PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Teorema Fundamental da PL

PTC - EPUSP

Aula 5 - 2020

Agradecimento: Agradeço a Profa. Celma Ribeiro pelos arquivos latex do curso PRO-3341, usados na preparação das aulas desse curso.

Teorema Fundamental de PL

Dado um problema de PL na forma padrão,

$$\begin{aligned} \min\ & c'x \\ \text{sujeito a}\ & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem posto m,

I) se existe uma solução factível então existe uma solução básica factível.

II) se existe uma solução ótima então existe uma solução ótima básica factível.

Prova de i)

Vamos escrever (a_i a i-ésima coluna da matriz A, $i = 1, \ldots, n$)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

onde x é uma solução factível, isto é, $Ax = b$, $x \geq 0$. Segue que

$$Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$$

Assuma que exatamente p das variáveis x_i são maiores que zero e, por conveniência, estas sejas as p primeiras variáveis. Portanto

$$Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_p a_p = b$$

Prova de i)

Temos 2 possibilidades:
Caso 1) Assuma que $\{a_1, \ldots, a_p\}$ sejam LI (linearmente independentes). Como posto de $A =$ m, devemos ter $p \leq m$. Se $p = m$ a solução atual é básica e a prova está completa. Se $p < m$ então pode-se achar $m - p$ vetores (entre os $n - p$ vetores a_i que sobraram) tal que o conjunto de m vetores resultantes seja LI. Atribuindo o valor zero às correspondentes $m - p$ variáveis obtém-se uma solução básica factível degenerada.

Prova de i)

Caso 2) Assuma que $\{a_1, \ldots, a_p\}$ sejam LD (linearmente dependentes). Então podemos achar constantes $y_1, \ldots, y_p$, com pelo menos uma maior que zero, tal que

$$y_1 a_1 + \ldots + y_p a_p = 0$$

Multiplicando por ϵ e subtraindo de $x_1 a_1 + \ldots + x_p a_p = b$ temos que

$$(x_1 - \epsilon y_1) a_1 + \ldots + (x_p - \epsilon y_p) a_p = b$$

Prova de i)

A equação acima é válida para todo ϵ e para cada ϵ as componentes $x_i - \epsilon y_i$ correspondem a uma solução do sistema $Av = b$ (apesar de que $x_i - \epsilon y_i \geq 0$ pode ser violada). Seja

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prova de i)

Portanto para qualquer ϵ, $x - \epsilon y$ é uma solução do sistema $Av = b$. Lembrando que pelo menos um $y_i > 0$, definimos

$$\epsilon^* = \min\{\frac{x_i}{y_i}; y_i > 0\} \Longrightarrow \frac{x_j}{y_j} - \epsilon^* \geq 0$$

para todo j tal que $y_j > 0$. Logo $x - \epsilon^* y$ é uma solução factível. Note que

1. se $y_j < 0$ então $x_j - \epsilon^* y_j > 0$
2. se $y_j = 0$ então $x_j - \epsilon^* y_j > 0 = x_j \geq 0$
3. se $y_j > 0$ então $x_j - \epsilon^* y_j = y_j(\frac{x_j}{y_j} - \epsilon^*) \geq 0$

Note também que pelo menos un dos $x_j - \epsilon^* y_j$ será igual a zero, ou seja, $x - \epsilon^* y$ tem no máximo $p - 1$ variáveis estritamente maior que zero (> 0). Repetindo esse procedimento pode-se eliminar variáveis positivas até chegarmos ao Caso 1, completando a prova.

Ilustrando a Prova de i)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Logo $\{a_1, a_2, a_3\}$ são LD, onde

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$Ax = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{8}{3}a_3 = b$$

Ilustrando a Prova de i)

Escolhendo

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

temos que

$$Ay = a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0$$

Ilustrando a Prova de i)

Logo para qualquer $\epsilon > 0$ temos $A(x - \epsilon y) = b$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Temos também que

$$\epsilon^* = \min\{\frac{x_i}{y_i}; y_i > 0\} = \min\{(1/3)/1, (8/3)/2\} = \frac{1}{3}$$

Ilustrando a Prova de i)

$$x - \epsilon^* y = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

que corresponde a uma solução básica factível.

Prova de ii)

Suponha que x seja uma solução ótima factível e, como na prova de i), tenha exatamente p variáveis estritamente maior que zero, por conveniência as p primeiras $x_1 > 0, \ldots, x_p > 0$. Novamente temos 2 casos, Caso 1 e Caso 2. Caso 1 corresponde à situação em que $\{a_1, \ldots, a_p\}$ são LI e é exatamente o que foi visto anteriormente. Caso 2 considera que $\{a_1, \ldots, a_p\}$ são LD e segue o mesmo raciocínio anterior, mas deve-se mostrar que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, $x - \epsilon y$ é uma solução ótima. Note que

$$c'(x - \epsilon y) = c'x - \epsilon c'y$$

Prova de ii)

Defina

$$\epsilon^+ = \min\{\frac{x_i}{y_i}; y_i > 0\} > 0, \quad \epsilon^- = \min\{-\frac{x_i}{y_i}; y_i < 0\} > 0$$

Para $|\epsilon| \leq \min\{\epsilon^+, \epsilon^-\}$ temos que $x - \epsilon y$ é uma solução factível (isto é, $A(x - \epsilon y) = b$ e $x - \epsilon y \geq 0$). Portanto devemos ter $c'y = 0$ caso contrário com ϵ com sinal apropriado teríamos

$$c'(x - \epsilon y) = c'x - \epsilon c'y < c'x$$

o que contraria a otimalidade de x. O resto da prova segue a prova de ii).

Ilustrando a Prova de ii)

Considere x, y como anteriormente e

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifique que $c'x = 1/2$, e $c'y = 0$.

Controle Ótimo Escalar

Considere o sistema dinâmico escalar

$$x(k+1) = \frac{1}{3}x(k) + 4u(k), \quad x(0) = 9$$

Deseja-se obter $x(3) = 0$ minimizando o esforço de controle, ou seja,

$$\min \quad |u(0)| + |u(1)| + |u(2)|.$$

Obtenha o controle ótimo.