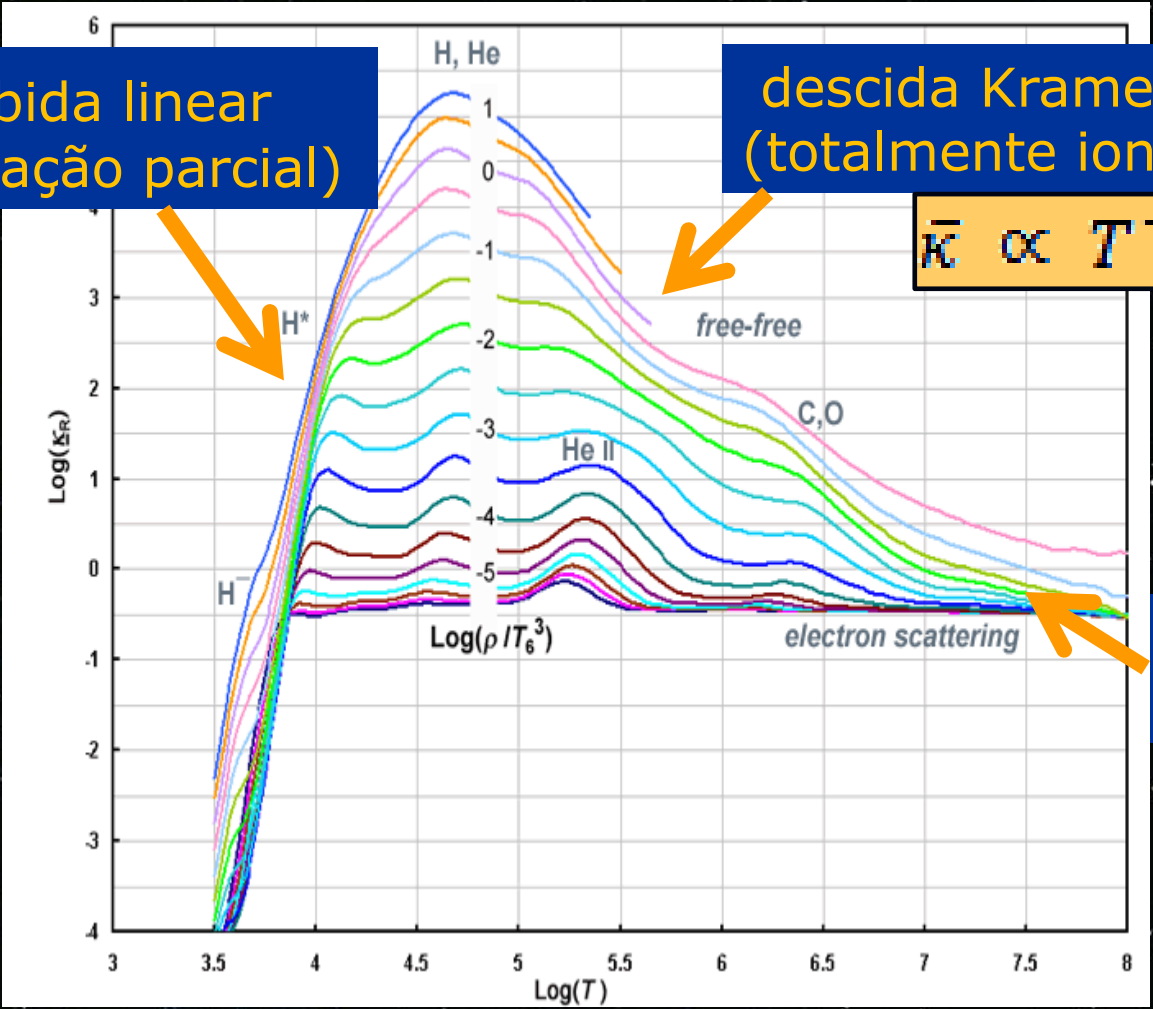
Numericamente, por exemplo para ligado-livre

$$\bar{\kappa}_{\text{bf}} \sim 10^{25} Z(1 + X) \rho T^{-7/2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Subida linear
(ionização parcial)

descida Kramers
(totalmente ionizado)

