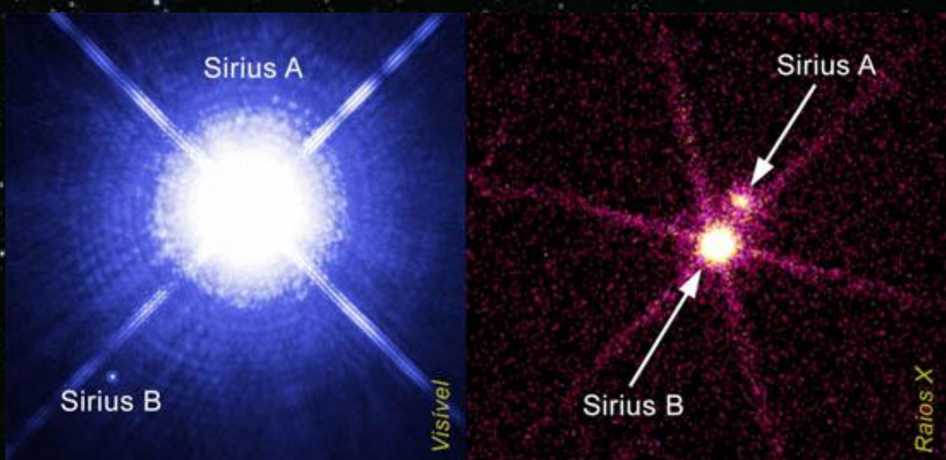
AGA 315 – Aula 10

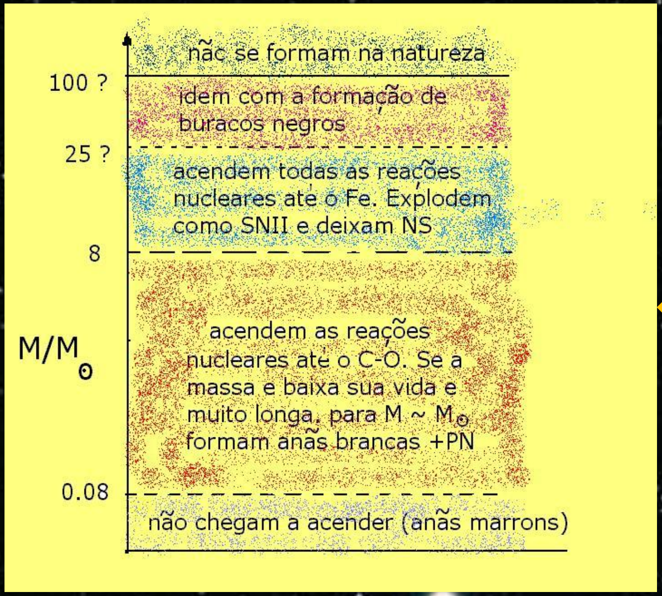
Anãs Brancas

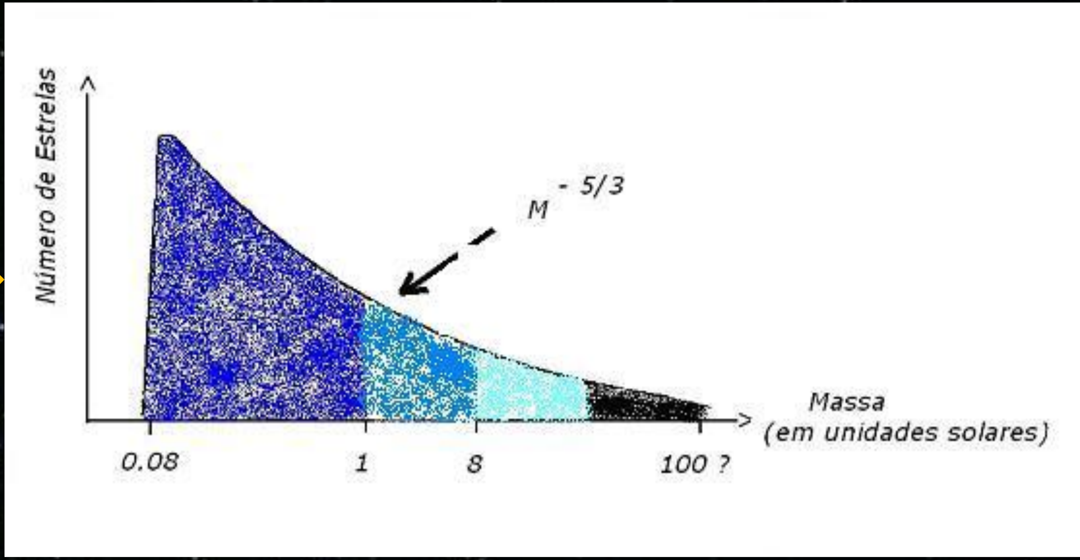
J.E. Horvath
IAG-USP



Por que nos preocuparmos com as anãs brancas?

> 95% das estrelas que existem terminarão suas vidas assim...





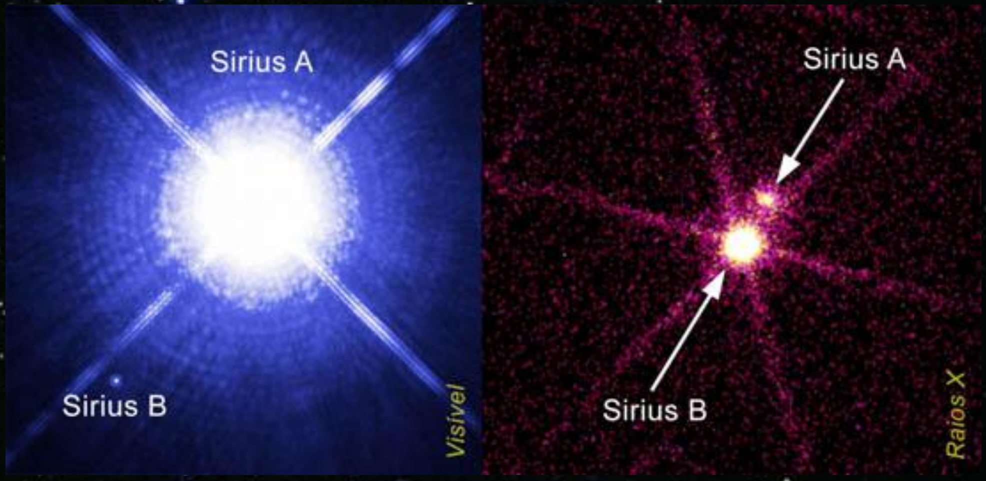
Função de massas inicial (Salpeter)

1844 F. Bessel determina as órbitas de Sirius e Procyon e sugere que existem "estrelas escuras" que provocam as mudanças periódicas

1910 Russell, Pickering & Fleming mostram que 40 Eridiani B, apesar de ser muito fraca, correspondia ao tipo espectral A (?)

1927 A. Eddington expressa o estranhamento que pairava assim:

> We learn about the stars by receiving and interpreting the messages which their light brings to us. The message of the Companion of Sirius when it was decoded ran: "I am composed of material 3,000 times denser than anything you have ever come across; a ton of my material would be a little nugget that you could put in a matchbox." What reply can one make to such a message? The reply which most of us made in 1914 was—"Shut up. Don't talk nonsense."



Mas em 1924 a Mecânica Quântica já havia sido formulada...

