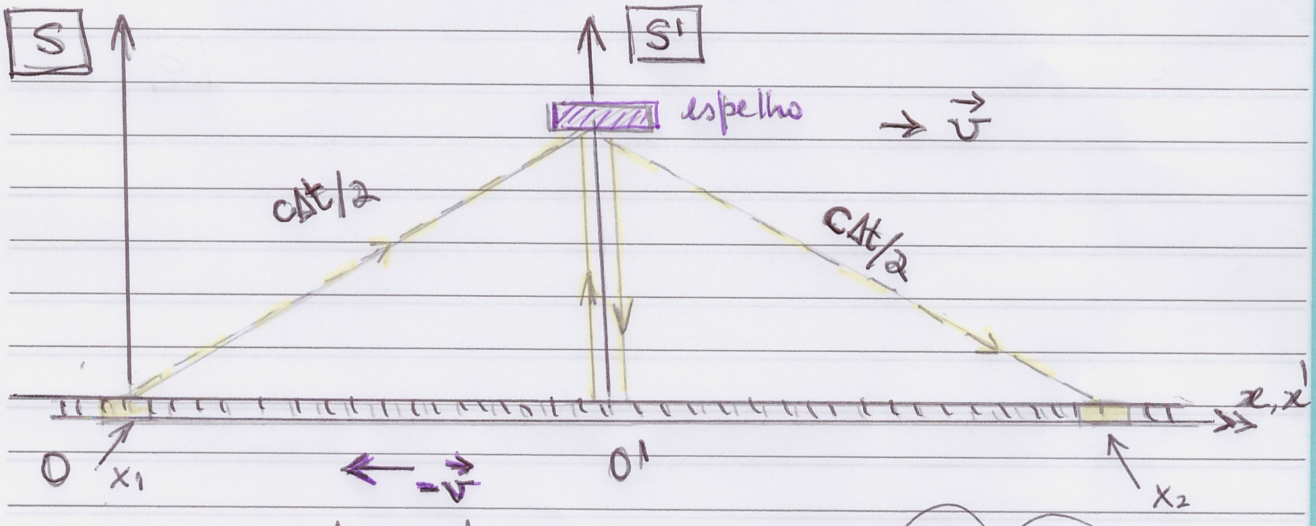
II. Medidas de comprimento

Definição: Distância e comprimento "próprios": a distância entre 2 pontos é denominada "distância própria" L_0 se os dois pontos estiverem em repouso em um mesmo referencial inercial.

Experimento: o mesmo para verificar dilatação dos intervalos de tempo. Mas, em adição, há uma "régua" presa no referencial $\boxed{S}$, em cujo observador mede um comprimento próprio dessa régua (L_0). A régua é "marcada" pelo pulso de luz, quando emitido e quando absorvido.



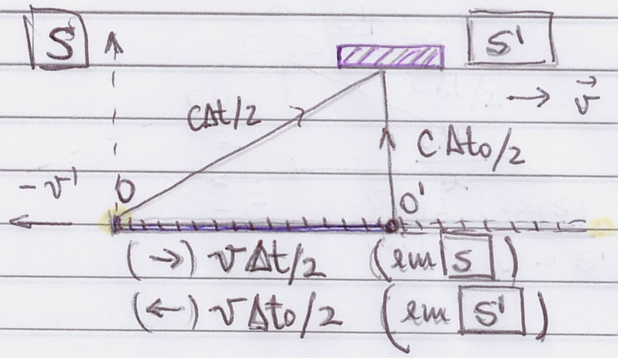
observador em $\boxed{S'}$ "vê" a régua mover-se com velocidade $-\vec{v}$

Note que a régua está disposta ao longo da direção de movimento

Pergunta: Qual resultado o observador em $\boxed{S'}$ obtém para o comprimento da régua que se encontra em repouso em $\boxed{S}$?

Atribuição do comprimento da régua

NESTE EXPERIMENTO
Os observadores em $\boxed{S}$ e em $\boxed{S'}$ medem intervalos de tempo ≠.