$$\bar{\kappa} \propto T^{-3.5}$$

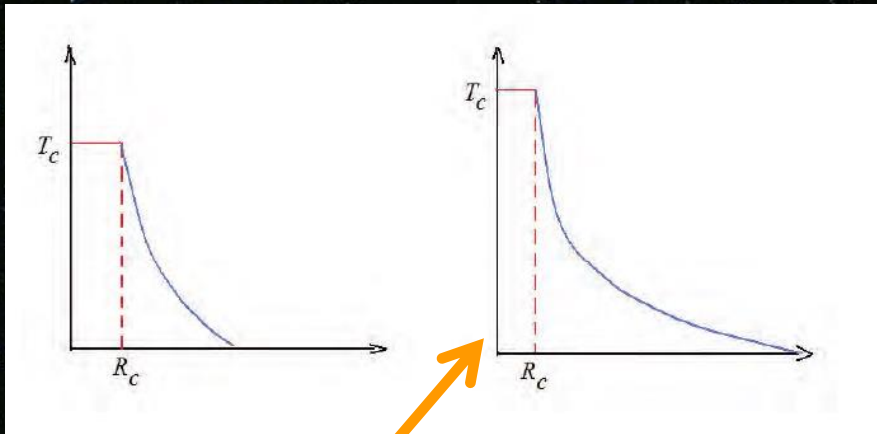


Assintoticamente
Thompson

κ_V representa a “resistência” da matéria à passagem dos fótons
Podemos pensar que é como uma “torneira” que facilita ou
dificulta o fluxo

Agora, até quando dá para aumentar o gradiente e ter um fluxo radiativo?

O gradiente **não pode** aumentar sem limite !!!!

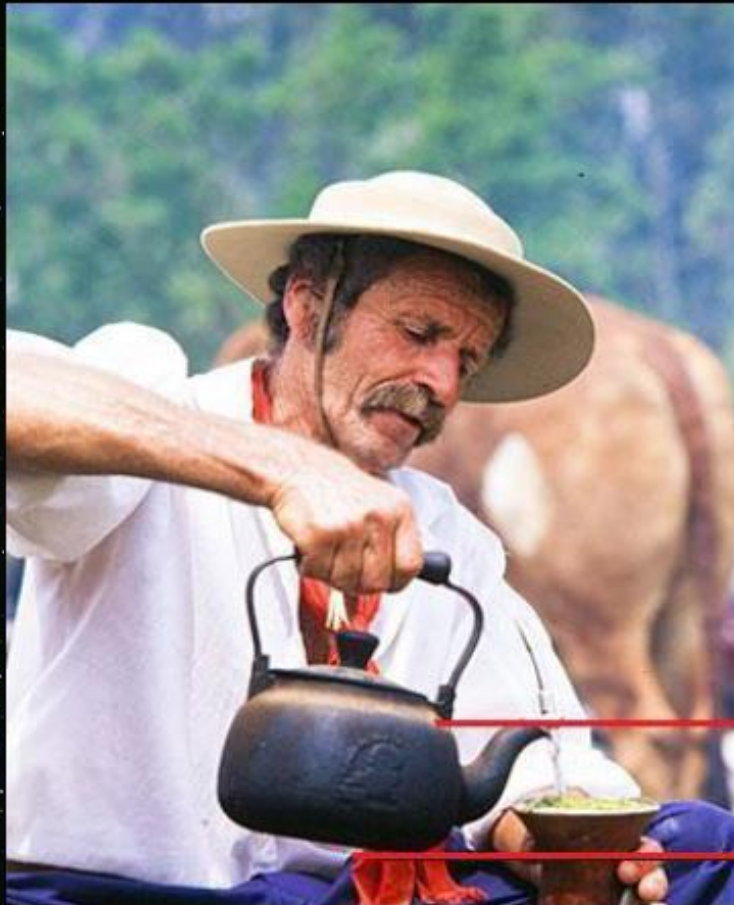


Por exemplo, se o caroço esquenta, o gradiente aumenta

$$\frac{T}{P} \frac{dP}{dT} < \frac{\gamma}{\gamma-1} \rightarrow \frac{d \ln P}{d \ln T} < \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Critério de instabilidade convectiva: se o $\frac{dT}{dr}$ ficar maior que $\frac{\gamma}{\gamma-1}$, a convecção toma conta

A questão do gradiente limiar: convecção vs. radiação



$$\frac{dT}{dr} > \frac{dT}{dr} \Big|_{ad}$$



$$\frac{dT}{dr}$$



$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad (7.24a)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (7.24b)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left(\epsilon - T \frac{dS}{dt} \right) \quad (7.24c)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3 \bar{\kappa} \rho}{4ac T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (\text{radiativo})(7.24d)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (\text{ou coisa melhor, convectivo})(7.24e)$$

Condições de contorno

$\bar{\kappa}, \epsilon$, dados e X_i fixa

$$M(r=0) = 0$$

$$L(r=0) = 0$$

$$P(r=R) = 0$$

$$T(r=R) = 0 \quad (7.25)$$

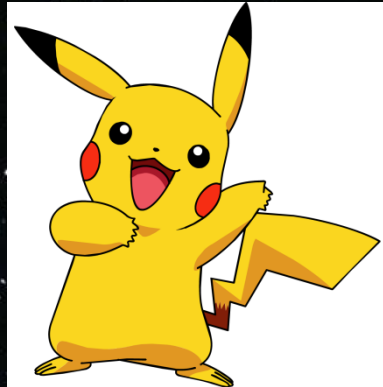
Soluções

$P(r)$, $M(r)$, $T(r)$ e $L(r)$ (ou $\rho(r)$ no lugar de $P(r)$)

