

AGA 315 – Aula 19

Ondas gravitacionais

Ondas, ondas...

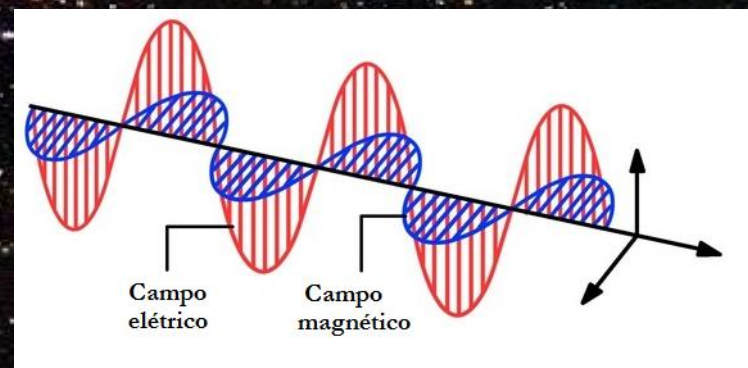
J.E. Horvath,
IAG – USP
São Paulo, Brasil



O quê é a radiação gravitacional?



Ondas de superfície



$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Ondas eletromagnéticas



Eletromagnetismo: cargas aceleradas produzem radiação

Gravitação (“carga”=massa): massas aceleradas produzem radiação

Definindo uma perturbação (de dois índices) $h_{\mu\nu}$ encima do fundo fixo espaço-temporal, e substituindo nas equações de Einstein, chega-se logo a que esta satisfaz a equação da onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) h^{\mu\nu} = \square h^{\mu\nu} = 0$$

O campo que se propaga é mais complexo que E ou B (vetores), mas o fenômeno é análogo, as perturbações são uma onda transversal à direção de propagação

As soluções podem ser escritas como

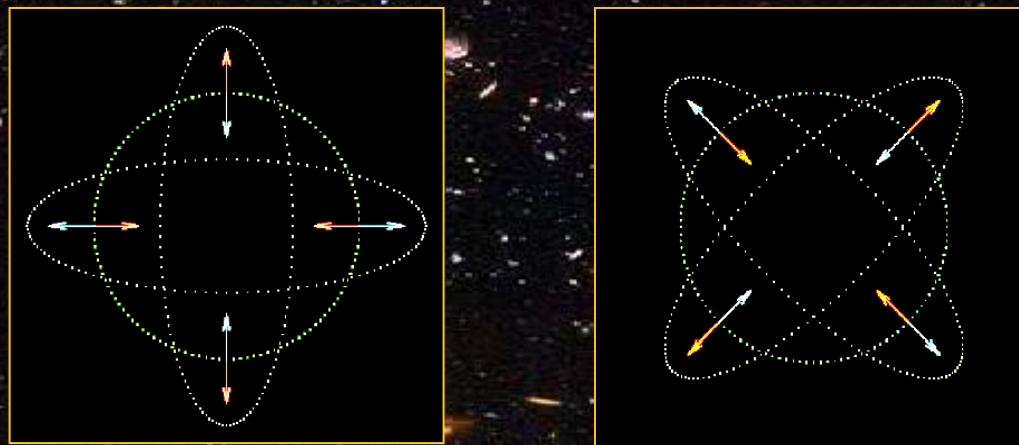
$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_a x^a}$$

Amplitude

Vetor da onda

E a amplitude expressada em termos de dois modos independentes ortogonais: $+$ e x

$$A^{\mu\nu} = h_+ e_+^{\mu\nu} + h_x e_x^{\mu\nu}$$



Estes dois modos de polarização são suficientes para escrever qualquer amplitude e mostram a superposição de oscilações que sofrem um conjunto de massas test pela passagem da onda

Uma onda e.m. não tem modo monopolar, o dipolo é o mais baixo. Como sempre da para passar ao sistema de cenro de massa, uma onda gravitacional não pode ser emitida no modo dipolar (conservação do impulso) e o mais baixo é o quadrupolo

Além de terem a velocidade da luz, as duas decrescem como $1/r$ (conservação do fluxo) e sofrem Doppler, deslocamento ao vermelho etc.

Em 1918 Einstein obtém a chamada fórmula do quadrupolo que relaciona a amplitude com a derivada temporal segunda do momento quadrupolar

$$h_{\mu\nu} \propto \ddot{Q}$$

Assim, a luminosidade resulta proporcional à terceira derivada temporal

$$L \propto \dddot{Q}$$

Utilizando uma escala de tempo τ como medida de quanto leva uma massa para ir de um lado a outro do sistema que emite, e lembrando que o momento quadrupolar é aproximadamente o produto da massa M vezes o quadrado da dimensão do sistema R^2

$$\dddot{Q} \approx \frac{MR^2}{\tau^3} \approx \frac{Mv^2}{\tau} \approx \frac{E_{NE}}{\tau}$$

Onde E_{NE} é a energia cinética associada ao movimento não esférico NE
 Para um sistema auto-gravitante temos ainda que

$$\tau \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

e com ele uma estimativa da frequência característica $\nu = \frac{2\pi}{\tau}$ na qual as ondas são emitidas.