R.H. Fowler em 1926 a utiliza para explicar o que acontecia

Mais uma vez, a degenerescência: como obter a equação de estado usando só o Ppio. de Incerteza e o Ppio. De Pauli

Vamos supor que temos N elétrons confinados num volume V
O espaço acessível para cada um deles é $\Delta x \sim \left(\frac{V}{2N}\right)^{1/3}$, e como estão sujeitos ao Princípio de Incerteza, seu impulso será determinado por $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Assim, $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\,\Delta x} \sim \frac{\hbar\, N^{1/3}}{2^{2/3}\, V^{1/3}}$

e a energia cinética média resulta $\langle E_K \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2\, N^{2/3}}{2^{7/3}\, V^{2/3} m}$

Por tanto, a energia interna é simplesmente $U = N\langle E_K \rangle \sim \frac{\hbar^2\, N^{5/3}}{2^{7/3}\, V^{2/3} m}$

Mas a Termodinâmica nos diz que podemos obter a pressão diferenciando a energia interna $P = -\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{S=cte}$

O que resulta em $P = -\frac{\partial U}{\partial V}\Big|_{S=cte} \sim \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{2^{4/3}\, 3V^{5/3} m}$ ou seja, $\boxed{P \propto n^{5/3}}$ independente da temperatura e das interações coulombianas, etc.

