PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Método Simplex

PTC - EPUSP

Aula 10 - 2020

Agradecimento: Agradeço a Profa. Celma Ribeiro pelos arquivos latex do curso PRO-3341, usados na preparação das aulas desse curso.

Método Simplex - Forma Tableau

Sabemos como passar de um ponto extremo a outro. A questão é, dada a função objetivo que se deseja minimizar, como determinar a variável que deve entrar na base de forma a reduzir o valor da função objetivo? Consideramos o problema de PL

$$\min \; c'x$$
$$\text{s.a.} \;\; Ax = b, \;\; x \geq 0$$

Na representação canônica por tableau,

$$\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n & b \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & y_{1m+1} & \dots & y_{1n} & \delta_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & y_{2m+1} & \dots & y_{2n} & \delta_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & y_{mm+1} & \dots & y_{mn} & \delta_m
\end{array}$$

Método Simplex - Forma Tableau

O valor da função objetivo na base atual á dada por:

$$z_0 = c_1\delta_1 + \ldots + c_m\delta_m$$

e do tableau, as equações do sistema são, para $i = 1, \ldots, m$,

$$x_i = \delta_i - \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij}x_j$$

Método Simplex - Forma Tableau

Portanto o valor da função objetivo pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
z &= c_1x_1 + \ldots + c_mx_m + \sum_{j=m+1}^{n} c_jx_j \\
&= c_1(\delta_1 - \sum_{j=m+1}^{n} y_{1j}x_j) + \ldots + c_m(\delta_m - \sum_{j=m+1}^{n} y_{mj}x_j) \\
&+ \sum_{j=m+1}^{n} c_jx_j = z_0 - r_{m+1}x_{m+1} - \ldots - r_nx_n
\end{aligned}
$$

Onde para $j = m+1, \ldots, n$

$$
r_j = c_j - z_j, \;\; z_j = \sum_{i=1}^{m} c_iy_{ij}
$$

Método Simplex - Forma Tableau

Portanto, temos que

$$z + r_{m+1}x_{m+1} + \ldots + r_n x_n = z_0$$

Temos as seguintes possibilidades (minimização):

1) $r_j \leq 0$ para todo $j \rightarrow$ solução atual é ótima.
   1.a) $r_j < 0$ para todo $j \rightarrow$ ótimo único
   1.b) $r_j \leq 0$ para todo j mas com alguns $r_j = 0 \rightarrow$ conjunto de soluções ótimas é a combinação convexa dos pontos extremos associados aos j tais que $r_j = 0$.

Método Simplex - Forma Tableau

2) $r_j > 0$ para algum $j \rightarrow$ variável x_q tal que $r_q = \max\{r_j\}$ entra na base (vai reduzir a função objetivo)
   - 2.A) Se $y_{iq} \leq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m \rightarrow$ solução ilimitada
   - 2.B) Se $y_{iq} > 0$ para algum $i = 1, \ldots, m \rightarrow$ mudar de base, sai variável x_ι tal que

$$\frac{x_\iota}{y_{\iota q}} = \min\{\frac{x_i}{y_{iq}}; y_{iq} > 0\}$$

(problema se der empate, teremos solução degenerada)

Observações:

A) Pegar o $r_q = \max\{r_j\}$ é apenas uma convenção, qualquer x_j tal que $r_j > 0$ serviria no passo 2).

B) Para o problema de maximização inverter a desigualdade para o r_j, isto é,

1. No Passo 1), $r_j \geq 0$, e
2. No passo 2), $r_j < 0$ para algum j.

Método Simplex - Forma Tableau

Como obter r_j diretamente do tableau? Introduzir a linha de custos:

$$\begin{aligned} & \min \; z \\ \text{s.a.} \; & z - c'x = 0 \\ & Ax = b, \; x \geq 0 \end{aligned}$$

Método Simplex - Forma Tableau

Pivotando (z sempre na base, mas não mostramos para simplificar o tableau) obtemos

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n & b \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & r_{m+1} & \dots & r_n & z_0 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & y_{1m+1} & \dots & y_{1n} & \delta_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & y_{2m+1} & \dots & y_{2n} & \delta_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & y_{mm+1} & \dots & y_{mn} & \delta_m
\end{array}
$$