Utilizando todas estas expressões e colocando as constantes temos que

$$L_{GW} \sim \frac{G^4}{c^5} \left(\frac{M}{R}\right)^5 \sim \frac{G}{c^5} \left(\frac{M}{R}\right)^2 v^6 \sim \frac{c^5}{G} \left(\frac{R_{Sch}}{R}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6$$

é evidente que as maiores chances de detecção pertencem a fontes muito compactas $R \sim R_{Sch}$ que se movimentam de forma relativística $v \sim c$

Com o mesmo grau de aproximação, podemos estimar o valor da amplitude

$$h \sim \frac{G}{c^4} \frac{E_{\text{ns}}}{r} \sim \frac{G}{c^4} \frac{\epsilon E_{\text{kin}}}{r}$$

onde ϵ é a fração da energia cinética que é emitida em ondas.
Numericamente

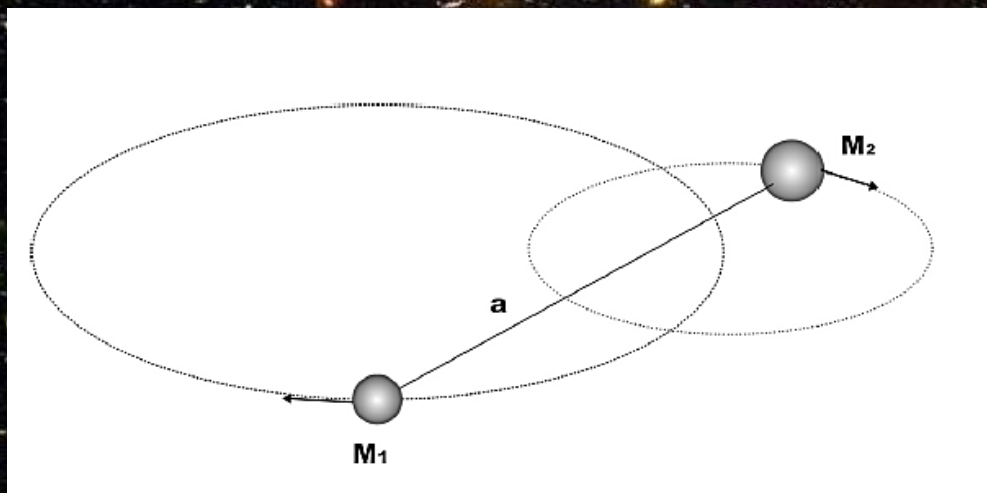
$$h \approx 10^{-22} \left(\frac{E_{\text{GW}}}{10^{-4} M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f_{\text{GW}}} \right) \left(\frac{\tau}{1 \text{ ms}} \right)^{-1/2} \left(\frac{15 \text{ Mpc}}{r} \right)$$

A distância de 15 Mpc não é arbitrária: corresponde ao valor do aglomerado de Virgo onde umas 10 000 galáxias contêm fontes potencialmente observáveis. Às escalas escolhidas são as esperadas para uma SN esférica, compreende-se a importância de chegar a níveis de sensibilidade instrumental $\sim 10^{-22}$

Fontes de ondas gravitacionais

Nas expressões anteriores, existe uma suposição implícita a respeito do carácter da emissão, um “surto” (curta duração) com frequência característica ν

Porém, a possibilidade de ter fontes com emissão contínua (e frequência que varia com o tempo, lentamente) é bem concreta, já que todas as binárias compactas pertencem a esta classe



Consideremos uma binária genérica com

$$a = a_1 + a_2$$

$$\mu = M_1 M_2 / M$$

(massa reduzida)

As únicas componentes não nulas do quadrupolo da binária, cuja órbita está no plano xy são

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin(2\Omega t)$$

Esta é a frequência da onda,
2x a frequência orbital

Usando a Terceira Lei de Kepler $\Omega^2 = GM/a^3$ podemos escrever a luminosidade como

$$L_{\text{GW}} = -\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} (\mu \Omega a^2)^2 \langle 2 \sin^2(2\Omega t) + 2 \cos^2(2\Omega t) \rangle = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a^4 \Omega^6 = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^3 \mu^2}{a^5}$$

