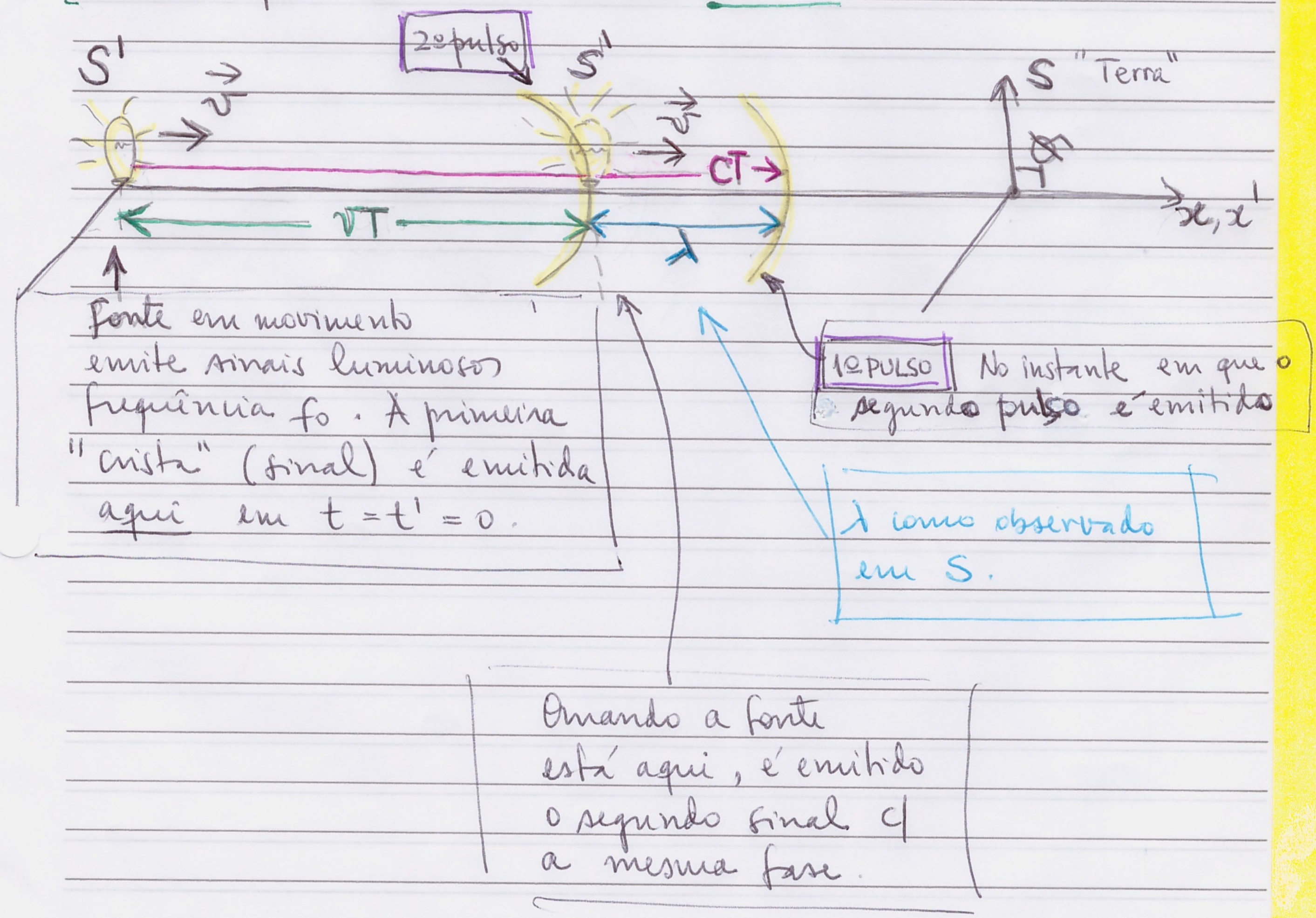
1/

Exercícios (Cinemática Relativística)

A) Efeito Doppler para ondas e-m.