Algoritmo Simplex

Passo 1 Encontre uma solução básica inicial (um ponto extremo inicial) e coloque o tableau na forma padrão

Passo 2 Se a solução é ótima (para todo j, minimização: $r_j \leq 0$, maximização: $r_j \geq 0$), pare. Senão vá para o passo 3

Passo 3 Determine a variável não-básica que deve entrar na base (minimização: $r_q > 0$, maximização: $r_q < 0$)

Passo 4 Determinar a variável básica que deve sair da base: x_ι tal que

$$\frac{x_\iota}{y_{\iota q}} = \min\{\frac{x_i}{y_{iq}}; y_{iq} > 0\}$$

ou que o problema é ilimitado ($y_{iq} \leq 0$ para todo i). Nesse caso, pare, problema ilimitado. Caso contrário, vá para Passo 5

Passo 5 Pivote o tableau e determine a nova solução básica factível (ponto extremo adjacente), e vá para o Passo 2.

Exemplo

Vamos trabalhar com o problema

$$\begin{array}{llll} \text{max z} = & 3x_1 & + 2x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 & + x_2 & \leq 7 \\ & x_1 & & \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

1. Coloque o problema na forma padrão
2. Qual seria a melhor escolha para uma construir uma primeira matriz básica? Lembre-se que vamos inverter matrizes
3. Quais são as correspondentes variáveis básicas? E as não básicas? Quem são, no problema original, x_B, x_N, c_B, c_N.
4. Escreva as matrizes B e N (associadas às variáveis básicas e não básicas) e B^{-1}
5. Apresente o modelo na forma tabelau

Exemplo 1

Vamos reescrever o problema na forma *tableau*

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 3x_1 & +\,2x_2 & +\,0s_1 & +\,0s_2 & \\
\text{s.a} & x_1 & +\,x_2 & +\,s_1 & & = 7 \\
 & x_1 & & & +\,s_2 & = 4 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & s_1 \geq 0 & s_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Escolha para variáveis básicas, as variáveis de folga $BV = \{s_1, s_2\}$

Exemplo 1

Vamos reescrever o problema na forma *tableau*

$$\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 3x_1 & +\ 2x_2 & +\ 0s_1 & +\ 0s_2 & \\
\text{s.a} & x_1 & +\ x_2 & +\ s_1 & & = 7 \\
& x_1 & & & +\ s_2 & = 4 \\
& x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & s_1 \geq 0 & s_2 \geq 0 &
\end{array}$$

Escolha para variáveis básicas, as variáveis de folga $BV = \{s_1, s_2\}$
Seja

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

Ou ainda,

$$z - 3x_1 - 2x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$$

Exemplo 1

Variáveis básicas $BV = \{s_1, s_2\}$ e as não básicas $N = \{x_1, x_2\}$

$$s_1 = 7 \quad \text{e} \quad s_2 = 4$$

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0$$

Valor da função nesse ponto extremo:

$$z = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 7 + 0 \times 4 = 0$$

		x_1	x_2	s_1	s_2	
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$= 0$
Linha 1		1	1	1	0	$= 7$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$

Exemplo

6. Qual o ponto extremo que está associado a essa variável? (dê o vetor)
7. A base é ótima?
8. Reescreva o problema parametrizado em relação a essa primeira base

Exemplo 1

Variáveis básicas $BV = \{s_1, s_2\}$ e as não básicas $N = \{x_1, x_2\}$

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$= 0$	$z = 0$
Linha 1		1	1	1	0	$= 7$	$s_1 = 7$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$s_2 = 4$

A solução básica é ótima?

Exemplo 1

Variáveis básicas $BV = \{s_1, s_2\}$ e as não básicas $N = \{x_1, x_2\}$

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$= 0$	$z = 0$
Linha 1		1	1	1	0	$= 7$	$s_1 = 7$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$s_2 = 4$

A solução básica é ótima?