A energia total da binária é

$$E = \frac{1}{2} \Omega^2 (M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2) - \frac{GM_1 M_2}{a} = -\frac{1}{2} \frac{G \mu M}{a}$$

E no decorrer do tempo, a emissão de ondas gravitacionais faz a órbita encolher a uma taxa

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G \mu M}{2a^2} \frac{da}{dt} \rightarrow \frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{\mu M}{a^3}$$

Como a frequência orbital aumenta segundo $(3/2)\dot{a}/a$, o sistema coalesce em um tempo

$$\tau_c = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a_0^4}{\mu M^4}$$

onde a_0 é a separação inicial. Usando as mesmas expressões anteriores temos que a amplitude adimensional é

$$h \approx 5 \times 10^{-22} \left(\frac{M}{2.8 M_\odot} \right)^{2/3} \left(\frac{\mu}{0.7 M_\odot} \right) \left(\frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^{2/3} \left(\frac{15 \text{ Mpc}}{r} \right)$$

Vamos ver agora uma aplicação direta destas idéias que levou ao Prêmio Nobel de Física de 1993...

O pulsar binário 1913+16



Russell A. Hulse



Joseph H. Taylor Jr.



$$f = \frac{(m_2 \sin i)^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\pi^2 x^3}{T_\odot P_b^2}$$

Função de massas

com

$$T_\odot = GM_\odot/c^3 = 4.925490947 \mu\text{s}$$

(x) semieixo projetado
e (P_b) o período orbital
de 7 h 45 min

Com todo o que tínhamos, a predição é

$$\nu_{\text{GW}} = 7 \times 10^{-5} \text{ Hz}$$

e a amplitude

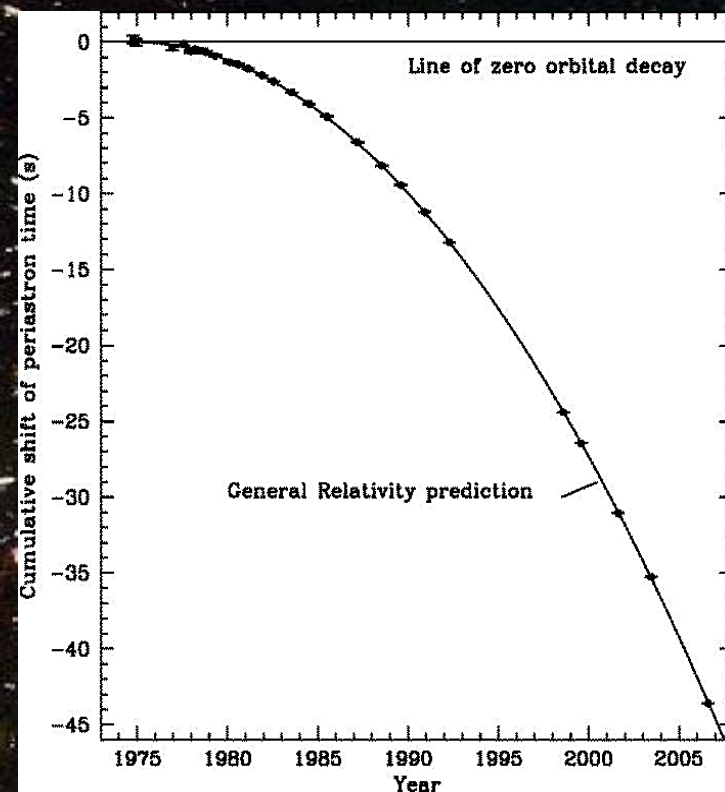
$$h \sim 10^{-23}$$

ou seja, nem pensar em uma detecção direta, mas a taxa da órbita...

$$\dot{\nu} = -2.4 \times 10^{-12} \text{ sec/sec}$$

A enorme estabilidade da emissão do pulsar permitiu uma determinação com erros muito pequenos que está de acordo com a RG em $< 0.1\%$

Com o monitoramento de pulsares onde as duas NS emitem, haverá ainda uma melhora substancial na precisão, e com ela testes precisos das teorias alternativas à RG



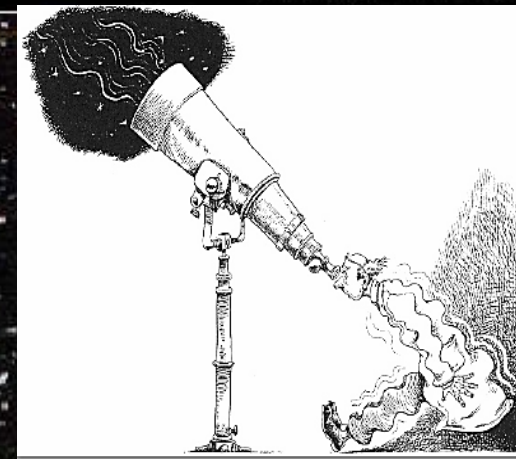
Science
20 February 2004
Vol. 303 No. 5661
Pages 1089-1240 510