Como $\hbar^2$ aparece no denominador, sem a Física Quântica esta pressão não existiria... (Fowler, 1926)

Se hovessemos permitido que os elétrons virem partículas relativísticas, $\langle E_K \rangle = pc$ então teriamos obtido $\boxed{P \propto n^{4/3}}$

Veremos logo como estas duas formas limite (não relativístico e totalmente relativístico) são utilizadas para obter a relação M-R das anãs brancas

A forma mais simples da estrutura estelar: estrelas politrópicas

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\,M(r)\rho}{r^2}$$

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Precisamos ainda de $P(\rho)$ (equação de estado) mas não das equações que contém $\frac{dT}{dr}$ e $\frac{dL}{dr}$. Isto decorre da temperatura constante (hipótese adequada se os elétrons são degenerados) e da ausência de reações nucleares

Já vimos que no caso dos férmions não relativísticos → $P \propto \rho^{5/3}$

Generalizando $P = K\rho^{\Gamma}$ (chamada de forma politrópica da eos)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

Sempre é possível formar um sistema de segunda ordem a partir de duas de primeira ordem

Mudança de variáveis

$$\Gamma = 1 + {}^{1}/_{n}$$

e

$$\rho = \rho_c \Theta^n$$
$$r = a\xi$$
$$a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n-1}}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\Theta^n$$

Equação de Lane-Emdem

Condições de contorno

$$\Theta(\xi = 0) = 1$$
$$\Theta'(\xi = 0) = 0$$

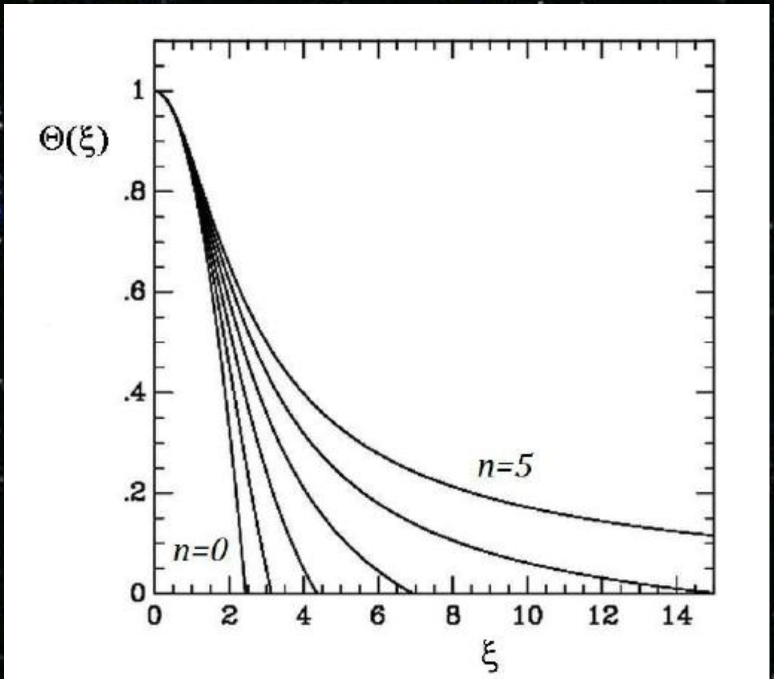
São o mesmo que

$$\left(\begin{array}{c} \rho(r=0) = \rho_c \\ \dfrac{dP}{dr} = 0 \end{array}\right)$$

Em geral, as soluções decrescem até que cruzam o eixo $\Theta(\xi_1) = 0$ para algum valor de ξ_1 o qual define o *raio estelar*