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

Não! Vale a pena crescer x_1, pois o coeficiente associado a ela é positivo (negativo, se você olhar o *tableau*)

Exemplo 1

$\boxed{\text{Vou andar para um } \textbf{ponto extremo} \text{ adjacente!}}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Alguma variável } \textbf{deve} \text{ se anular!}}$

Exemplo 1

$\boxed{\text{Vou andar para um } \textbf{ponto extremo} \text{ adjacente!}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Alguma variável } \textbf{deve} \text{ se anular!}}$

Até onde é possível crescer x_1?
Escrevendo na forma de um sistema...

Exemplo 1

$\boxed{\text{Vou andar para um \textbf{ponto extremo} adjacente!}}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Alguma variável \textbf{deve} se anular!}}$

Até onde é possível crescer x_1?

Escrevendo na forma de um sistema...

$$\begin{array}{cccccl} z & -3x_1 & -2x_2 & +0s_1 & +0s_2 & = 0 \\ & 1x_1 & +1x_2 & +1s_1 & & = 7 \\ & 1x_1 & & & +1s_2 & = 4 \quad \rightarrow \end{array}$$

Exemplo 1

$$\begin{array}{lrrrrl} z & -3x_1 & -2x_2 & +0s_1 & +0s_2 & = 0 \\ & 1x_1 & +1x_2 & +1s_1 & & = 7 \\ & 1x_1 & & & +1s_2 & = 4 \end{array}$$

Vamos escrever tudo em função das variáveis não básicas.

Exemplo 1

$$\begin{array}{cccccc} z & -3x_1 & -2x_2 & +0s_1 & +0s_2 & = 0 \\ & 1x_1 & +1x_2 & +1s_1 & & = 7 \\ & 1x_1 & & & +1s_2 & = 4 \end{array}$$

Vamos escrever tudo em função das variáveis não básicas.

$$\begin{array}{cccccccc} z & & & = 0 & -3x_1 & -2x_2 & \\ & s_1 & & = 7 & -1x_1 & -1x_2 & \\ & & s_2 & = 4 & -x_1 & & \rightarrow \end{array}$$

Até onde é possível crescer x_1?

Exemplo 1

$\boxed{\text{Voltemos ao } tableau}$

Até onde é possível crescer x_1?

		$\downarrow$ x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas	
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$= 0$	$z = 0$	
Linha 1		1	1	1	0	$= 7$	$s_1 = 7$	
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$s_2 = 4$	$\rightarrow$

Exemplo 1

Voltemos ao *tableau*

Até onde é possível crescer x_1?

$$\begin{array}{llrrrrll}
 & & \downarrow & & & & & \\
 & & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & & \text{Básicas} \\
\hline
\text{Linha 0} & z & -3 & -2 & 0 & 0 & = 0 & z = 0 \\
\text{Linha 1} & & 1 & 1 & 1 & 0 & = 7 & s_1 = 7 \\
\text{Linha 2} & & 1 & 0 & 0 & 1 & = 4 & s_2 = 4 \quad \rightarrow
\end{array}$$

$$min\left\{\frac{7}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 4$$

s_2 sai da base....
Variáveis básicas $BV = \{s_1, x_1\}$ e as não básicas $N = \{s_2, x_2\}$

Exemplo 1

Segundo ponto extremo

Para a nova base escreva:

1. As matrizes B, N, B^{-1}
2. Quem são, no problema original, x_B, x_N, c_B, c_N
3. Qual o ponto extremo que está associado a essa variável?
4. Reescreva o problema parametrizado em relação à essa base

Exemplo 1

A coluna associada a x_1 deve virar uma coluna da identidade, pois queremos escrever algo como

$$\begin{aligned}
z \quad\quad\quad\quad &= \bullet - \bullet\, x_2 - \bullet\, s_2 \\
s_1 \quad\quad &= \bullet - \bullet\, x_2 - \bullet\, s_2 \\
x_1 &= \bullet - \bullet\, x_2 - \bullet\, s_2
\end{aligned}$$

Ou seja, vamos parametrizar o problema em função das variáveis não básicas.