Os detectores de GW

Explorando o que conhecemos das GW, existem basicamente duas formas de detecção direta:

- Conseguir uma deposição de energia da GW em um objeto ressonante e medir os modos de vibração excitados
- Monitorar massas cujo movimento é perturbado pela passagem da onda, sem absorver nenhuma energia dela

Por mais de 50 anos ninguém tentou sequer desenhar um detector, de fato até Einstein duvidava da existência e da detectabilidade das GW



Para visualizar como é um detector do tipo massa ressonante, consideremos um oscilador feito por duas massas unidas por uma mola



GW

Suponhamos que uma onda com polarização “+” e frequência ω passa perpendicular ao eixo (...). Se o oscilador tem uma frequência natural ω_0 e um atrito χ com a onda, a equação de movimento é

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\chi + \omega_0^2 \xi = -\frac{1}{2}\omega^2 L h_+ e^{i\omega t}$$

com solução

$$\xi = \frac{\omega^2 L h_+}{2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\chi)} e^{i\omega t}$$

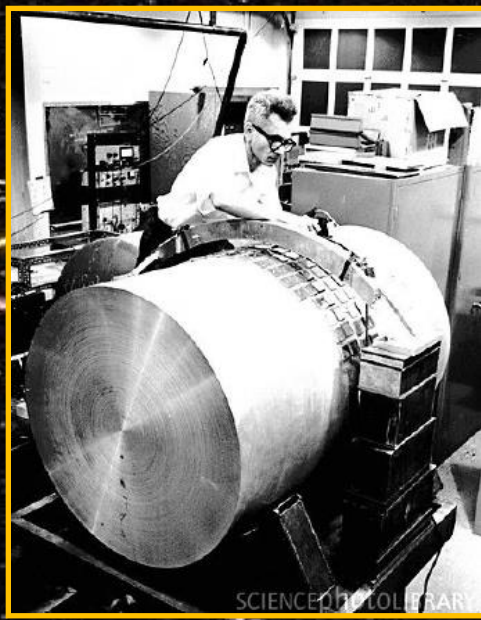
ou seja, um movimento do tipo ressonância com $\omega \approx \omega_0$ (daí o nome “massa ressonante”) e amplitude máxima

$$\xi_{\max} = \frac{1}{2} \omega_c \chi L h_+$$

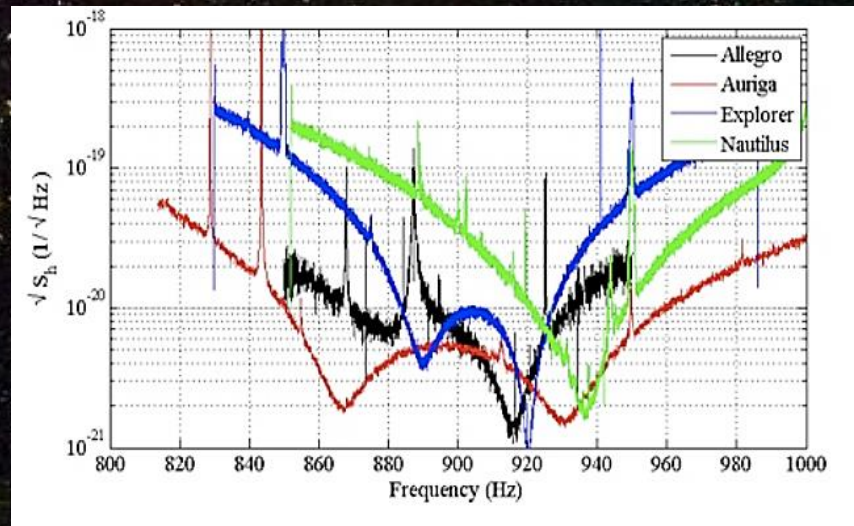
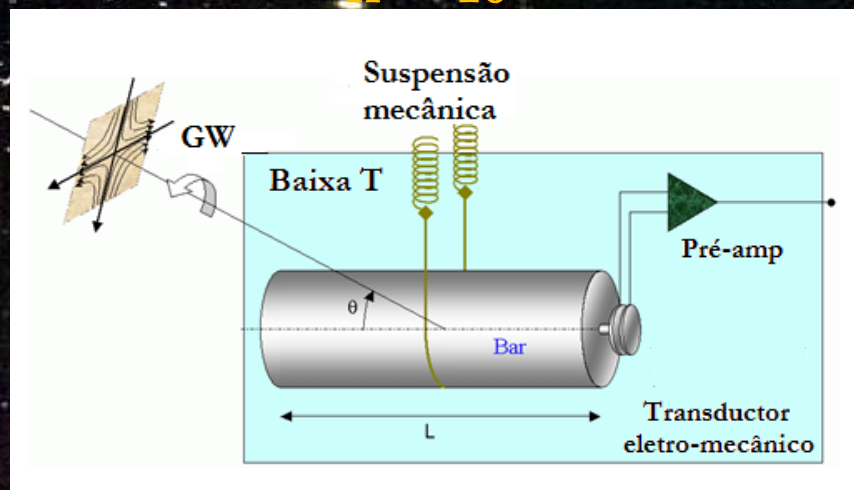
Se formos construir um detector real, convêm maximizar o produto $\omega_0 \chi L$. Ou seja, o “Q” ressonante deve ser alto, e as dimensões L grandes (mais massa, maior energia absorvida)