Em $\boxed{S}$: o espelho move-se com $+\vec{v}$

$$L_0 = v . \Delta t$$

Em $\boxed{S'}$: a régua move-se com $-\vec{v}$

$$L = v . \Delta t_0$$

Evidentemente, $L \neq L_0$ pois $\Delta t \neq \Delta t_0$

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{\cancel{\Delta t_0}}{\gamma \cancel{\Delta t_0}}$$

$$\left[L = L_0/\gamma = L_0 \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} \right] \qquad \gamma \geqslant 1$$

$$\left[L \leqslant L_0 \right]$$

Fenômeno: contração dos comprimentos
"(contração do ESPAÇO)"

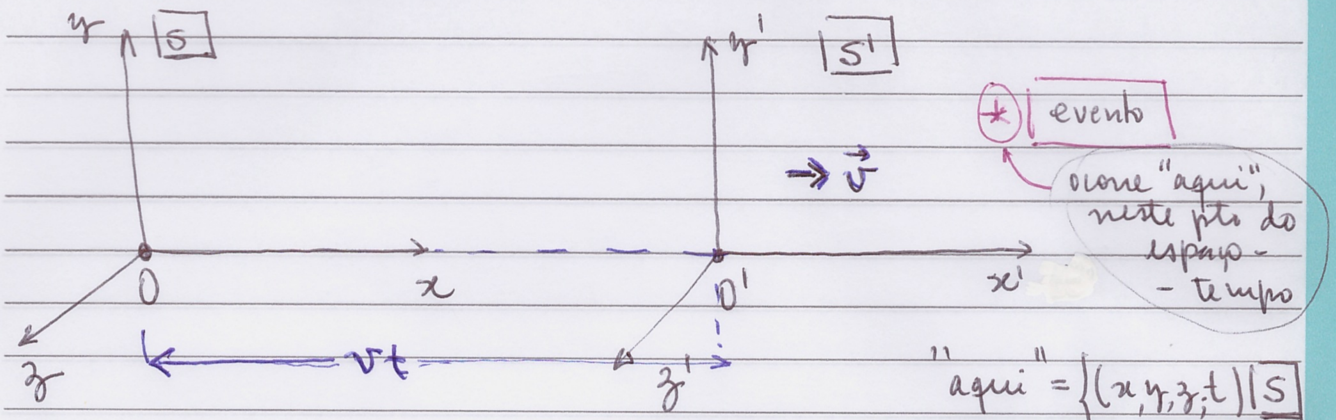
Aula 6 /

Ex $\begin{cases} v = 0{,}1c & \rightarrow L = \dfrac{L_0}{\gamma} = 0{,}995\, L_0 \\ v = 0{,}98c & \rightarrow L = \dfrac{L_0}{\gamma} = \dfrac{1}{5} L_0 \end{cases}$

Note que o resultado $L = L_0/\gamma$ segue como consequência da dilatação do tempo. É um resultado complementar. Portanto:

- Estes resultados são consequências de ser $|\vec{c}| = cte$ ($= 3 \times 10^8$ m/s) em qualquer referencial inercial.
- $L = |x_2' - x_1'|$. Como a régua está em movimento em relação a $\boxed{S'} \Rightarrow$ x_2' e x_1' devem ser medidos simultaneamente ...
- Não há contração dos comprimentos nas direções ortogonais ao movimento.
- O maior comprimento da régua é medido no seu "referencial próprio".
- Os efeitos são simétricos.
- Estes fenômenos são derivados (casos particulares) das Transformações de Lorentz.