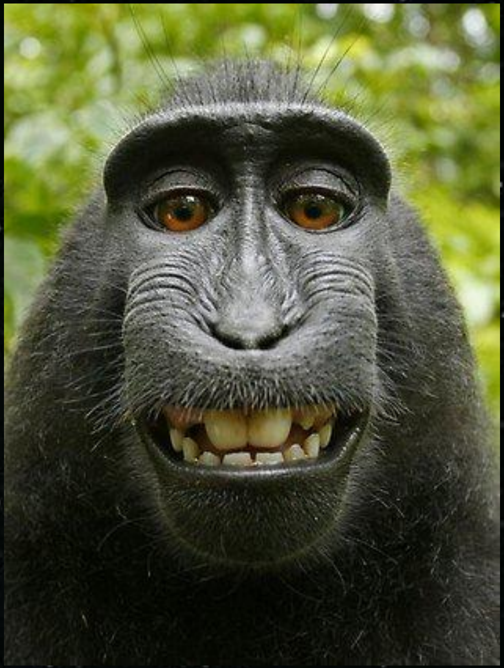
$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \rho_c^{\frac{(1-n)}{2n}} \xi_1$$

E a massa é $$M = 4\pi a^3 \xi_1^2 \rho_c |\Theta'(\xi_1)|$$



As soluções analíticas existem para alguns valores de *n*

$$n = -1, 0, 1, \frac{3}{2}, 3, 5 \text{ e } \infty$$



Intervalo...

Aplicação às anãs brancas

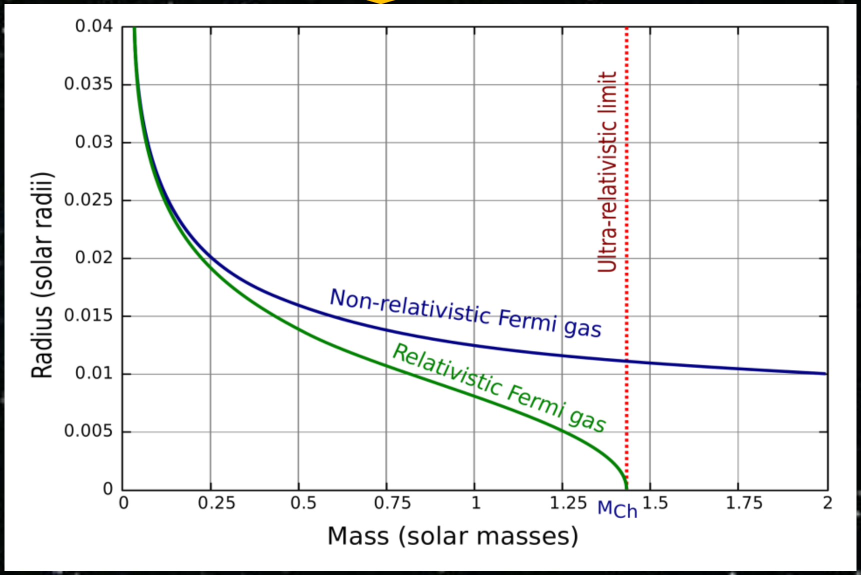
$$M = 4\pi R^{\frac{(3-n)}{(1-n)}} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{n/(n-1)} \xi_1 |\Theta'(\xi_1)|$$

Com as expressões anteriores temos a relação massa –raio completamente geral

Nos casos limites

$$\Gamma = \frac{5}{3} \quad \left(n = \frac{3}{2}\right) \; ; \quad \xi_1 = 3.65375 \; ; \quad \xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)| = 2.71406$$

$$\Gamma = \frac{4}{3} \quad (n = 3) \; ; \quad \xi_1 = 6.89685 \; ; \quad \xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)| = 2.01824$$



$$R = 1.122 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 g\ cm^{-3}}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/6} km$$

$$M = 0.4964 \left(\frac{\rho_c}{10^6 g\ cm^{-3}}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/2} M_\odot = 0.7 \left(\frac{R}{10\ km}\right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5} M_\odot$$

Baixa densidade (n=5/3)

$$R = 3.347 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 g\ cm^{-3}}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2/3} km$$

$$M = 1.457 \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2} M_\odot$$ (independente de *R*!)