O quê aconteceu com os detectores “reais”?

Joe Weber (circa 1967):
barras de Al a T ambiente
 $h \sim 10^{-15}$

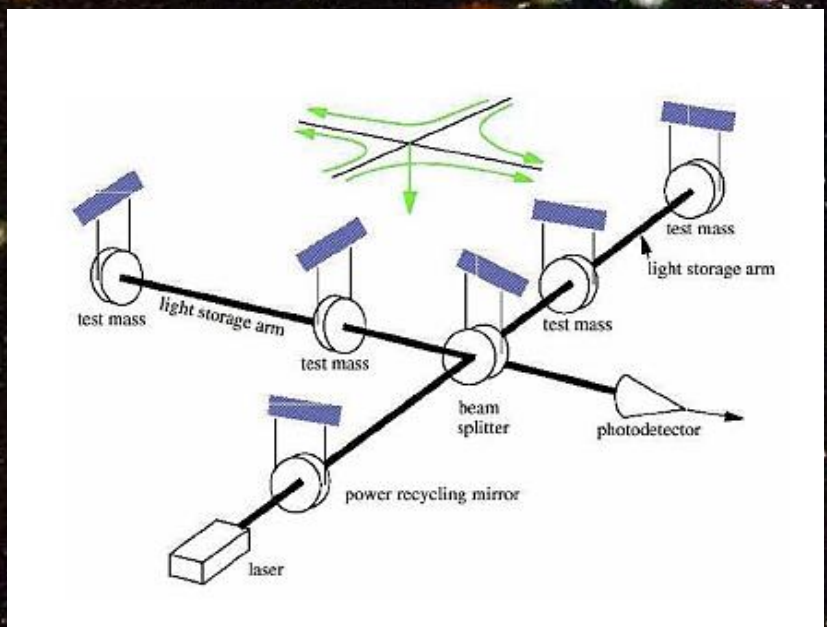


Auriga et al (1990s):
barras de Al a T ~mK
 $h \sim 10^{-19}$



Detectores de banda estreita.
(embora os transdutores
“abrem” bastante...). O plano
para fazer um xilofone de esferas
não vingou.

Os interferômetros: braços longos e reciclagem da luz



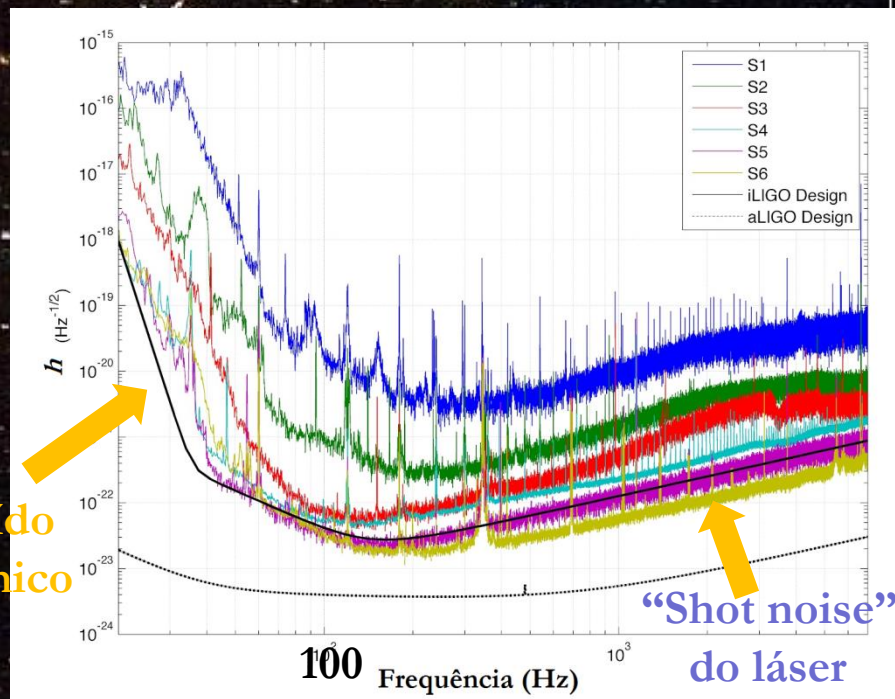
Como os iterferômetros monitoram massas em queda livre (espelhos pendurados), são sensíveis a toda a forma da onda

