MAT105 - GEOMETRIA ANALÍTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - Lista 4

PROFA. ANA PAULA JAHN

(1) Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos descritos abaixo:

(a) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

(b) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (1, -1, 1)$.

(2) Obtenha a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$.

(3) Verifique (e explique) se $\pi_1 = \pi_2$, onde:

(a) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - 6y + 4z + 1 = 0$.

(b) $\pi_1 : x - \dfrac{y}{2} + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : -2x + y - 4z + 2 = 0$.

(4) Obtenha uma equação geral do plano $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - \mu \end{cases}$

(5) Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Seja π_2 o plano que passa por $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Seja π_3 o plano de equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$.

(a) Escreva as equações gerais de π_1, π_2 e π_3.

(b) Mostre que a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto. Determine-o.

(6) Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

(a) Mostre que $P \notin r$.

(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

(7) Dada a equação geral, obtenha as equações vetorial e paramétricas dos planos:

(a) $4x + 2y - z + 5 = 0$

(b) $z - 3 = 0$

(c) $y - z - 2 = 0$

(8) Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

(a) $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$ $\qquad s : x = -y = \dfrac{z-1}{4}$

(b) $r : \dfrac{x+1}{2} = y = -z$ $\qquad s : \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

(c) $r : X = (0,1,0) + \lambda(1,1,1)$ $\qquad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

(d) $r : X = (1,2,3) + \lambda(0,1,3)$ $\qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 6 + 6\lambda \end{cases}$

(9) Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos seguintes casos:

(a) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e $\pi : x + y = 2.$

(b) $r : X = (0,0,0) + \lambda(1,4,1)$, $\pi : X = (1,-1,1) + \lambda(0,1,2) + \mu(1,-1,0)$

(c) $r : X = (1,1,0) + \lambda(1,-1,1)$, $\pi : x + y - 2 = 0.$

(10) Calcule $m \in \mathbb{R}$ para que a reta $r : X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ seja paralela ao plano $\pi : X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1)$.

(11) Calcule $m, n \in \mathbb{R}$ para que a reta $r : X = (n,2,0) + \lambda(2,m,m)$ esteja contida no plano $\pi : x - 3y + z = 1$.

(12) Calcule m para que os planos $\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m)$ e $\pi_2 : 2x + 3y + 2z + 1 = 0$ sejam paralelos distintos.

(13) Dê a equação paramétrica da reta que passa por $P = (1,0,1)$ e é perpendicular a reta r que passa por $A = (0,0,-1)$ e $B = (1,0,0)$

(14) Determine a projeção ortogonal do ponto $P = (0, 2, 1)$ sobre a reta $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)$.

(15) O vetor $(1, 1, m)$ é normal ao plano π, que contém a interseção dos planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e Oyz Determine m e obtenha uma equação geral do plano π.

(16) Obtenha uma equação geral do plano π, que contém $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(0, 3, 1)$ e é perpendicular a $\pi_1 : x + y - 2z - 2 = 0$. Obtenha também uma equação vetorial de $\pi \cap \pi_1$.

(17) Dê equação vetorial da reta que passa por P e é perpendicular ao plano π, nos casos

(a) $P = (1, -1, 0)$ e $\pi : X = (1, -1, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1)$.

(b) $P = (1, 2, 3)$ e $\pi : 2x + y - z = 2$.

(18) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P = (4, 0, 1)$ sobre o plano $\pi : 3x - 4y + 2 = 0$.

(19) Verifique se os planos dados são perpendiculares, nos casos:

(a) $\pi_1 : X = (1, -3, 4) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, 3)$ e $\pi_2 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 6) + \mu(1, -1, 0)$

(b) $\pi_1 : x + y - z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 0$

(20) Obtenha uma equação geral do plano que contém a origem do sistema de coordenadas, é paralelo a $r : -x = \dfrac{1 - y}{4} = \dfrac{1 - z}{5}$ e é perpendicular a $\pi : X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 4, 3) + \mu(1, -1, -2)$