Transformações de Lorentz



$$\text{"aqui"} = \begin{cases} (x, y, z; t) & \boxed{S} \\ (x', y', z'; t') & \boxed{S'} \end{cases}$$

Iremos considerar o caso particular (transformações especiais)

$\hat{x} \parallel \hat{x}'$
$\hat{y} \parallel \hat{y}'$ ... eixos
$\hat{z} \parallel \hat{z}'$

$\vec{v} = v\,\hat{i}$ ... velocidade $\boxed{S'}$ em relação a $\boxed{S}$

$$\gamma = \gamma(v) = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$$

Em $t = t' = 0$, as origens O e O' COINCIDEM

(A) coordenadas

$$x' = (x - vt)\cdot\gamma(v) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$* \quad t' = \frac{t - (v/c^2)\cdot x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad !$$

$$= \left[t - (v/c^2)\cdot x\right]\cdot\gamma$$

T.L $\boxed{S \rightarrow S'}$

$x \leftrightarrow x'$
$y \leftrightarrow y'$
$z \leftrightarrow z'$
$t \leftrightarrow t'$
$v \leftrightarrow -v$

INVERSA

$$x = (x' + vt')\cdot\gamma$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \left[t' + \frac{v}{c^2}\cdot x'\right]\cdot\gamma$$

$\boxed{S' \rightarrow S}$

(B) velocidades

componente "x" da velocidade "do objeto" : $u_x = \dot{x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. $u'_x = \dot{x}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$$
$$\vec{u}' = u'_x\hat{i} + u'_y\hat{j} + u'_z\hat{k}$$

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\cancel{\gamma}\,(\Delta x - v\Delta t)\div\Delta t}{\cancel{\gamma}\,(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)\div\Delta t} = \frac{\overbrace{\Delta x/\Delta t}^{u_x} - v\,\cancel{\Delta t}/\cancel{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta t} - \frac{v}{c^2}\underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{u_x}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\left\{\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot u_x\right)} \\ u'_y &= \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{\left(1-(v/c^2)u_x\right)} \\ u'_z &= \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{\left(1-(v/c^2)u_x\right)} \end{aligned}\right.$$

$\boxed{S} \rightarrow \boxed{S'}$

inversa

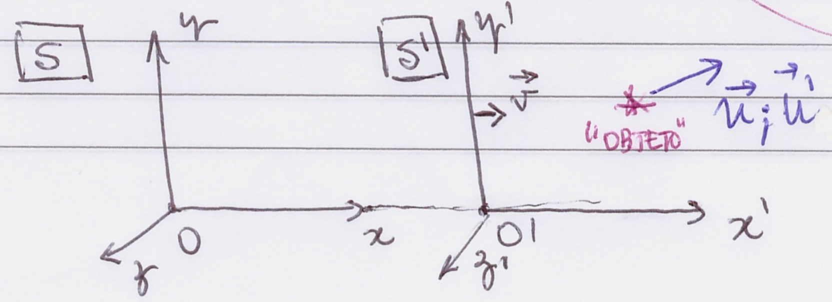
$\Longrightarrow$

$u'_x \leftrightarrow u_x$
$u'_y \leftrightarrow u_y$
$u'_z \leftrightarrow u_z$
$t' \leftrightarrow t'$
$v \leftrightarrow -v$

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\ u_y &= \frac{u'_y\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \\ u_z &= \frac{u'_z\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \end{aligned}\right.$$

$\boxed{S'} \rightarrow \boxed{S}$

$\vec{v} = v\hat{i}$



① Limite para baixas velocidades:

$v/c \ll 1$

$[\gamma \to 1]$

Neste caso, ambas as transformações para coordenadas e velocidades ⇒ transf. Galileu

= limite clássico (não-relativístico)

Neste caso também ⇒ $\begin{cases} L_0 = L \\ \Delta t_0 = \Delta t \end{cases}$

= tempo e espaço "absolutos": (Newton)

② $\boxed{c : \text{limite máximo}}$

De fato:

se $v > c$ então $\gamma = \gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

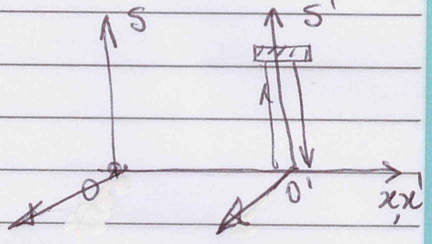
é imaginário, não físico!

Algumas "consequências" das T.L.