A amplitude da oscilação dos espelhos é muito pequena, com $l=4$ km

$$\Delta l = hl = 4 \times 10^{-17} \text{ cm} !!$$

ou seja, 0.0001 do diâmetro de um próton !!!

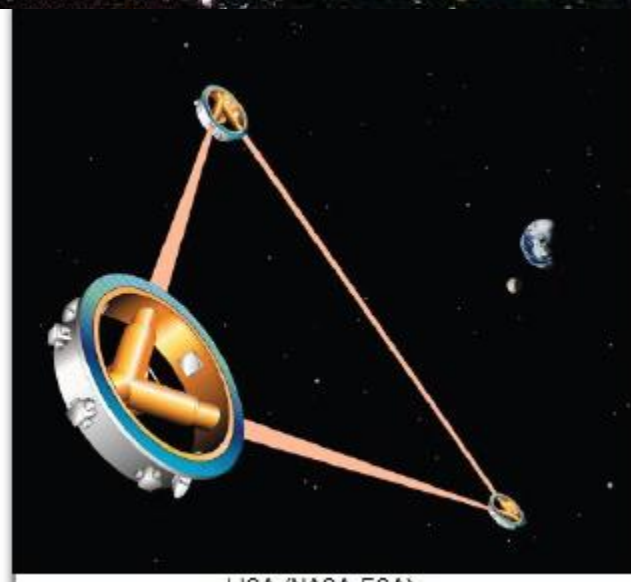
➔ franjas de interferência



Ruído sísmico

Shot noise do laser

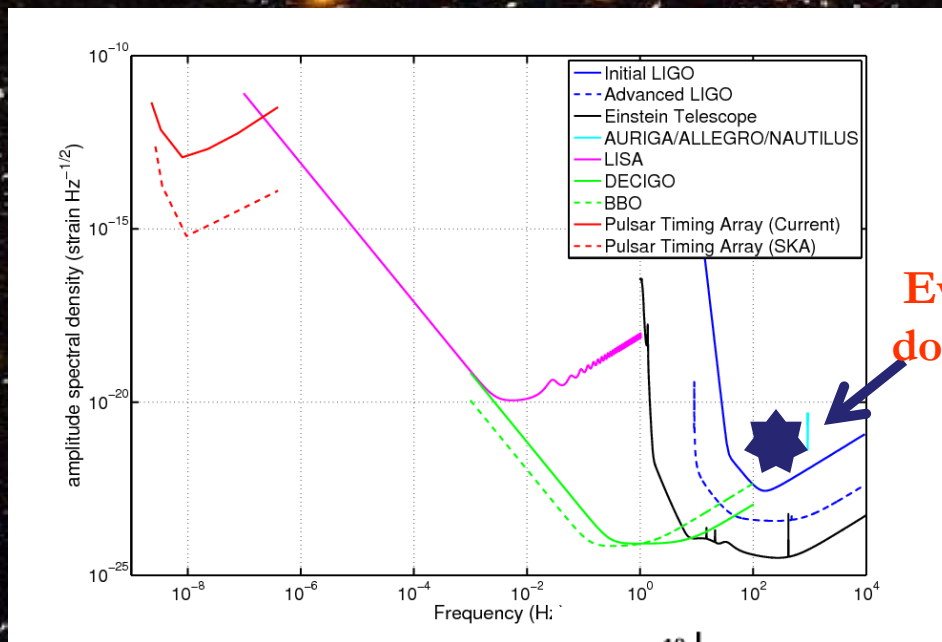
Se quisermos enxergar frequências mais baixas (por exemplo, as fases anteriores à fusão das binárias compactas), precisaremos ir para o espaço : zero perturbações e baseline \gg LIGO/VIRGO