Exemplo 1

		$\downarrow$						
		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas	
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$= 0$	$z = 0$	
Linha 1		1	1	1	0	$= 7$	$s_1 = 7$	
Linha 2		**1**	0	0	1	$= 4$	$s_2 = 4$	$\rightarrow$

A coluna associada a x_1 deve virar uma coluna da identidade

Exemplo 1

		$\downarrow$						
		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas	
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$=0$	$z=0$	
Linha 1		1	1	1	0	$=7$	$s_1=7$	
Linha 2		**1**	0	0	1	$=4$	$s_2=4$	$\rightarrow$

A coluna associada a x_1 deve virar uma coluna da identidade

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$=0$	$z=0$
Linha 1		0	1	1	-1	$=3$	$s_1=3$
Linha 2		1	0	0	1	$=4$	$x_1=4$

Exemplo 1

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$= 0$	$z = 0$
Linha 1		0	1	1	-1	$= 3$	$s_1 = 3$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$x_1 = 4$

Escrevendo a função objetivo em relação às variáveis não básicas obtemos: $z = 12 + 2x_2 - 3s_2$

Exemplo 1

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$=0$	$z=0$
Linha 1		0	1	1	-1	$=3$	$s_1=3$
Linha 2		1	0	0	1	$=4$	$x_1=4$

Escrevendo a função objetivo em relação às variáveis não básicas obtemos: $z = 12 + 2x_2 - 3s_2$

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	0	-2	0	3	$=12$	$z=12$
Linha 1		0	1	1	-1	$=3$	$s_1=3$
Linha 2		1	0	0	1	$=4$	$x_1=4$

A solução básica é ótima?

Exemplo 1

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	-3	-2	0	0	$=0$	$z=0$
Linha 1		0	1	1	-1	$=3$	$s_1=3$
Linha 2		1	0	0	1	$=4$	$x_1=4$

Escrevendo a função objetivo em relação às variáveis não básicas obtemos: $z = 12 + 2x_2 - 3s_2$

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	0	-2	0	3	$=12$	$z=12$
Linha 1		0	1	1	-1	$=3$	$s_1=3$
Linha 2		1	0	0	1	$=4$	$x_1=4$

A solução básica é ótima?

Não! Vale a pena crescer x_2

Até onde é possível crescer x_2?

		x_1	$\downarrow$ x_2	s_1	s_2		Básicas	
Linha 0	z	0	-2	0	3	$= 12$	$z = 12$	
Linha 1		0	1	1	-1	$= 3$	$s_1 = 3$	$\rightarrow$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$x_1 = 4$	

$$min\left\{\frac{3}{1}, \cancel{\frac{4}{0}}\right\} = 3$$

s_1 sai da base....

Variáveis básicas $BV = \{x_2, x_1\}$ e as não básicas $N = \{s_2, s_1\}$

Exemplo 1

Terceiro ponto extremo

Para a nova base escreva:

1. As matrizes B, N, B^{-1}
2. Quem são, no problema original, x_B, x_N, c_B, c_N
3. Qual o ponto extremo que está associado a essa variável?
4. Reescreva o problema parametrizado em relação à essa base

Exemplo 1

A coluna associada a x_2 deve virar uma coluna da identidade

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	0	-2	0	3	$= 12$	$z = 12$
Linha 1		0	1	1	-1	$= 3$	$x_2 = 3$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$x_1 = 4$

Escrevemos a função objetivo em relação às variáveis não básicas:
$z = 17 - 2s_1 - 1s_2$

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	0	0	2	1	$= 17$	$z = 18$
Linha 1		0	1	1	-1	$= 3$	$x_2 = 3$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$x_1 = 4$

Exemplo 1

A coluna associada a x_2 deve virar uma coluna da identidade

		x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	0	-2	0	3	$= 12$	$z = 12$
Linha 1		0	1	1	-1	$= 3$	$x_2 = 3$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$x_1 = 4$

Escrevemos a função objetivo em relação às variáveis não básicas:
$z = 17 - 2s_1 - 1s_2$

		x_1	x_2	s_1	s_2		Básicas
Linha 0	z	0	0	2	1	$= 17$	$z = 18$
Linha 1		0	1	1	-1	$= 3$	$x_2 = 3$
Linha 2		1	0	0	1	$= 4$	$x_1 = 4$

Não é possível aumentar a função objetivo: solução é ótima!

