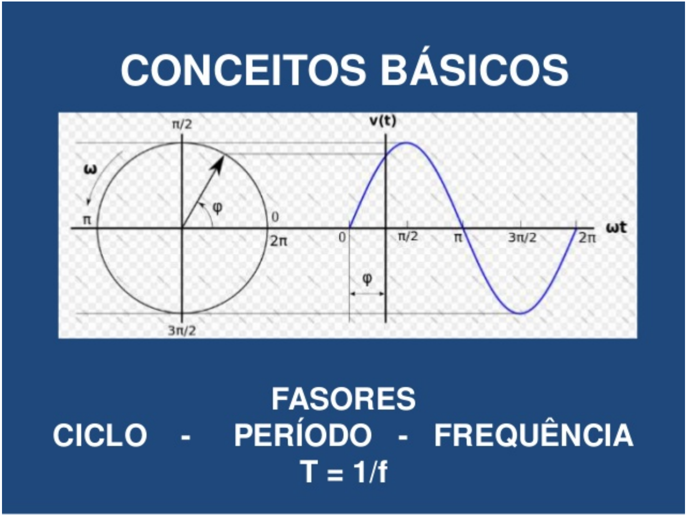
Física Experimental III

Primeiro semestre de 2020

Aula 4 - Experimento 2

Página da disciplina:
https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=73158

Setembro de 2020


CONCEITOS BÁSICOS
v(t)
π/2
ω
φ
π
0
2π
3π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
ωt
φ
FASORES
CICLO - PERÍODO - FREQUÊNCIA
T = 1/f

Sumário

Sumário

Sumário

Objetivos do experimento

- Estudar circuitos de corrente alternada
  - Estudar filtros de frequência
    - Filtro RC passa baixa e passa alta
    - Filtro passa banda
  - Aplicação dos filtros
    - Decomposição de Fourier
  - Estudar circuitos RLC
    - Ressonância em circuitos RLC

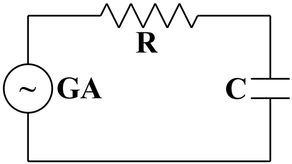
Cronograma

- 4 atividades
  - Atividade 1
    - Estudo e caracterização de um filtro RC
  - Atividade 2
    - Estudo e caracterização de um filtro passa banda
  - Atividade 3
    - Estudo de um filtro como circuito integrador e diferenciador
  - Atividade 4
    - Estudo de um circuito RLC

Sumário

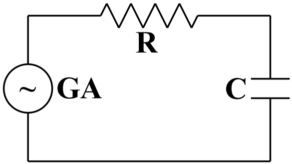
Circuito RLC

- Primeiras atividades - Filtro RC

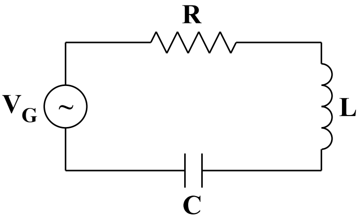


Circuito RLC

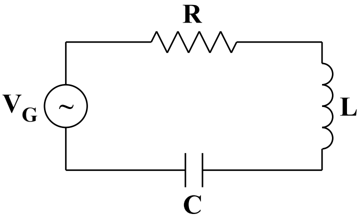
- Primeiras atividades - Filtro RC



- Adicionar um novo elemento - indutor
  - Como isso altera o comportamento do circuito?



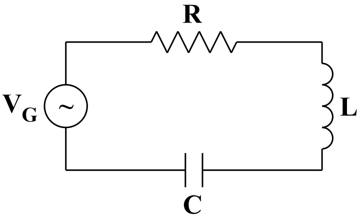
Análise do Circuito RLC



- Lei das malhas

$$V_G = V_R + V_C + V_L$$

Análise do Circuito RLC

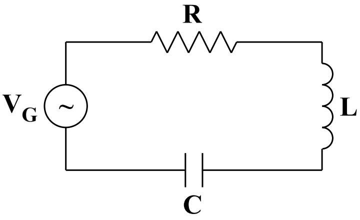


- Lei das malhas

$$V_G = V_R + V_C + V_L$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Análise do Circuito RLC