Considere uma fonte que emite pulsos de luz periodicamente, com uma frequência $f_0 = 1/T_0$, onde T_0 é o período da fonte em seu sistema próprio S' (= intervalo de tempo entre duas "frentes" da onda). A fonte no sistema S' move-se com velocidade $\vec{v} = v\hat{\imath}$ em direção e sentido ao observador no sistema S. Determine a frequência f do sinal medida por esse observador em S.



S T Q Q S S D

Cálculo de f

1ª parte onda eletromagnética senoidal

Em S : $\lambda f = c \rightarrow f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{c}{cT - vT} =$

$$f = \frac{1}{T}\,\frac{c}{c-v}$$

Note : $f \neq 1/T$

2ª parte : T é o intervalo de tempo medido pelo observador em S entre 2 pulsos (emissão de duas frentes de onda com mesma fase).

$$\underset{\text{(dilatado em relação a } T_0)}{T} = T_0 \cdot \gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Com isso: $f = \dfrac{1}{T_0} \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} \cdot \dfrac{1}{1 - v/c} =$

$$= \frac{1}{T_0}\,\frac{\sqrt{(1-v/c)(1+v/c)}}{1-v/c} = \underbrace{\frac{1}{T_0}}_{= f_0}\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

$$\boxed{f = f_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}} \qquad \boxed{f > f_0}$$

(qdo a fonte se aproxima do observador)

Analogamente

$$\boxed{f = f_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}} \qquad \boxed{f < f_0}$$

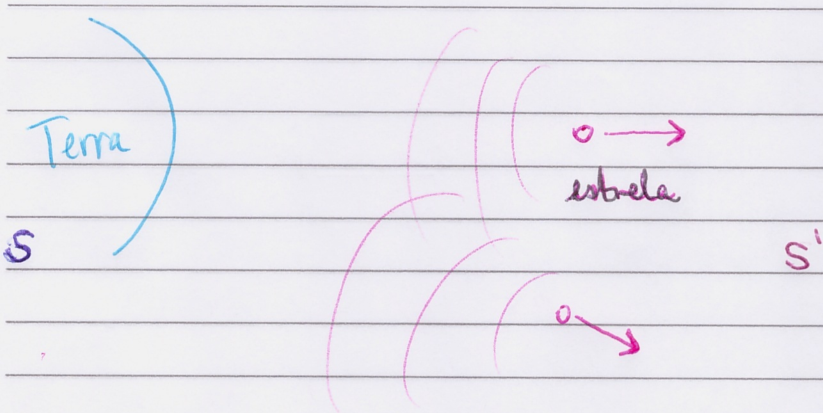
(qdo a fonte se afasta do observador)

Aplicações:

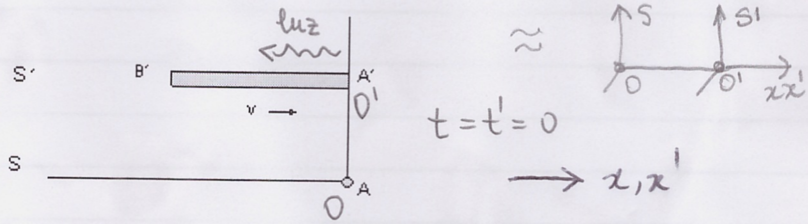
- telecomunicações
  (GPS Marinha americana...)

- expansão do Universo

"red - shift"



1 - Uma barra de comprimento próprio l_0 move-se com velocidade constante v relativamente ao sistema **S**. A extremidade A' da barra passa pelo ponto A de **S** no instante $t = t' = 0$ e neste instante é emitido de A' um sinal de luz que viaja de A' para B'.



a) Em qual instante t_0' medido em **S´**, em repouso em relação à barra, o sinal chega em B'?

b) Em que instante t_1, medido em **S**, o sinal chega em B'?

c) Em que instante t_2, medido em **S**, a extremidade B' da barra passa pelo ponto A?

