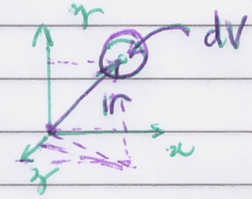
A Natureza ondulatória das partículas:
(II) Propriedades da "função de onda".

- Einstein: "Deus não joga dados..."
- A interpretação probabilística da Mecânica Quântica foi sugerida pela 1ª vez por Max Born (1928).
- Segundo esta, a probabilidade é INTRÍNSECA à MQ.
- O futuro não é previsível, mas apenas em probabilidade.

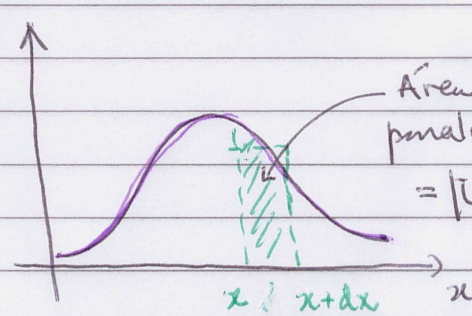
$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 \, d\vec{r} = P(\vec{r},t) \underbrace{d\vec{r}}_{dx\,dy\,dz} = P(\vec{r},t)\, dV$$

= probabilidade de encontrar a partícula (cuja função de onda é $\Psi(\vec{r},t)$) em um elemento de volume dV, centrado no ponto $\vec{r}$, no instante de tempo t.



$$\boxed{\text{Em uma dimensão espacial (1D)}}$$

$\rightarrow \; |\Psi(x,t)|^2 = P(x,t)$



Ou seja: $P(x,t)\,dx = |\Psi(x,t)|^2 dx$

$|\Psi(x,t)|^2$ = probabilidade por unidade de comprimento (= "densidade de probabilidade)

Normalização da função de onda

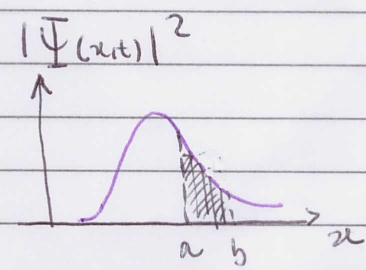
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, \Psi(x,t)\, dx = 1$$

$|\Psi(x,t)|^2$ = distribuição de probabilidade no ponto x, tempo t.

Idem em 3D

Probabilidade de encontrar a partícula na região $[a,b]$

$$P_{AB} = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 \, dx$$



Grandezas físicas obtidas como "valores esperados"

$$\langle A(x) \rangle \equiv (\Psi, A\Psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, A(x)\, \Psi(x,t)\, dx$$

Exemplo: desvio padrão

$$\sigma = \langle \Delta x \rangle \equiv \left(\langle [x - \langle x \rangle]^2 \rangle \right)^{1/2} = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)^{1/2}$$

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, x^n\, \Psi(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, \Psi^*(x,t)\, \Psi(x,t)\, dx$$

spiral

Princípio da Incerteza (Heisenberg 1927)

A natureza quântica das partículas impõe restrições na precisão de medidas simultâneas de grandezas que caracterizam o sistema".

Se uma medida da posição x for feita com precisão Δx $(x \pm \Delta x)$ e se uma medida do momento p_x for feita com precisão Δp_x $(p_x \pm \Delta p_x)$, então

$$\Delta x \, \Delta p_x \geqslant \hbar/2$$

$h \sim 10^{-34}$ J.s

Δx, Δp_x ... "INCERTEZAS"

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$
$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$$

Da mesma forma : $\begin{cases} \Delta y \cdot \Delta p_y \geqslant \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geqslant \hbar/2 \end{cases}$

Note : posições e momentos nas mesmas direções...