Alta densidade (n=4/3)

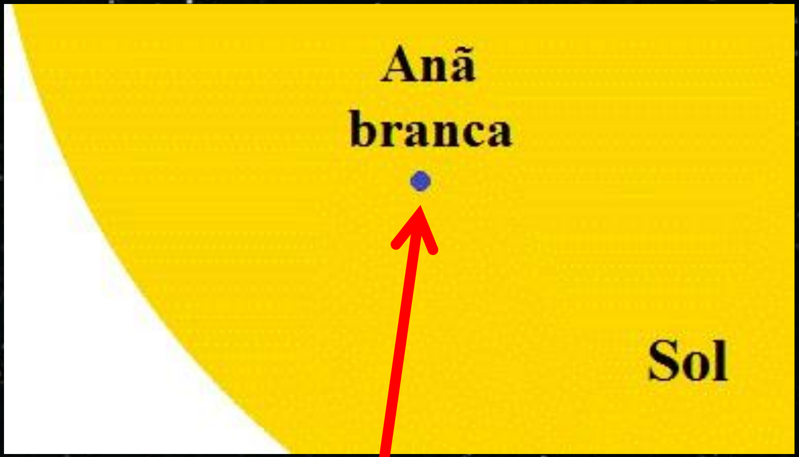
se $\rho_c \rightarrow \infty$ valor máximo $1.457 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot$

limite de Chandrasekhar.

As dimensões da solução estão dadas pelos coeficientes da mudança de ariáveis

$$\rho = \rho_c \Theta^n$$
$$r = a\xi$$
$$a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n-1}}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

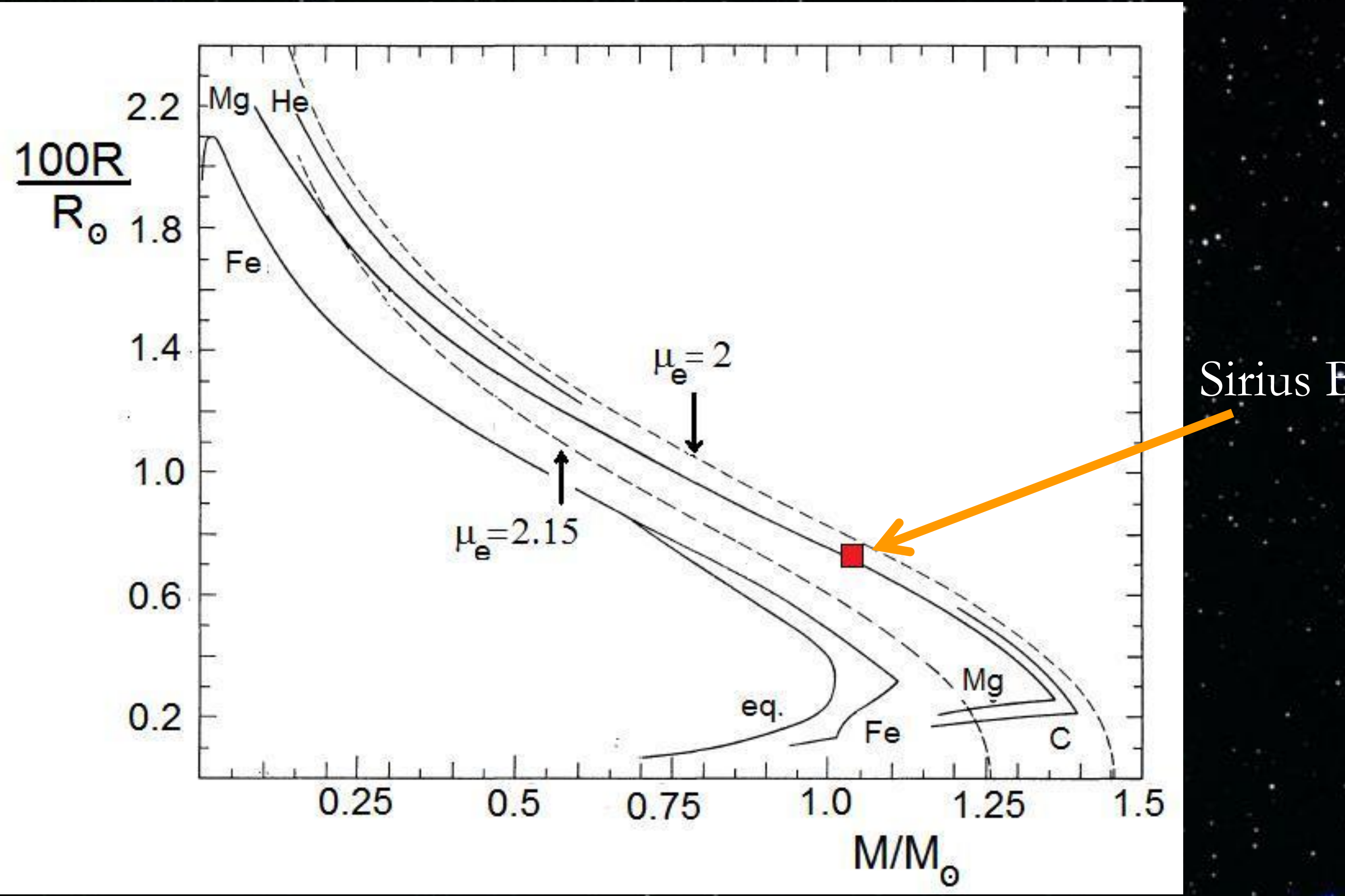
Quando especificamos a densidade central e o *K* as soluções mostram a massa e o raio correspondentes a uma anã branca, se mudamos isso podem descrever outro objeto em equilíbrio hidrostático



