Dinâmica Relativística - (I)

Momento e Energia : são grandezas conservadas em qualquer processo físico.

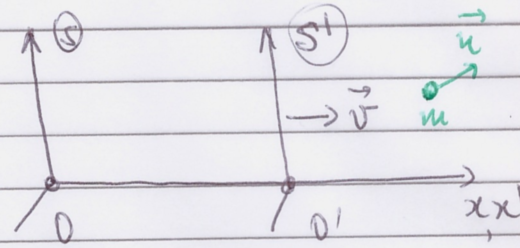
- Conservação de $\vec{p}$ $\longleftrightarrow$ invariância por translação ESPACIAL.

- Conservação de E $\longleftrightarrow$ invariância por translação TEMPORAL.

Essas leis de conservação não podem depender do referencial!

A relatividade restrita deve refletir esses princípios.

(1) MOMENTO LINEAR



(A) Clássico:

$$\boxed{\vec{u}' = \vec{u} - \underbrace{\vec{v}}_{(=cte)}}$$ Transf. Galileu

= Lei de adição de velocidades (Galileu)

Então, se houver mudanças no momento linear da partícula sob ação de uma força externa,

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{u} \\ \vec{p}' = m\vec{u}' \end{cases} \qquad \vec{F}_{ext} = \Delta\vec{p}/\Delta t$$

Em S

$$\Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{u}) = m\Delta\vec{u}$$

Em S'

$$\Delta\vec{p}' = \Delta(m\vec{u}') = m\,\Delta(\Delta\vec{u} - \underbrace{\Delta\vec{v}}_{=0})$$

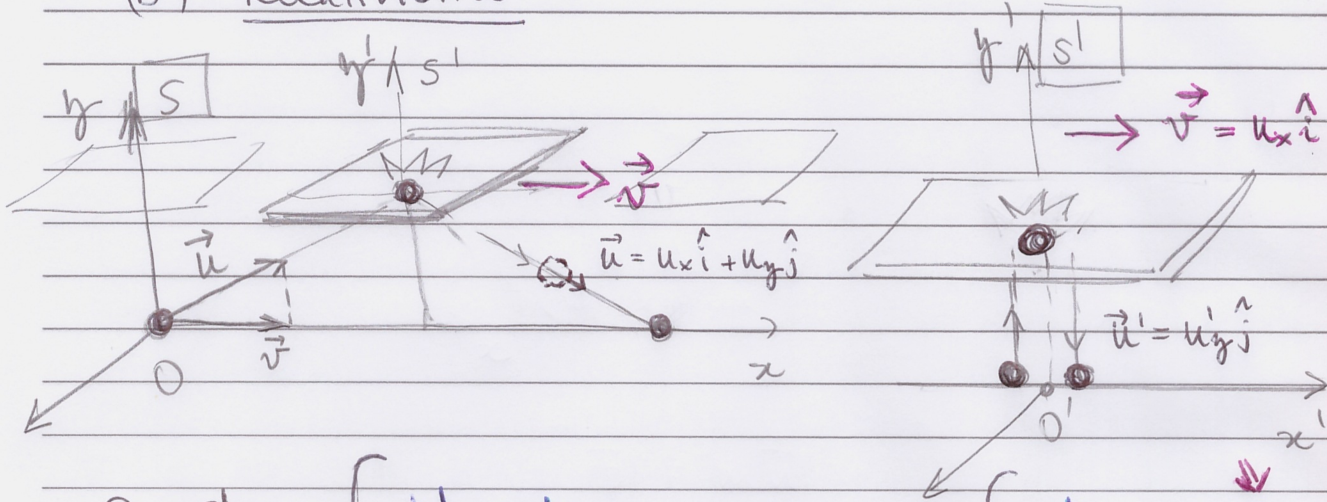
$$= m\Delta\vec{u}$$

Assim:

$$\left[\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}'\right] \quad ✓$$

[Em particular, na ausência de forças externas $\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}' = 0$]

(B) Relativístico



Em S'

T.L. (vel.)

$$\begin{cases} u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - u_x v / c^2\right)} \\[2ex] u'_x = \dfrac{u_x - v}{\left(1 - u_x v / c^2\right)} \end{cases} \underset{v = u_x}{=} \begin{cases} \dfrac{u_y}{\gamma\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{= 1/\gamma^2}} = \gamma u_y \\[2ex] 0 \end{cases}$$

Momento deve ser conservado nos dois referenciais.

No caso da troca de momento com a mesa: (meio externo) $\Delta \vec{p}\,' = \Delta \vec{p}$

$$\begin{cases} \text{Em } x: \quad \Delta p'_x \overset{\text{em repouso}}{=} 0 \ ; \quad \Delta p_x \overset{\vec{v} = \text{cte}}{=} 0 \\[2ex] \text{Em } y: \quad \underbrace{\Delta p'_y}_{2p'_y} = \underbrace{\Delta p_y}_{2p_y} \end{cases}$$

* [Em y : $\Delta(m u'_y) \overset{?!}{=} \Delta(m u_y)$] *

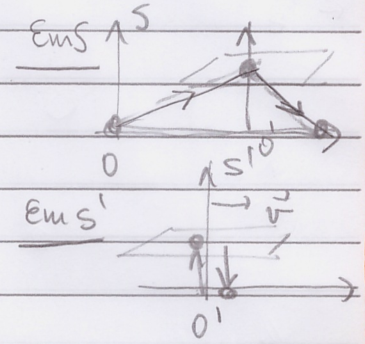
Afinal... $\Delta u'_y \neq \Delta u_y$ ... T.L. ... $\left[u'_y = \gamma u_y\right]$

" OPÇÕES " 1) Abandonar a lei de conservação do momento ??!

ou ... 2) Determinar a grandeza correta para representar o momento.

