PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Interpretação Geométrica

PTC - EPUSP

Aula 6 - 2020

Agradecimento: Agradeço a Profa. Celma Ribeiro pelos arquivos latex do curso PRO-3341, usados na preparação das aulas desse curso.

Interpretação Geométrica

Vamos agora apresentar uma relação entre os resultados algébricos obtidos até agora e a teoria de conjuntos convexos.

1. **Conjunto Convexo:** Um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para qualquer $x, y \in S$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ temos $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{C}$.
2. Ou seja, um conjunto $\mathcal{C}$ é **convexo** se o segmento de reta que liga quaisquer dois pontos do conjunto está inteiramente contido em $\mathcal{C}$.

Propriedades

1. Se $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e $\beta \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; x = \beta c,\ c \in \mathcal{C}\}$ é convexo.
2. Se $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos convexos então
$$\mathcal{C} + \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; x = c + d,\ c \in \mathcal{C},\ d \in \mathcal{D}\}$$
é convexo.
3. A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Exemplo

Considere o conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, \ \ x \geq 0\}$$

Mostre que $\mathcal{K}$ é um conjunto convexo. O que pode ser dito para o conjunto $\mathcal{K}$ abaixo?

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b, \ \ x \geq 0\}$$

Definição: Ponto Extremo

Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ em um conjunto convexo $\mathcal{C}$ é dito ser um ponto extremo de $\mathcal{C}$ se não existem dois pontos distintos y e z em $\mathcal{C}$ tal que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z$$

para algum λ tal que $0 < \lambda < 1$.

Teorema: Ponto Extremo = Solução Básica Factível

Considere o conjunto convexo

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, \;\; x \geq 0\}$$

Temos que

1. x é um ponto extremo de $\mathcal{K}$ se e somente se
2. x é uma solução básica factível de $Ax = b$, $x \geq 0$.

x Solução Básica Factível $\rightarrow$ x Ponto Extremo

Suponha que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

seja uma solução básica factível de $Ax = b$, $x \geq 0$. Portanto

$$x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m = b$$

onde $\{a_1, \ldots, a_m\}$ são LI (por simplicidade as m primeiras).

x Solução Básica Factível $\rightarrow$ x Ponto Extremo

Suponha que para $0 < \lambda < 1$, $y, z \in \mathcal{K}$,

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z$$

Note que devemos ter

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

x Solução Básica Factível $\rightarrow$ x Ponto Extremo

Logo para $i = m+1, \ldots, n$,

$$0 = \lambda y_i + (1-\lambda) z_i$$

Como $0 < \lambda < 1$, $y_i \geq 0$, $z_i \geq 0$, temos que para $i = m+1, \ldots, n$,

$$y_i = 0, \quad z_i = 0.$$

x Solução Básica Factível $\rightarrow$ x Ponto Extremo

Como $y, z \in \mathcal{K}$, temos que

$$y_1 a_1 + \ldots + y_m a_m = b,$$
$$z_1 a_1 + \ldots + z_m a_m = b.$$

e como $\{a_1, \ldots, a_m\}$ são LI, a solução do conjunto acima é única. Portanto devemos ter

$$x_i = y_i = z_i, \;\; i = 1, \ldots, m.$$

x Ponto Extremo $\rightarrow$ x Solução Básica Factível

Suponha que x seja um ponto extremo de $\mathcal{K}$. Vamos assumir que somente as p primeiras componentes de x sejam não nulas. Portanto

$$x_1 a_1 + \ldots + x_p a_p = b,$$

com $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$. Se mostrarmos que $\{a_i, \ldots, a_p\}$ são LI então x é uma solução básica factível (degenerada se $p < m$). Mostraremos por contradição. Suponha que $\{a_i, \ldots, a_p\}$ são LD. Então existe uma combinação linear não trivial tal que

$$y_1 a_1 + \ldots + y_p a_p = 0.$$

x Ponto Extremo $\rightarrow$ x Solução Básica Factível

Defina o vetor $y \in \mathbb{R}^n$ como

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

x Ponto Extremo $\rightarrow$ x Solução Básica Factível

Como $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, podemos achar $\epsilon > 0$ tal que $x + \epsilon y \geq 0$ e $x - \epsilon y \geq 0$. Como $Ax = b$, $Ay = 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(x + \epsilon y) + \frac{1}{2}(x - \epsilon y), \\
A(x + \epsilon y) &= Ax + \epsilon Ay = b, \\
A(x - \epsilon y) &= Ax - \epsilon Ay = b
\end{aligned}
$$

o que contradiz que x seja um ponto extremo. Portanto devemos ter $\{a_i, \ldots, a_p\}$ são LI.