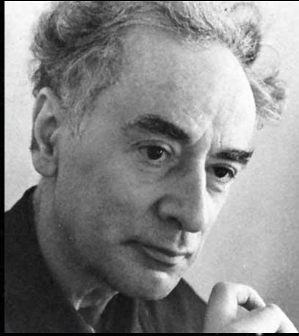
$$R = 1.122 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 g\ cm^{-3}}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/6} km$$

$$M = 0.4964 \left(\frac{\rho_c}{10^6 g\ cm^{-3}}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/2} M_\odot = 0.7 \left(\frac{R}{10\ km}\right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5} M_\odot$$

Hamada & Salpeter (1961)



O limite de Chandrasekhar



N férmions $\Rightarrow$ $n \sim N/R^3$

$E_F \sim pc \cong \hbar c N^{1/3}/R$

Energia de Fermi

$E_g \cong GMm_B/R \cong GNm_B^2/R.$

Energia gravitacional

$$E = \frac{\hbar c N^{1/3}}{R} - \frac{GNm_B^2}{R}$$

Equilíbrio = mínimo da energia

Para um N pequeno: *E* +, e *diminui* aumentando R *até que* $E_F \to \frac{p_F^2}{2m} \propto \frac{1}{R^2}$ e o termo gravitacional passa a dominar. A esfera se estabiliza para um raio *R* finito (ou seja, temos uma anã branca)

Mas se o N de cara é grande: *E* -, e $\to -\infty$ se $R \to 0$ e a esfera *colapsa,* já que não encontra um mínimo

Assim, existe um *máximo* para o número de férmions N_{max} tal que exista uma configuração de equilíbrio (estrela!), e resulta determinado pela condição *E=0*

$$N_{max} \cong \left(\frac{\hbar}{Gm_B^2}\right)^{3/2} \sim 2 \times 10^{57}$$

Só constantes fundamentais !

E a *massa máxima* associada $M_{max} \cong N_{max} \times m_B \sim 1.5\, M_\odot$

O raio vem determinado pela condição de estabelecimento da degenerescência relativística $E_F \cong mc^2$, usando que $E_F \cong \hbar c N_{max}^{1/3} / R_{max}$

$$R_{max} \cong \frac{\hbar}{mc}\left(\frac{\hbar}{Gm_B^2}\right)^{1/2}$$

se $m = m_e$ (anãs brancas), $R_{max} \approx 5 \times 10^8 cm$

se $m = m_{nêutron} = m_B$ $R_{max} \approx 3 \times 10^5 cm$ (estrelas de nêutrons)

Passa-se de um para o outro quando a captura eletrônica encontra sua limiar, a uma densidade de $\geq 10^8\ g\ cm^{-3}$

(mas cuidado com o regime de alta densidade!!, esta análise e Newtoniana e a RG é importante para as NS!!!!!!!)

Em particular: que as massas das NS medidas estejam próximas de 1.4 Mo ***não* tem a ver** com a massa de Chandrasekhar

Na próxima aula, as anãs brancas continuam enchendo…