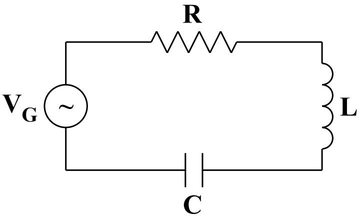
$$V_R(t) = R\, i(t) = R\, \frac{dq(t)}{dt}$$

- Lei das malhas

$$V_G = V_R + V_C + V_L$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Análise do Circuito RLC



$$V_R(t) = R\,i(t) = R\,\frac{dq(t)}{dt}$$

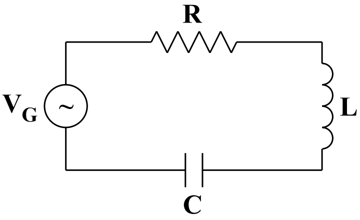
$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

- Lei das malhas

$$V_G = V_R + V_C + V_L$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Análise do Circuito RLC



$$V_R(t) = R\,i(t) = R\,\frac{dq(t)}{dt}$$

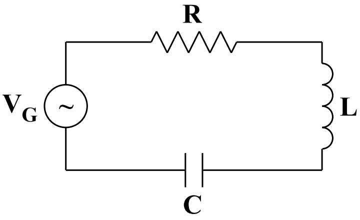
$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$V_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} = L\,\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

- Lei das malhas

$$V_G = V_R + V_C + V_L$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$



$$V_R(t) = R\, i(t) = R\, \frac{dq(t)}{dt}$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$V_L(t) = L\, \frac{di(t)}{dt} = L\, \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

- Lei das malhas

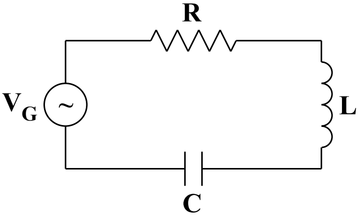
$$V_G = V_R + V_C + V_L$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{V_0}{L}\cos(\omega t)$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{V_0}{L}\cos(\omega t)$$

- **Solução homogênea:** comportamento transitório do circuito (quando ele é ligado ou desligado): oscilador harmônico amortecido
- **Solução particular:** comportamento em regime estacionário, depois que o comportamento transitório desaparece: oscilador forçado



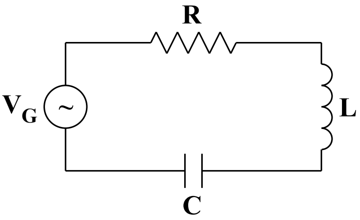
Solução usando notação complexa

- Impedância total do circuito

$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C$$

$$\hat{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

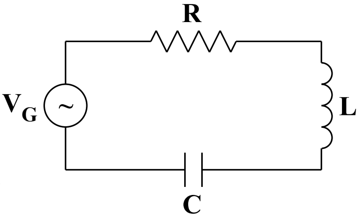
$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



Solução usando notação complexa

- Escrevendo a impedância como:

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z_0\, \mathrm{e}^{j\phi}$$



- com

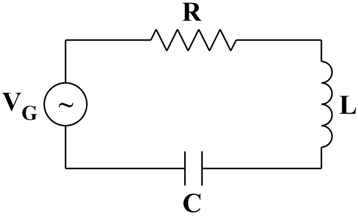
$$Z_0 = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[\hat{Z}]}{\mathrm{Re}[\hat{Z}]}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)$$

Corrente através do circuito RLC

- Escrevendo a corrente no circuito como:

$$\hat{i}(t) = \frac{\hat{V}_G}{\hat{Z}} = i_0\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \phi_i)}$$



- com

$$\hat{V}_G = V_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$\hat{i}(t) = \frac{V_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}}{Z_0\,\mathrm{e}^{j\phi}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \phi)}$$

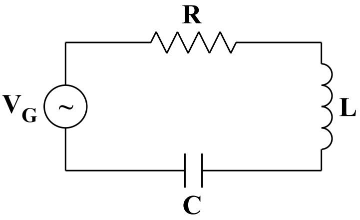
Corrente através do circuito RLC

- Escrevendo a corrente no circuito como:

$$\hat{i}(t) = \frac{\hat{V}_G}{\hat{Z}} = i_0\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \phi_i)}$$

