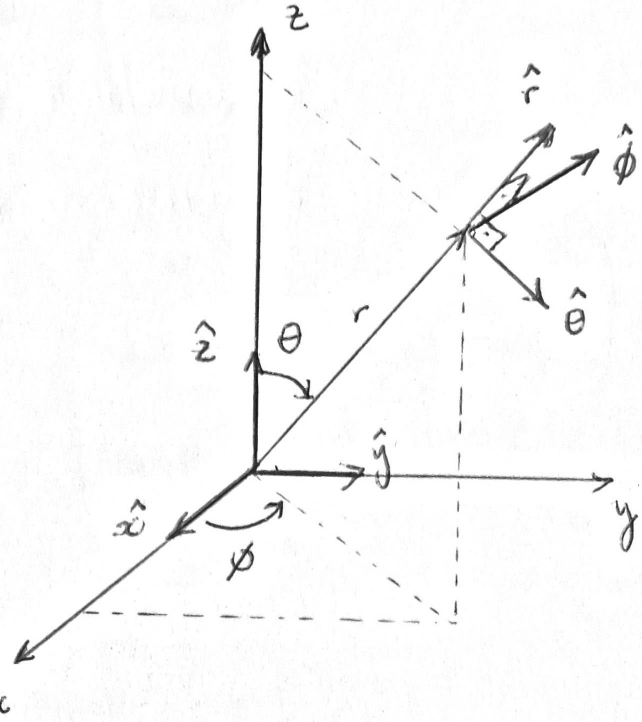
Operadores diferenciais em coordenadas esféricas

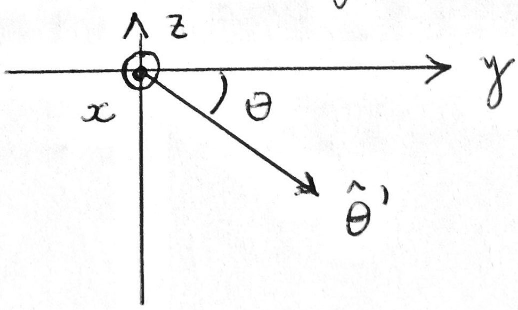
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



Relação entre os versores de base

$$\boxed{\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\ \hat{x} + \sin\theta\sin\phi\ \hat{y} + \cos\theta\ \hat{z}}$$

Podemos obter o versor $\hat{\theta}$ girando o seguinte versor $\hat{\theta}'$



em torno do eixo z de ângulo $\alpha = -(\pi/2 - \phi) = \phi - \pi/2$

$$\hat{\theta}' = \cos\theta\ \hat{y} - \sin\theta\ \hat{z}$$

Logo ②

$$\hat{\theta} = \underbrace{R}_{\text{matriz de rotação}} \hat{\theta}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\boxed{\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}}$$

Por fim

$$\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$$

$$= (\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z})$$

$$\times (\cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z})$$

Logo

$$\boxed{\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}}$$

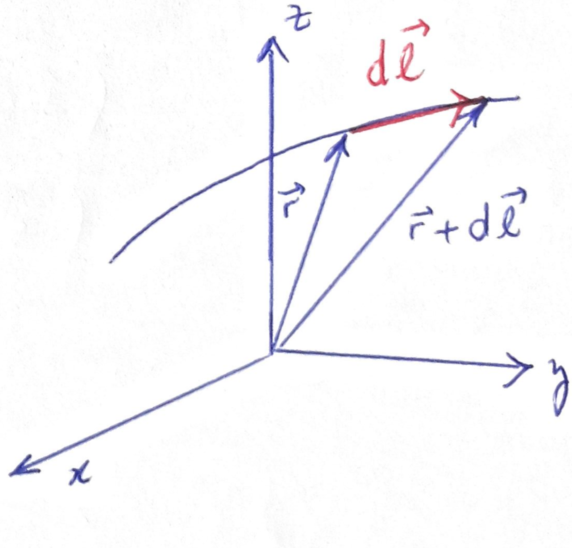
Resumindo

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{cases}$$

Em forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz ortogonal (provar)}} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

Elemento de linha



$(r,\theta,\phi) \longrightarrow (r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