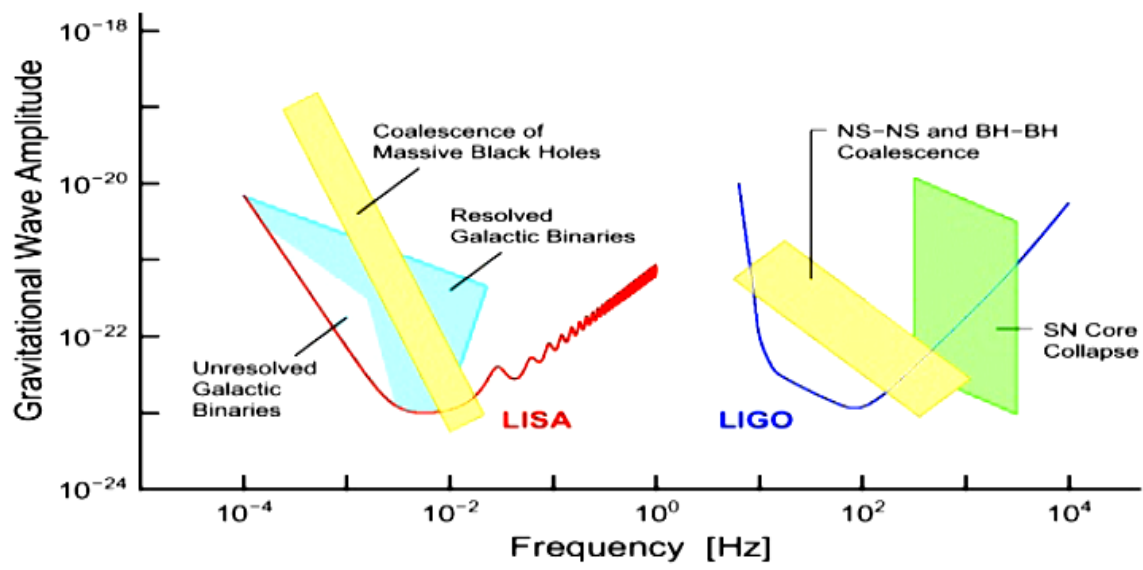
LISA (NASA-ESA)

eLISA no espaço

Curvas que mostram como é a cobertura em frequência



Eventos do LIGO



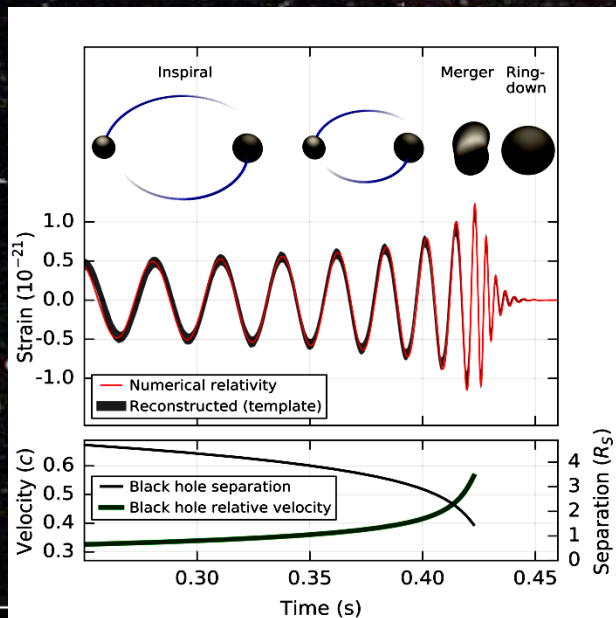
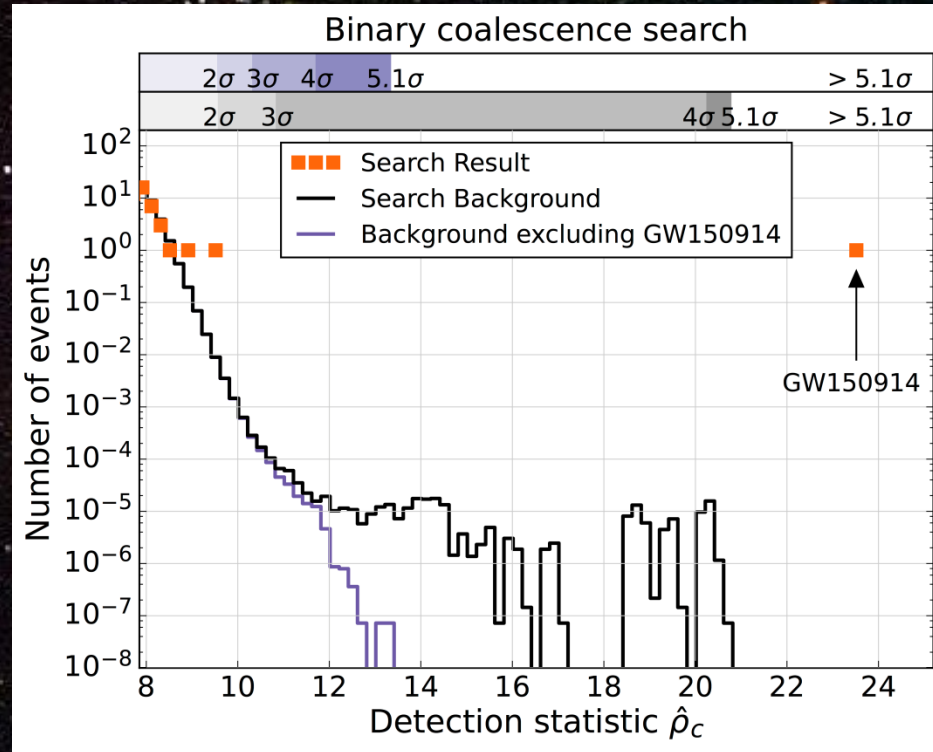
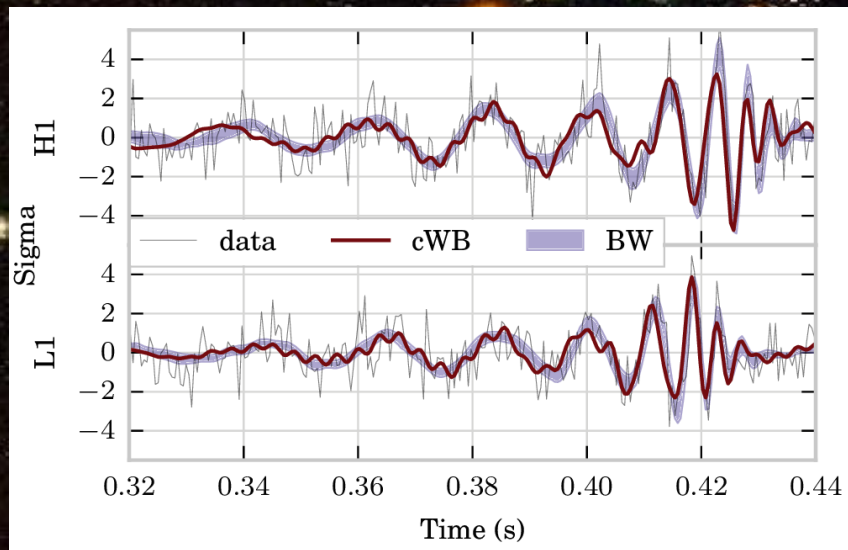
O estado atual: LIGO (Livingston e Hanford)