a) $t_0' = l_0/c$ em S'

b) t_1: instante, medido em S, em que o sinal alcança B':

T.L (transformações de Lorentz) para o tempo:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'}{c^2}\cdot v\right) \qquad \begin{cases} t' = t_0' = l_0/c \\ x' = -l_0 \\ t = t_1 \end{cases}$$

Portanto: $t_1 = \gamma\cdot\left(t_0' - \frac{l_0}{c^2}\cdot v\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cdot\left(\frac{l_0}{c} - \frac{l_0}{c}\cdot\frac{v}{c}\right)$

$$\boxed{t_1 = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}} < \frac{l_0}{c} \; (= t_1')$$

c) T.L: $t = \gamma\cdot\left(t' + \frac{v}{c^2}\cdot x'\right) \qquad \begin{cases} t = t_2 \\ t' = t_2' = l_0/v \\ x' = -l_0 \end{cases}$

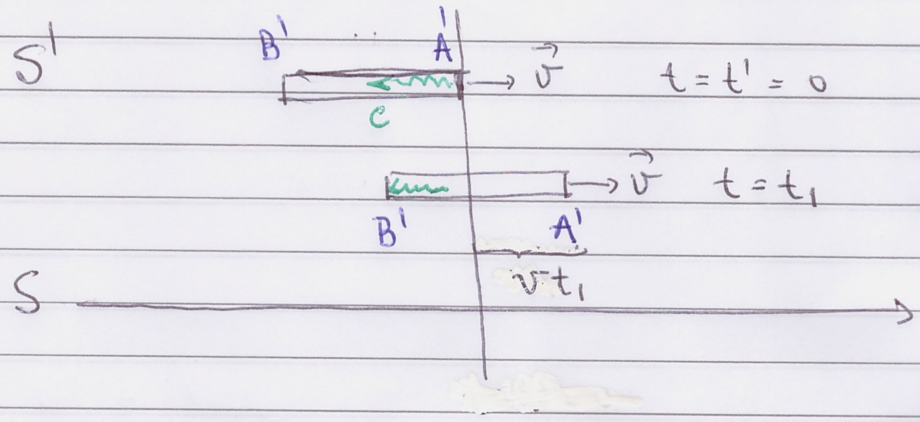
$$\Rightarrow t_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cdot\left(\frac{l_0}{v} - \frac{v}{c^2}\cdot l_0\right) = \frac{l_0}{v}\,\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cdot\left(1-(v/c)^2\right)$$

$$\boxed{t_2 = \frac{l_0}{\gamma}\cdot\frac{1}{v} = l/v} \checkmark \quad l = l_0/\gamma \text{ contraído...}$$

S T Q Q S S D

Aula 8 / 5/

Outra maneira para resolver o ítem (b) :



$$\underbrace{c t_1}_{\text{distância percorrida pelo sinal ao longo da barra.}} = \underbrace{\ell}_{\text{medido em S}} - \underbrace{v t_1}_{\text{distância percorrida pela barra}}$$

$$t_1 (c + v) = \ell = \frac{\ell_0}{\gamma} = \ell_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

$$t_1 = \ell_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c + v} = \frac{\ell_0}{c} \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + v/c} = \frac{\ell_0}{c} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$ ✓

Cálculo clássico (errado !)

$$(c - v) t_1 = \ell_0 - v t_1 \rightarrow t_1 = \frac{\ell_0}{c}$$

a barra onde a luz é emitida (a fonte de luz) se movimenta para a direita ... lei da adição das vel. (Galileu)

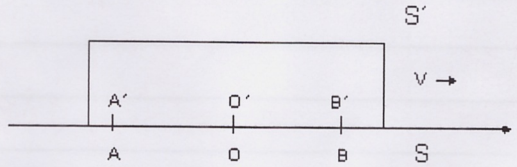
(o mesmo instante de tempo que em (a))