Voltando à expressão $*[\qquad]*$

admitindo que : $m \to m_0$ em $\vec{p}_y{}'$



$$\Delta(m_0 u_y) = \Delta(m u_y)$$

T.L. (vel) $\quad \Delta(m_0 \gamma u_y) = \Delta(m u_y)$

$$m_0 \gamma = m$$

m_0 : "massa de repouso"

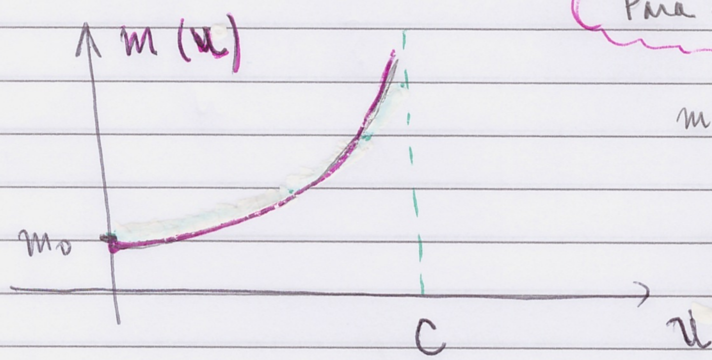
partícula em repouso no eixo x.

$$\Rightarrow \boxed{m = m_0 . \gamma} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Note que $\quad m$ = massa da partícula em movimento (na direção x) (S)

m_0 = massa em repouso (na direção x) (S')

Para $v \gg u_y \Rightarrow u \sim v$



$$m = m(u) = m_0 \gamma(u)$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

MOMENTO : $\boxed{\vec{p} = m(u)\,\vec{u}}$ $\qquad m = m_0 \gamma(u)$

= quantidade conservada em qualquer regime!

spiral®

Exemplo: Uma partícula com massa de repouso m_0 encontra-se inicialmente com $|\vec{v}| = v = 0{,}4\,c$. Se a velocidade é duplicada, de quanto varia seu momento?

- classicamente: $\left.\begin{aligned} p_i^{class} &= m_0 v \\ p_f^{class} &= m_0 \cdot 2v \end{aligned}\right\} \dfrac{p_f^{class}}{p_i^{class}} = 2$

- regime relativístico:

$$\left.\begin{aligned} p_i^R &= \underbrace{m_0 \gamma(v)}_{m(v)} \cdot v = 0{,}44\, m_0 c \\ p_f^R &= \underbrace{m_0 \gamma(2v)}_{m(2v)} \cdot 2v = 1{,}33\, m_0 c \end{aligned}\right\} \frac{p_f^R}{p_i^R} = 3$$

(2) ENERGIA

Energia cinética = trabalho realizado para levar um corpo desde o repouso até a velocidade final v, sob ação de uma força externa.

A massa varia no processo?

$$E_c = \int_0^s \underbrace{[F]}_{\text{RESULTANTE DE todas as forças}} \cdot ds = \int_0^s \left[\frac{d}{dt'}(mv)\right] \underbrace{ds}_{v\,dt'} =$$

$$= \int_0^{t_v} \left[\frac{d}{dt'}[mv]\right] v\,dt' \quad \text{(mudança de variável)}$$

mas $v \cdot \left[\dfrac{d}{dt'}[mv]\right] = v \cdot \left(v\dfrac{dm}{dt'} + m\dfrac{dv}{dt'} \right) =$

$$= v^2 \frac{dm}{dt'} + \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt'} \quad *$$

Usando agora a expressão para a massa $m(v)$:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \rightarrow v^2 = c^2\left[1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right]$$

Substituindo na expressão *

$$v \cdot \left[\frac{d}{dt'}[mv]\right] = c^2 \left\{ \left[1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right]\left(\frac{dm}{dt'}\right) - \frac{m}{2}\, m_0^2 \left(\frac{d}{dt'}\frac{1}{m^2}\right) \right\}$$

$$\frac{d}{dt'}\frac{1}{m^2} = -2\frac{1}{m^3}\left(\frac{dm}{dt'}\right)$$

$$v \cdot \left[\frac{d}{dt'}[mv]\right] = c^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right]\left(\frac{dm}{dt'}\right) - \frac{m}{2}\, m_0^2 \frac{(-2)}{m^3}\left(\frac{dm}{dt'}\right)\right\}$$

$$= c^2 \left\{ \left[1 - \cancel{\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}\right] + \cancel{\frac{m_0^2}{m^2}} \right\}\left(\frac{dm}{dt'}\right) = c^2 \underbrace{\frac{dm}{dt'}}$$

Então:

$$E_c = \int_0^t \underbrace{c^2 \frac{dm}{dt'}}\, dt' = c^2\left[m(t) - m(0)\right]$$

teorema fundamental cálculo

$$E_c = c^2\left[m(v) - m_0\right]$$

$v(t)$ $\qquad m(v=0) = m_0$

$$\boxed{E_c = mc^2 - m_0 c^2}$$

Equivalência: massa / energia

E_T = energia total da partícula $= mc^2$

E_0 = "energia de repouso" da partícula $= m_0 c^2$

$$\boxed{mc^2 = m_0 c^2 + E_c}$$

Einstein 1905

$$m = m(v) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$