Existe outra relação entre "incertezas" envolvendo medidas de ENERGIA e TEMPO :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \hbar/2$$

S T Q Q S S D

Aula 18/4/

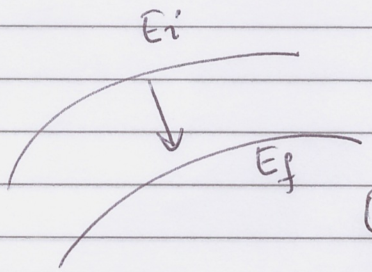
Exemplo: Largura das raias espectrais

O tempo médio que um átomo em um estado excitado leva para decair (mudar de estado: de um estado de energia mais alta para um estado de energia mais baixa)

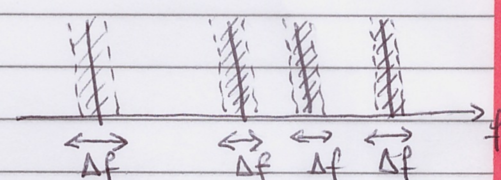
= vida média τ.

Para $\tau = 10^{-8}s$, usar o princípio da incerteza de Heisenberg para calcular a largura da raia Δf resultante desta vida média finita).

Ex: série de Balmer



(modelo de Bohr)



Diferença de energia $= E_i - E_f = hf$ (fóton)

A incerteza no instante da ocorrência do processo

$$\Delta t \sim \tau$$

Daí, a incerteza na medida da energia do FÓTON resultante deste decaimento ($E_i \to E_f$) é:

$$\Delta E_{fóton} = h\,\Delta f$$

Mas $(\Delta E).(\Delta t) \sim \hbar/2 \longrightarrow h(\Delta f).\tau \sim h/(2\pi).2$

$$\Delta f \sim \frac{1}{(2\pi).2.\tau} \sim 1.6\times10^{7}\,Hz$$

NOTE: $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}}{4\times10^{-7}} = 7{,}5\times10^{14}\,\frac{1}{s}$

$\lambda \sim 400nm$

* Possuo a informação de que no instante t_1 o átomo encontra-se no estado "i" e no instante t_2, o átomo encontra-se no estado "f"! A incerteza no instante em que ocorreu o processo é, portanto:

$$\begin{cases} \Delta t = t_2 - t_1 = \tau = 10^{-8}\,s \\ \Delta E_{átomo} = -\Delta E_{fóton} \end{cases}$$

Qual a origem do Princípio da Incerteza na MQ?

→ dualidade partícula/onda

$$\boxed{\lambda_{de\ Broglie} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}}$$

[eléton: $\begin{cases} m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,kg \\ h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,J.s \\ v = 3 \times 10^{6}\,m/s \end{cases}$

$\lambda^{eléton}_{de\ Broglie} = 2{,}4 \times 10^{-10}\,m$

[bola $\begin{cases} m_{bola} = 400\,g = 0{,}4\,kg \\ v_{bola} = 10\,m/s \end{cases}$

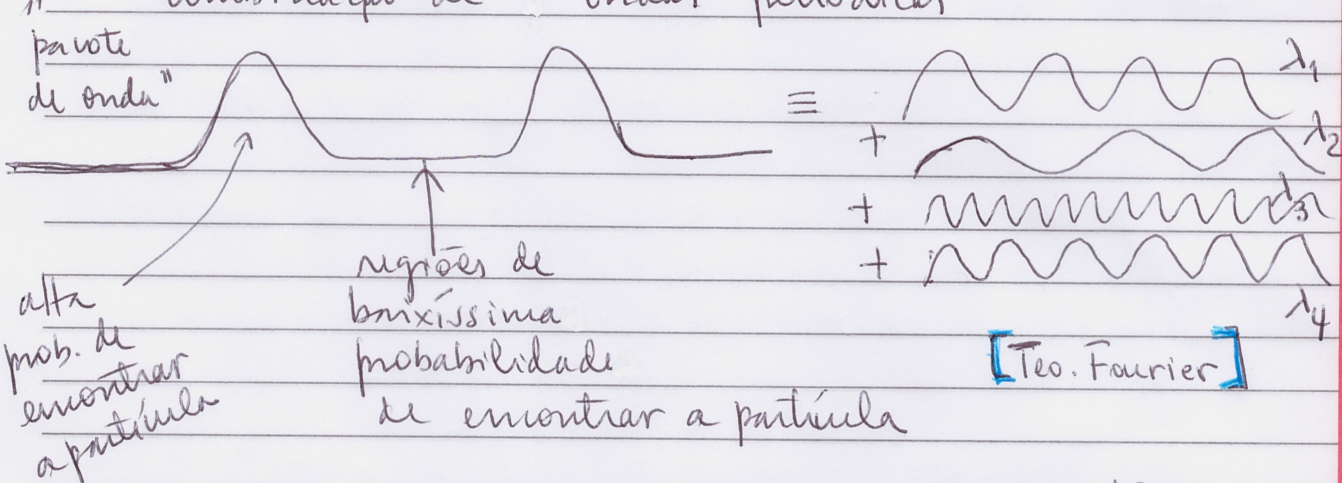
$\lambda^{bola}_{de\ Broglie} = 1{,}7 \times 10^{-34}\,m$