- com

$$\hat{V}_G = V_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$$

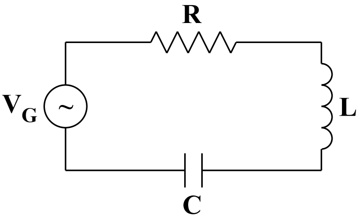


$$\hat{i}(t) = \frac{V_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}}{Z_0\,\mathrm{e}^{j\phi}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \phi)}$$

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Tensão sobre cada elemento do circuito RLC

- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:



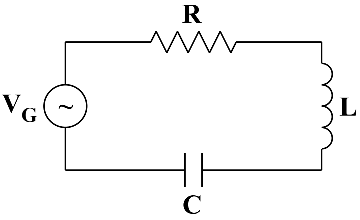
$$\hat{V}_X = \hat{i}_X \hat{Z}_X$$

- Para o resistor

$$\hat{Z}_R = R \qquad \text{e} \qquad \hat{V}_R = R\, i_0\, \mathrm{e}^{j(\omega t - \phi)}$$

- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i}_X \hat{Z}_X$$



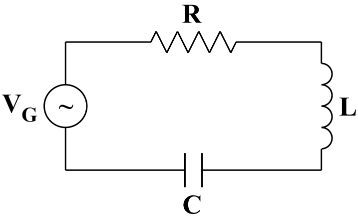
- Para o indutor

$$\hat{Z}_L = \omega L \, \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \text{e} \qquad \hat{V}_L = \omega L \, i_0 \, \mathrm{e}^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Tensão sobre cada elemento do circuito RLC

- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i}_X \hat{Z}_X$$

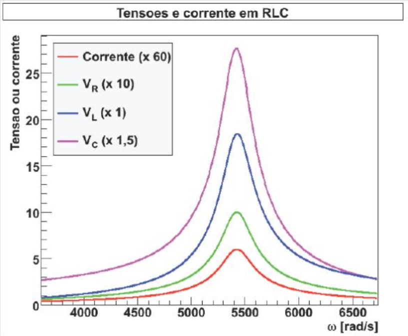


- Para o capacitor

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad \text{e} \qquad \hat{V}_C = \frac{i_0}{\omega C} e^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

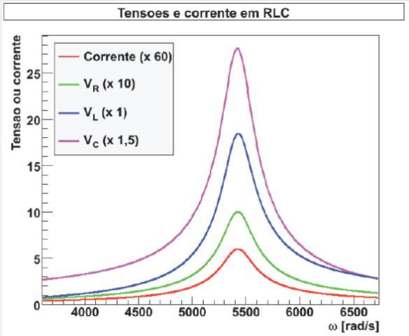
O que podemos prever sobre o circuito?

- Sabemos, teoricamente, como calcular as tensões e corrente no circuito
- Sabemos os valores típicos de capacitores, indutores e resistores disponíveis no laboratório didático
- Podemos fazer previsões teóricas



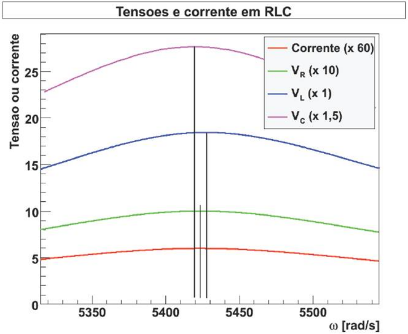
O que podemos investigar?

- A corrente e as tensões apresentam um pico em um valor de frequência bem definido $\Rightarrow$ RESSONÂNCIA
- A posição do pico é a mesma para todos sinais?
- O que define a posição deste pico?
- O que define a altura e largura deste pico?
- O sistema real se comporta como a previsão teórica?



O que podemos investigar?

- A posição do pico é a mesma para todos sinais?
- O que define a posição deste pico?