Elemento de volume

$$d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

* gradiente

Em coordenadas cartesianas, para $f(x,y,z)$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

de modo que a variação de f ao longo de um deslocamento infinitesimal $d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$ é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (\vec{\nabla} f)\cdot(d\vec{l})$$

Em coordenadas esféricas com $f(r,\theta,\phi)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}r\,d\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}r\sin\theta\,d\phi$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)}_{=\vec{\nabla} f}\cdot\underbrace{\left(dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}\right)}_{=d\vec{l}}$$

* divergente

Em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

O divergente satisfaz um teorema fundamental

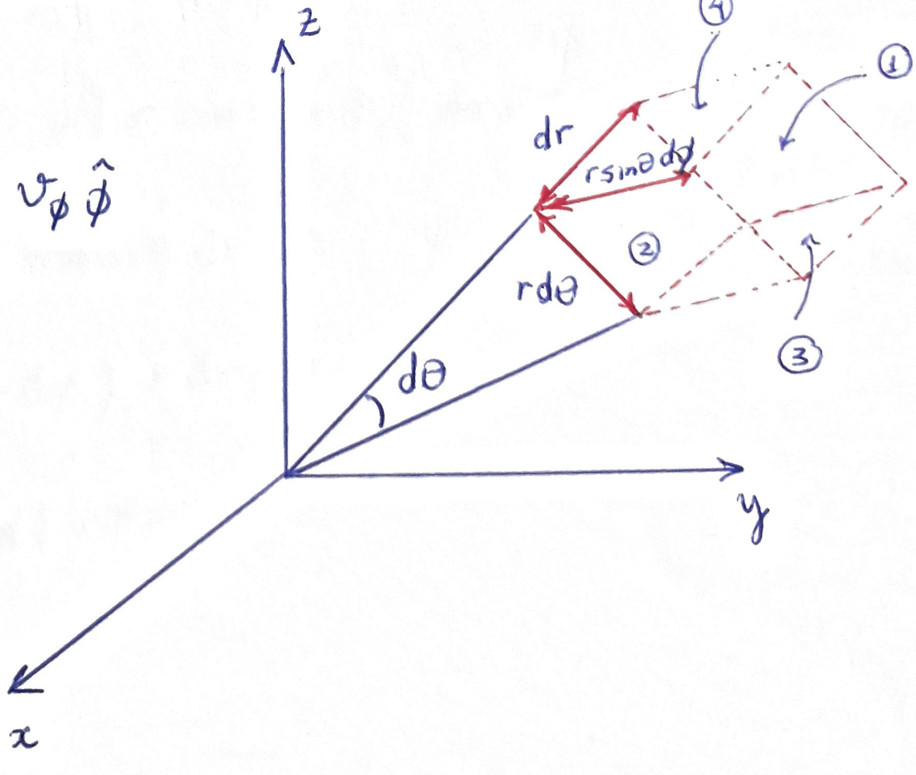
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, d\tau = \oint_S \vec{v}\cdot d\vec{a}$$

teorema de Gauss
" " Green
" da divergência

S → fronteira de V

Podemos usar este teorema, válido em qualquer sistema de coordenadas, para obter $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ em coordenadas esféricas

$$\vec{v}(r,\theta,\phi) = v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta} + v_\phi\,\hat{\phi}$$



$$d\vec{a}_1 = (r+dr)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

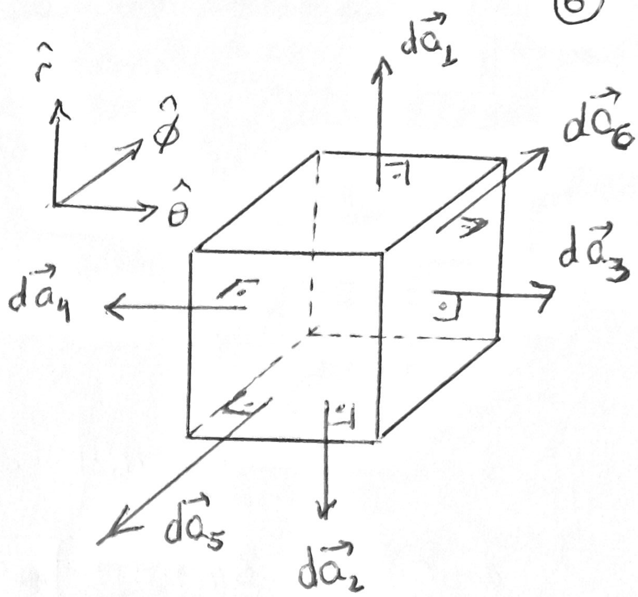
$$d\vec{a}_2 = -r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