$$\underbrace{\lambda^{bola}}_{\text{não observável!}} <<<<< \underbrace{\lambda^{eléton}}_{\text{observável p.ex. difração.}}$$

- Uma partícula (clássica) existe em um ponto, por definição

- ondas, por outro lado, representam perturbações espalhadas em todo espaço, se periódicas. Neste caso, são caracterizadas por um comprimento de onda λ e assim, um momento bem definido p.
  $\Rightarrow$ NESTE CASO, SUA POSIÇÃO É INDETERMINADA

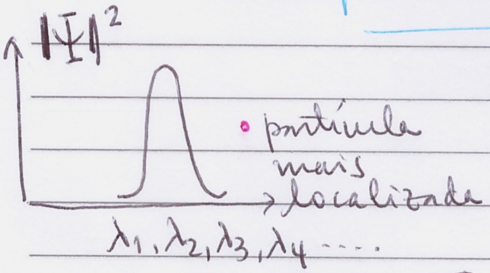
- Uma perturbação NÃO periódica, LOCALIZADA, um pulso, por exemplo, pode ser representado por uma combinação de ondas periódicas



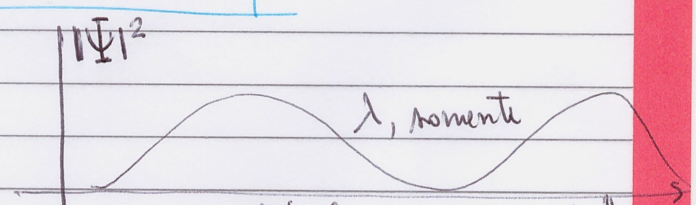
[Teo. Fourier]

- Mas neste caso, como há muitos λ's, perdemos a informação sobre o momento...

De forma esquemática



- partícula mais localizada
- momento menos determinado



- partícula "espalhada" não localizada
- momento $p = h/\lambda$ bem definido

- Compromisso com dualidade do objeto quântico: $\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2}$

Exemplo: Um elétron encontra-se em movimento com velocidade $v_x = 2 \times 10^6 \, m/s$, ao longo do eixo x. Esta velocidade é medida com precisão de 0,50%. Qual é a incerteza mínima com a qual se pode medir simultaneamente a posição do elétron ao longo do eixo x?

Solução: $(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \hbar/2$

mínima incerteza em $x \Rightarrow \Delta x = \frac{\hbar}{2(\Delta p_x)}$

Quanto vale Δp_x?

$p_x = m v_x$ (momento clássico pois $v_x \ll c$)

- $\Delta p_x = (0{,}50\%)\, p_x = 0{,}005\, p_x = 0{,}005\,(m v_x)$

$(0{,}005) \cdot \left(1{,}87 \times 10^{-24} \, kg \cdot \frac{m}{s}\right) = 9{,}35 \times 10^{-27} \, kg \cdot m/s$

- $\Delta x = \frac{\hbar}{2(\Delta p_x)} = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34} \, J \cdot s)/2\pi}{2 \cdot (9{,}35) \times 10^{-27}} \sim 5{,}5 \, mm.$