Teorema de Russell-Vogt :

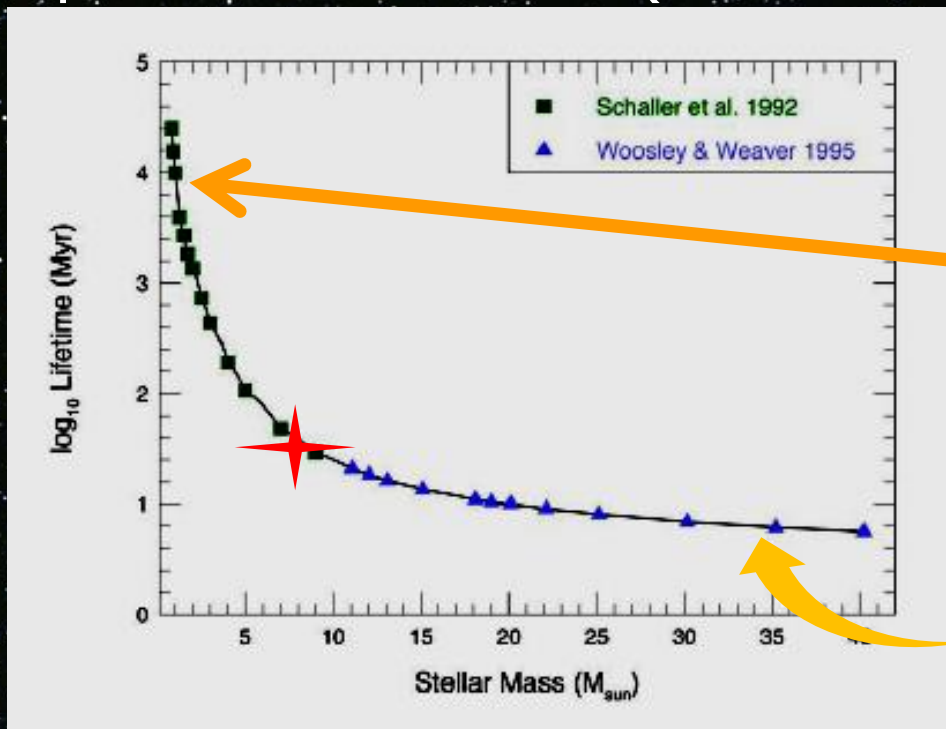
para uma dada composição, a localização de um modelo

estelar no diagrama HR é única



Yatta !!!!

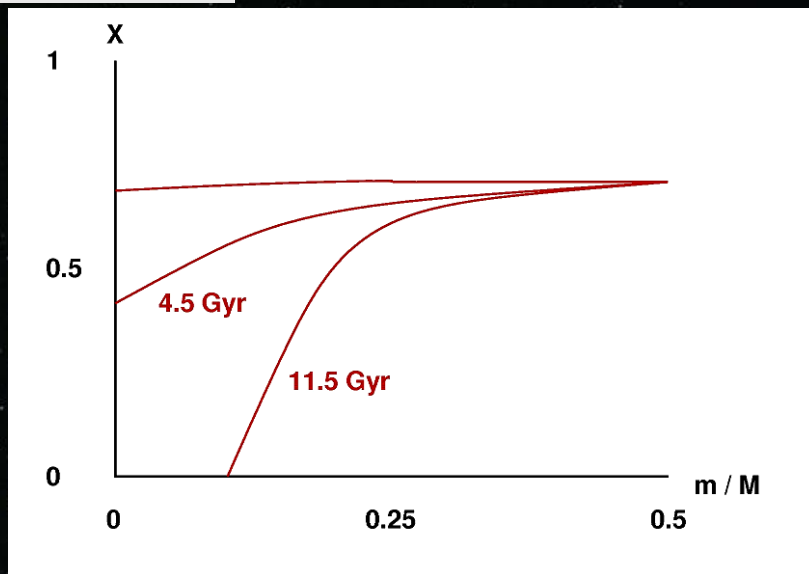
Tempo de vida na MS (cálculos detalhados)



$$\tau_{inf} \approx M^{-3.5}$$
$$\tau_{sup} \approx M^{-1}$$

Distribuição espacial do hidrogênio com o tempo (Sol)

Mas os modelos usam composição **homogênea** (média espacial)



Uhhhh, vou ter
que estudar mesmo...