$$d\vec{a}_3 = r \sin(\theta + d\theta) \, dr \, d\phi \, \hat{\theta}$$

$$d\vec{a}_4 = -r \sin\theta \, dr \, d\phi \, \hat{\theta}$$

$$d\vec{a}_5 = r \, dr \, d\theta \, \hat{\phi}$$

$$d\vec{a}_6 = -r \, dr \, d\theta \, \hat{\phi}$$



Portanto

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_1 = v_r(r+dr, \theta, \phi)(r+dr)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_2 = -v_r(r, \theta, \phi) \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_3 = v_\theta(r, \theta + d\theta, \phi) \, r \sin(\theta + d\theta) \, dr \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_4 = -v_\theta(r, \theta, \phi) \, r \sin\theta \, dr \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_5 = v_\phi(r, \theta, \phi + d\phi) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_6 = -v_\phi(r, \theta, \phi) \, r \, dr \, d\theta$$

Então, para o volume infinitesimal em questão (7)

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, d\tau$$

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{6} \vec{v} \cdot d\vec{a}_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) \sin\theta \, dr d\theta d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \, v_\theta) \, r dr d\theta d\phi$$

$$+ \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \, r dr d\theta d\phi$$

$$= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$\times \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi}_{= d\tau}$$

Portanto, em coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

De maneira análoga, o teorema de Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

P → curva suporte de S

pode ser usado para mostrar que em coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\phi)\right]\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

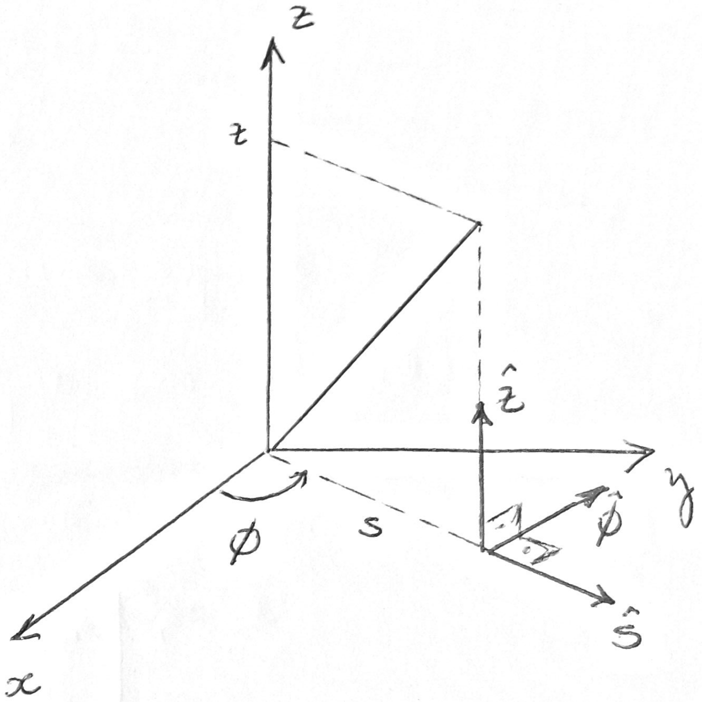
O laplaciano, por sua vez, fica

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f)$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} \hat{s} = \cos\phi\, \hat{x} + \sin\phi\, \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$



Elemento de linha

$$d\vec{l} = ds\, \hat{s} + s\, d\phi\, \hat{\phi} + dz\, \hat{z}$$

Elemento de volume

$$d\tau = s\, ds\, d\phi\, dz$$

Operadores diferenciais

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{s}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{s} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Função delta de Dirac

Tome o campo vetorial

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2} = v_r \, \hat{r}$$

Para $r \neq 0$, este campo têm a seguinte divergência

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0$$

Por outro lado, para um volume esférico em torno de $r=0$:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, d\tau = \oint_S \left(\frac{\hat{r}}{R^2} \right) \cdot da \, \hat{r} = \frac{1}{R^2} \underbrace{\oint_S da}_{4\pi R^2} = 4\pi$$

S ↳ esfera de raio R

A chamada função delta (δ) de Dirac, em uma dimensão, é definida através das seguintes propriedades

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Uma das operações mais comuns envolvendo funções δ é a seguinte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx$$

onde f é uma função contínua.