Ressonância em corrente

$$\hat{i}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \, \mathrm{e}^{j(\omega t - \phi)}$$

- Condição para corrente máxima

$$\frac{di_0}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\omega}\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] = 0$$

- Frequência de ressonância

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ressonância em carga

- Tensão no capacitor

$$\hat{V}_C = \frac{i_0}{\omega C}\,\mathrm{e}^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V_0}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Condição para tensão máxima

$$\frac{dV_{C0}}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\omega}\left[\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right] = 0$$

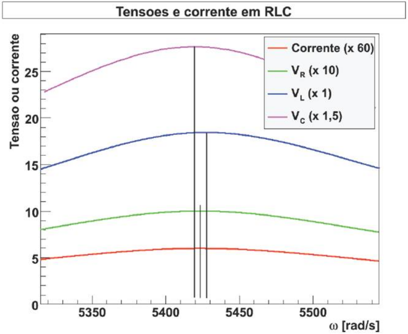
- Frequência de ressonância

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Frequências de ressonância

- É possível distinguir as frequências de ressonância em carga e corrente?

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

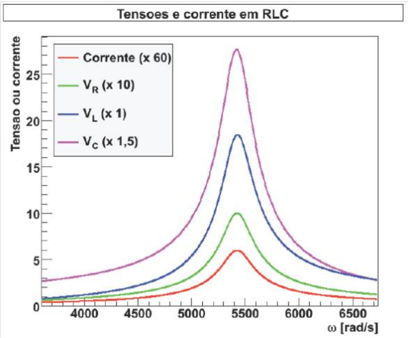


$$\omega_0 - \omega_1 \sim \frac{5}{5000} \sim 0.01\%$$

- Se há limitações experimentais, a diferença entre as frequências de ressonância é difícil de ser estudada

O que podemos investigar?

- O que define a altura e largura deste pico?



Fator de qualidade

- Fator de qualidade (Q) do circuito

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

  - $\Delta\omega$ é a largura do pico de ressonância em corrente a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da altura máxima

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi\frac{U}{\Delta U}$$

  - U é a energia armazenada no sistema na condição de ressonância e ΔU é a energia dissipada pelo sistema durante um período de oscilação

Fator de qualidade

- Fator de qualidade (Q) do circuito

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi\frac{U}{\Delta U}$$

- U é a energia armazenada no sistema na condição de ressonância

$$U = \frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}CV_{C0}^2$$

  - Energia armazenada no campo magnético do indutor ou no campo elétrico do capacitor

- ΔU é a energia dissipada pelo sistema durante um período de oscilação

$$\Delta U = PT = \frac{1}{2}Ri_0^2 T = \frac{1}{2}Ri_0^2\frac{2\pi}{\omega_0}$$

  - Energia dissipada no resistor em um período

Fator de qualidade

- Fator de qualidade (Q) do circuito

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi \frac{U}{\Delta U}$$

- Substituindo

$$Q = 2\pi \frac{L i_0^2}{2} \frac{2\omega_0}{2\pi R i_0^2}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

O que podemos investigar?

- A corrente e as tensões apresentam um pico em um valor de frequência bem definido $\Rightarrow$ RESSONÂNCIA
- A posição do pico é a mesma para todos sinais?
- O que define a posição deste pico?
- O que define a altura e largura deste pico?
- O sistema real se comporta como a previsão teórica?
- A frequência de ressonância é ligeiramente diferente se observarmos a corrente, tensão no capacitor ou indutor
  - Contudo, é muito difícil quantificar experimentalmente
  - CONCLUSÃO: Vamos medir apenas uma curva de ressonância e tentar aprender o máximo possível com ela
    - ★ Ressonância em corrente
- O que podemos obter da curva de ressonância?
  - Frequência e largura
  - Fator de qualidade (Q)
    - ★ Energia armazenada e dissipada no circuito.

Resistências no circuito

- Na condição de ressonância em corrente ($\omega = \omega_0$)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad Z_{Res} = R$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{Res} = 0$$

  - Corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo
- Nessa condição

$$V_G = Ri_0$$

  - V_G é a tensão de pico aplicada pelo gerador e i_0 é a corrente de pico no circuito
  - Medindo-se V_G e i_0 na ressonância pode-se obter a resistência total R do circuito