S T Q Q S S D

Aula 8

6

2- Dois observadores A e B no sistema **S**, estão separados por uma distância de $60m$ e equidistantes da origem em $x = 0$. Suponha que **S´** se mova com uma velocidade $3c/5$ em relação a **S.** Em $t = t' = 0$ as origens dos dois sistemas coincidem e os observadores A e B verificam que suas posições coincidem com as posições de dois observadores A'e B'em **S´.**



a) Quais são as posições dos observadores A'e B' no sistema **S´** ? (em $t = t' = 0$)

b) Qual a leitura do relógio de A' quando se dá a sua passagem por A ? E qual a leitura do relógio de B' quando se dá a sua passagem por B ?

a) $x' = \gamma(x - vt)$ $\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-9/25}} = \frac{5}{4}$

$x'_A = \frac{5}{4}\left(-30 - \frac{3c}{5} \cdot t_A^{=0}\right)$

$x'_A = -37,5$ m ... analogamente $x'_B = +37,5$ m

b) Em S', o relógio mede instantes de tempo diferentes para o encontro de A e A' e de B e B'. (mede L_0)

Em S: os dois encontros (eventos) são simultâneos (mede $L = L_0/\gamma$) $t_A = t_B = 0$

$t'_A = \gamma(t_A - x_A v/c^2)$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} x_A = -30\text{ m} \\ \gamma = 5/4 \\ t_A = 0 \end{array} \right.$ ← posição do evento $A \equiv A'$

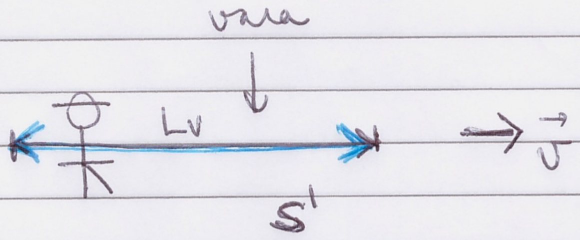
$\boxed{t'_A = +90/4c}$ (SI)

$t'_B = \gamma(t_B - x_B \cdot v/c^2)$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} x_B = +30\text{ m} \\ \gamma = 5/4 \\ t_B = 0 \end{array} \right.$ ← posição do evento $B \equiv B'$

$\boxed{t'_B = -90/4c}$ (SI)

$t'_B < t'_A$ (em S', o evento B ocorre antes do evento A)

"Paradoxo do telhado"



Em S' (homem c/ vara) : $L_T = L_T^0/\gamma$ (para o homem c/ vara o telhado "encolhe" e a vara não cabe na garagem).

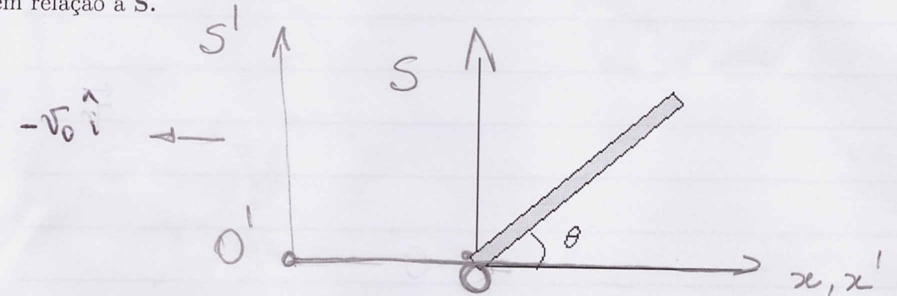
Em S (observadora no telhado) : $L_V = L_V^0/\gamma$ (para a observadora, a vara "encolhe" e portanto, cabe na garagem).

Pergunta : quem está correto?

Os dois estão corretos...

A observação dos 2 eventos (extremidades da vara coincidem com posições sob o telhado), não são SIMULTÂNEAS nos dois referenciais!