Como $\delta(x) = 0$ p/ $x \neq 0$, então p/ ϵ infinitesimal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\, f(x)\, dx \simeq f(0) \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\, dx}_{=1}$$

$$= f(0)$$

Ou seja, a integral acima atua efetivamente como um filtro.

É possível definir $\delta(x)$ de forma mais rigorosa como o limite de uma sequência de funções $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, cuja área está fixa ($= 1 \ \forall n$), mas sua largura vai a zero quando $n \to \infty$

$$\delta(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Exemplo 1:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-x^2/2\sigma_n^2} \quad \text{com} \quad \lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0$$

Pode-se tomar, por exemplo, $\sigma_n = 1/n$

Perceba que, nesse caso, as gaussianas estão normalizadas tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = 1 \quad \forall n .$$

Exemplo 2:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1/n \\ n/2, & |x| < 1/n \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,g(x)\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}\,g(x)dx = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} g(x)\,dx$$

Usando o teorema do valor médio, deve existir um $\alpha \in [-1/n, 1/n]$ tal que

$$\int_{-1/n}^{1/n} g(x)\,dx = \frac{2}{n}\,g(\alpha)$$

Logo, no limite $n \to \infty$, $\alpha \to 0$ e $g(\alpha) \to g(0)$.

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,g(x)\,dx = g(0)$$

Outros exemplos:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\,\frac{\sin^2(nx)}{x^2}$$

De modo mais geral

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq a \\ \infty, & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{com} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, dx = 1$$

Nesse caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a)$$

Direto da definição de $\delta(x)$, temos

$$\delta(-x) = \begin{cases} 0, & -x \neq 0 \\ \infty, & -x = 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)\, dx = -\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Logo

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(Kx) = \begin{cases} 0, & Kx \neq 0 \\ \infty, & Kx = 0 \end{cases} \quad p/\ K \neq 0$$

Qual a relação entre $\delta(Kx)$ e $\delta(x)$?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Kx)\, dx \underset{u = Kx}{\overset{K>0}{=}} \frac{1}{K} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\, du = \frac{1}{K}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Kx)\, dx \underset{K<0}{=} \frac{1}{K} \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(u)\, du = -\frac{1}{K}$$

Então $\delta(Kx) = \dfrac{1}{|K|}\, \delta(x)$

Delta de Dirac em 3 dimensões

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z)$$

$$\delta^3(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{0} \\ \infty, & \vec{r} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\int \delta^3(\vec{r})\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = 1$$

$$\int f(\vec{r})\, \delta^3(\vec{r}-\vec{a})\, d\tau = f(\vec{a})$$

Vemos então que a função $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$ possui todas as propriedades de uma função $\delta^3(\vec{r})$.

Vimos que $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$ em todos os pontos, exceto na origem, onde há uma singularidade. Além disso, a integral de volume numa região contendo a origem é igual a 4π

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, d\tau = \oint_S \vec{v}\cdot d\vec{a} = 4\pi$$

Portanto

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{r})}$$

Para $\vec{\imath} = \vec{r} - \vec{r}'$, com $\vec{r}'$ fixo

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2} \right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{\imath})}$$

Veja que

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\imath}\right) = \vec{\nabla}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2}\left[2(x-x')\hat{x} + 2(y-y')\hat{y} + 2(z-z')\hat{z}\right]$$

$$= -\frac{\vec{\imath}}{\imath^3} = -\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}$$

Então

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \frac{1}{\imath} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{\imath} \right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{\imath})$$

Ou seja

$$\boxed{\nabla^2 \left(\frac{1}{\imath} \right) = -4\pi\, \delta^3(\vec{\imath})}$$