Definição: Conjunto Limitado

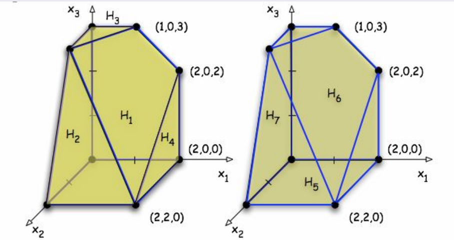
Um conjunto $\mathcal{K}$ é limitado se existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ para todo $x \in \mathcal{K}$.

Exemplo Poliedro

				Hiperplano
x_1	$+\ x_2$	$+\ x_3$	≤ 4	H1
x_1			≤ 2	H4
		x_3	≤ 3	H3
	$3x_2$	$+\ x_3$	≤ 6	H2
	$x_j \geq 0$			H5, H6, H7

Exemplo Poliedro

				Hiperplano
x_1	$+\ x_2$	$+\ x_3$	≤ 4	H1
x_1			≤ 2	H4
		x_3	≤ 3	H3
	$3x_2$	$+\ x_3$	≤ 6	H2
	$x_j \geq 0$			H5, H6, H7



Teorema da Representação - Caso Limitado

Seja

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, \;\; x \geq 0\}$$

um conjunto não vazio e limitado. Então o conjunto de pontos extremos é não vazio e finito. Seja $e_1, \ldots, e_\kappa$ os pontos extremos de $\mathcal{K}$. Então $x \in \mathcal{K}$ se e somente se

$$x = \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j e_j,$$

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, j = 1, \ldots, \kappa.$$

Exemplo

Represente os seguintes conjuntos pelos seus pontos extremos.

1. $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ \ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\}$
2. $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + 3x_2 = 1,\ \ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\}$

Teorema da Representação - Caso Limitado

O resultado também vale para o conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b, \ \ x \geq 0\}$$

Exemplo

Represente o seguinte conjunto pelos seus pontos extremos.

1. $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^2; 3x_1 + 5x_2 + \leq 15, \ 5x_1 + 2x_2 + \leq 10 \ \ x_i \geq 0, \ i = 1, 2\}$
2. $\mathcal{K}$ é dado pelo poliedro visto anteriormente.

PL - Caso Limitado

Pelo Teorema da Teorema da Representação - Caso Limitado, o problema de PL $\min c'x$, s.a. $Ax = b$, $x \geq 0$ é equivalente a

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j c' e_j \\ \text{s.a. } & \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, \kappa \end{aligned}$$

e portanto a solução ótima é $z^* = \min\{c'e_j; j = 1, \dots, \kappa\}$ (se der empate, a combinação convexa dos pontos extremos que atingem o mínimo z^* vai ser o conjunto infinito de soluções ótimas).

Exemplo

Resolva o problema de PL $\max\ 5x_1 + 3x_2$, s.a. $x \in \mathcal{K}$, onde

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^2; 3x_1{+}5x_2{+} \leq 15,\ \ 5x_1{+}2x_2{+} \leq 10\ \ x_i \geq 0,\ i = 1, 2\}.$$

E se a função objetivo fosse alterada para $z = 5x_1 + 2x_2$?

Exemplo

Resolva o problema de PL $\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, s.a. $x \in \mathcal{K}$, onde

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1+x_2+x_3 = 1,\ 2x_1+3x_2 = 1,\ \ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3\}$$

e o vetor c é dado por:

1. $c' = (1\ 0\ 1)$.
2. $c' = (0\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3})$.
3. $c' = (1\ 3\ -3)$.

Exemplo - Poliedro

Resolva o problema de PL $\max \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3$, s.a. $x \in \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é definido pelo poliedro visto anteriormente.