(a) Dilatação dos intervalos de tempo (entre 2 eventos)

$(t_1' - t_2') = \Delta t_0$ em S'

$(t_1 - t_2) = \Delta t$ em S



Os dois eventos ocorrem no mesmo ponto em S' pois é "dado" que o observador em S' mede um intervalo de tempo próprio entre os 2 eventos. Ou ao contrário...

$$t_1 - t_2 = \left[\frac{t_1' + (v/c^2)x_1'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{t_2' + (v/c^2)x_2'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right] =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x_1' = x_2'}}{=} \frac{t_1' - t_2'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \underbrace{(t_1' - t_2')} . \gamma = \underbrace{\Delta T_0} . \gamma \geqslant \Delta T_0$$

Note: Usamos a transformação inversa S' → S

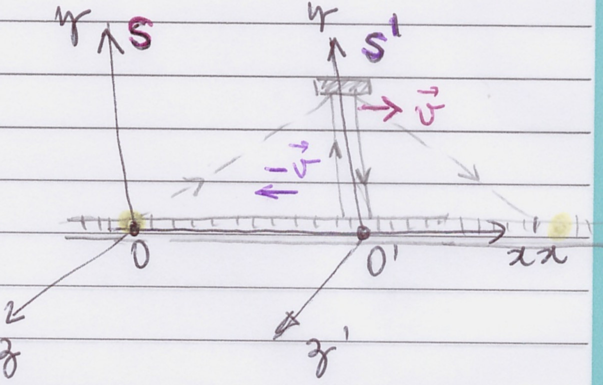
* **Pergunta:** com os dados do problema, poderíamos obter o resultado usando as T.L

S → S'

?

(b) Contração do "espaço" (comprimentos) em relação `a medida no referencial próprio.

A "régua" está fixa em $\boxed{S}$. O comprimento próprio é medido em $\boxed{S}$. Os 2 pontos são medidos simultaneamente em S'.



Como? Muitos observadores com seus relógios sincronizados "sentados" ao longo do eixo x' . . .

$$\underbrace{|x_1 - x_2|}_{L_0} = \left| \frac{x'_1 + v t'_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{x'_2 + v t'_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right|$$

x'_1 e x'_2 são as posições em S' dos pontos marcados da régua.

As medidas de x'_1 e x'_2 são simultâneas em S'

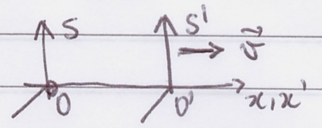
$$\Rightarrow t'_1 = t'_2$$

$$L_0 = \frac{x'_1 - x'_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = L \cdot \gamma$$

$$\boxed{L = L_0/\gamma} \leq L_0$$

(igual no limite clássico)

(c) A velocidade da luz é c (módulo) para todos observadores, em quaisquer referenciais inerciais.



Ex 1 $u_x = c$ $u_y = 0$ $u_z = 0$

T.L.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)\cdot u_x} = \frac{c-v}{1-(v/c^2)\cdot c} = \frac{c-v}{1-v/c} = c\,\frac{(c-v)}{(c-v)} = c \quad ✓$$

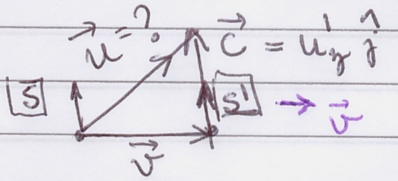
$u'_y = 0$

$u'_z = 0$

Ex 2 $u'_x = 0$ $u'_y = c$ $u'_z = 0$

$$u_x = \frac{\overset{=0}{u'_x} + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = v$$

$$u_y = \frac{u'_y = c}{1+\frac{v}{c^2}\underbrace{u'_x}_{0}}\;\frac{1}{\gamma(v)} = c\sqrt{1-(v/c)^2} \neq c \;\;!$$



$$u_z = \frac{u'_z = 0}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}\;\frac{1}{\gamma(v)} = 0$$

Com isso: $\vec{u} = v\hat{i} + c\sqrt{1-(v/c)^2}\,\hat{j} + 0\hat{k}$

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{\cancel{v^2} + c^2(1-(\cancel{v}/c)^2)} = c \quad ✓$$