VIRGO (3km, Cascina, Itália)



Overture: a primeira detecção direta das GW GW 150914

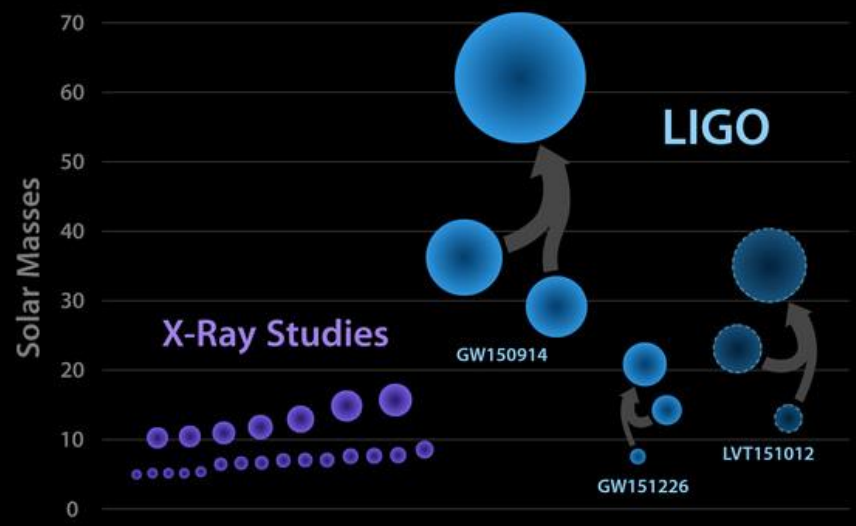


Para frequências baixas, a forma de onda segue a chamada *chirp mass* determinada a partir de \mathcal{M} e \dot{f} .
 Como dos dados $\mathcal{M} \approx 30M_{\odot}$, a soma das massas é $M = m_1 + m_2 \gtrsim 70M_{\odot}$. A tabela completa da reconstrução do evento é

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left[\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right]^{3/5}$$

Primary black hole mass	$36^{+5}_{-4} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29^{+4}_{-4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62^{+4}_{-4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67^{+0.05}_{-0.07}$
Luminosity distance	410^{+160}_{-180} Mpc
Source redshift z	$0.09^{+0.03}_{-0.04}$

Black Holes of Known Mass



Na próxima aula...



Os surtos gamma