Exemplo 1

Baseado nos tableaux, determine, em cada iteração:

1. $B^{-1} \times b$
2. $B^{-1} \times N$
3. $c_B^t \left(B^{-1} \times b \right)$

Exemplo 2

Vamos resolver o problema

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 60x_1 & + 30x_2 & + 20x_3 & \\
\text{s.a} & 8x_1 & + 6x_2 & + x_3 & \leq 48 \\
 & 4x_1 & + 2x_2 & + 1.5x_3 & \leq 20 \\
 & 2x_1 & + 1.5x_2 & + 0.5x_3 & \leq 8 \\
 & & x_2 & & \leq 5 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Resolução

Defina as variáveis básicas $BV = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ e as não básicas $N = \{x_1, x_2, x_3\}$
Escrevo o problema de outra forma

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		Básicas
Linha 0	z	-60	-30	-20					$= 0$	$z = 0$
Linha 1		8	6	1	1				$= 48$	$s_1 = 48$
Linha 2		4	2	$1,5$		1			$= 20$	$s_2 = 20$
Linha 3		2	$1,5$	$0,5$			1		$= 8$	$s_3 = 8$
Linha 4			1					1	$= 5$	$s_4 = 5$

A solução básica é ótima?

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

Até onde é possível crescer x_1?

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		Básicas	
Linha 0	z	-60	-30	-20					$= 0$	$z = 0$	
Linha 1		8	6	1	1				$= 48$	$s_1 = 48$	
Linha 2		4	2	$1,5$		1			$= 20$	$s_2 = 20$	
Linha 3		2	$1,5$	$0,5$			1		$= 8$	$s_3 = 8$	$\rightarrow$
Linha 4			1					1	$= 5$	$s_4 = 5$	

Considera-se

$$min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2},\right\} = 4$$

de forma a preservar não negatividade das variáveis. Tomo $x_1 = 4$ e s_3 sai da base

Variáveis básicas $BV = \{s_1, s_2, x_1, s_4\}$ e as não básicas $N = \{s_3, x_2, x_3\}$

Para a nova base escreva:

1. As matrizes B, N,
2. Quem são, no problema original, x_B, x_N, c_B, c_N
3. Qual o vértice que está associado a essa variável?

Deve-se identificar o que ocorre ao considerar o valor da nova base ($x_1 = 4$). O coeficiente de x_1 na linha 3 deve "virar"1 e os das demais linhas devem "virar"0. Faço operações de pivotação.

		↓ x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		Básicas
Linha 0	z	-60	-30	-20					$= 0$	$z = 0$
Linha 1		8	6	1	1				$= 48$	$s_1 = 48$
Linha 2		4	2	1,5		1			$= 20$	$s_2 = 20$
Linha 3		2	1,5	0,5			1		$= 8$	$s_3 = 8$
Linha 4			1					1	$= 5$	$s_4 = 5$

O coeficiente de x_1 na linha 3 deve "virar"1.

		x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		Básicas	
Linha 0	z		15	-5			30		$= 240$	$z = 240$	
Linha 1				-1	1		-4		$= 16$	$s_1 = 16$	
Linha 2			-1	$0,5$		1	-2		$= 4$	$s_2 = 4$	$\rightarrow$
Linha 3		1	$0,75$	$0,25$			$0,5$		$= 4$	$x_1 = 4$	
Linha 4			1					1	$= 5$	$s_4 = 5$	

Função objetivo: $z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3 \Rightarrow$ Cresço x_3

Saída da base:

$$min\left\{\frac{4}{0.5}, \frac{4}{0.25}\right\} = 8$$

Sai s_2

.

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		Básicas
Linha 0	z		5			10	10		$= 280$	$z = 280$
Linha 1			-2		1	2	-8		$= 24$	$s_1 = 24$
Linha 2			-2	1		2	-4		$= 8$	$x_3 = 8$
Linha 3		1	$1,25$			$-0,5$	$1,5$		$= 2$	$x_1 = 2$
Linha 4			1					1	$= 5$	$s_4 = 5$

Função objetivo: $z = 280 - 5x_2 - 10s_2 - 10s_3$

Não é possível aumentar a função objetivo: solução é ótima!

Exemplo 2

Baseado nos tableaux, determine, em cada iteração:

1. $B^{-1} \times b$
2. $B^{-1} \times N$
3. $c_B^t \left(B^{-1} \times b \right)$