3- Uma barra de comprimento próprio L, orientada segundo um ângulo θ em relação ao eixo x, está em repouso num sistema inercial **S**. Considere um outro sistema inercial **S´** que se move com velocidade constante $\vec{v} = -v_0\hat{\imath}$ em relação a **S**.



a) Qual o comprimento L' da barra no sistema **S´** ?

b) Qual o ângulo de orientação θ' no sistema **S´** ?

a) $L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2}$

$L_y' = L_y = L\sin\theta$ (direção ortogonal ao movimento → não sofre contração)

$L_x' = \dfrac{L_x}{\gamma} = L_x\sqrt{1-(v_0/c)^2}$

$= L\cos\theta\sqrt{1-(v_0/c)^2}$

$L' = \sqrt{L^2\sin^2\theta + L^2\cos^2\theta\,(1-(v_0/c)^2)} = \sqrt{L^2 - L^2(v_0/c)^2\cos^2\theta}$

$$\boxed{L' = L\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\cos^2\theta}}$$

b) ângulo de orientação θ' no sistema S' :

$\left.\begin{array}{l} L_x' = L'\cos\theta' \\ L_y' = L'\sin\theta' \end{array}\right\} \quad \tan\theta' = \dfrac{L_y'}{L_x'} = \dfrac{L\sin\theta}{L\cos\theta\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$

$$\boxed{\tan\theta' = \gamma\tan\theta}$$

spiral

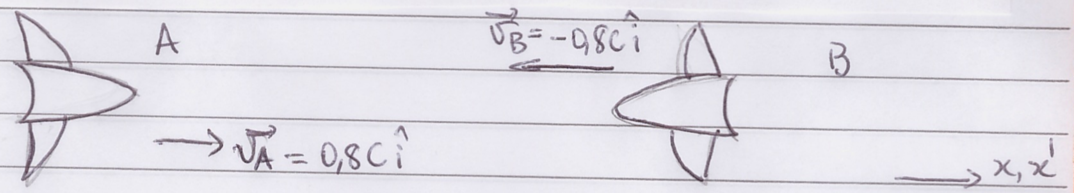
4- Duas naves espaciais A e B de mesmo comprimento próprio $L_0 = 100m$ viajam em sentidos opostos, ambas com a mesma velocidade escalar $v = 0,8c$ em relação a Terra.

a) Qual o comprimento de cada nave medido por um observador na Terra?

b) Qual o comprimento e a velocidade da nave B medido por um observador na nave A ?

c) Qual o comprimento e a velocidade da nave A medido por um observador na nave B ?

d) No instante $t = 0$ (relógio da Terra) as proas das naves estão alinhadas. Em que instante (no relógio da Terra) estarão as popas alinhadas?



a)

$$L_{Terra} = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} = 100\sqrt{1-(0{,}8)^2} = 60\,m$$

v_A ou v_B

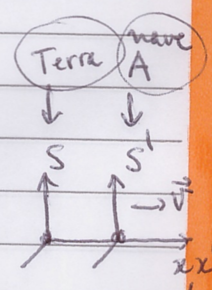
para ambas.

b) Comprimento e velocidade de B medidos em A.

Podemos atribuir : $\begin{cases} S \equiv \text{referencial da Terra} \\ S' \equiv \text{referencial de A (nave)} \end{cases}$

→ B é o objeto/evento ←

* T.L para as velocidades : $\boxed{u'_x = \dfrac{u_x - v}{1-(v/c^2)\,u_x}}$



$u_x \equiv v_B$ = velocidade de B no ref. S

$v = v_A$ = velocidade de S' em relação a S

$u'_x = v'_B$ = velocidade de B no referencial S'

Com isso : $$v'_B = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_A}{c^2}\cdot v_B} = \frac{-0{,}8c - 0{,}8c}{1 - \frac{(+0{,}8c)(-0{,}8c)}{c^2}}$$

$$\left[\, v'_B = \frac{-1{,}6c}{1+0{,}64} = -0{,}975c \,\right] \text{(medido em A)}$$

* Comprimento em A ? $\underset{\text{de B}}{\wedge}$ $L'_B = L_0\sqrt{1-(v'_B/c)^2} \simeq 21{,}9\,m$