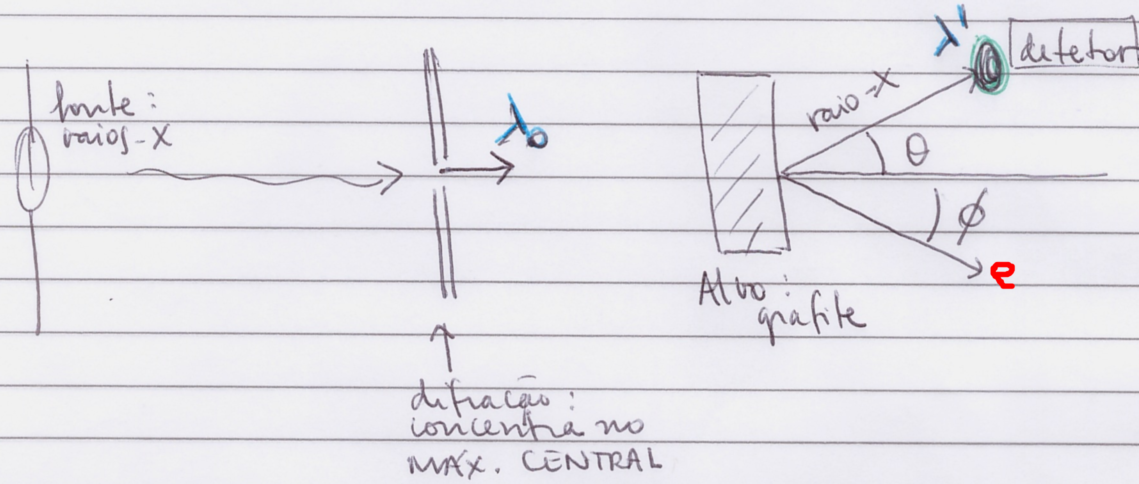
Espalhamento Compton

Fornece confirmação adicional da natureza quântica da RADIAÇÃO (raios-X).

(1919 – 1923): Arthur Compton e Peter Debye, de forma independente, utilizaram as idéias de Einstein para explicar o espalhamento de raios-X ($\lambda_0 \sim 10^{-10}$ m) por elétrons. (Nobel → Compton).



- $E_{fóton} = hf = hc/\lambda_0 \simeq 18$ keV (raios-X)
- Esta energia é muito maior do que a energia de ligação dos elétrons no grafite.

(no grafite ... elétrons ~ livres)

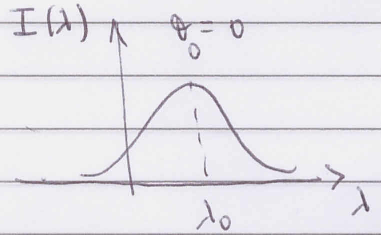
Resultado experimental: (Compton)

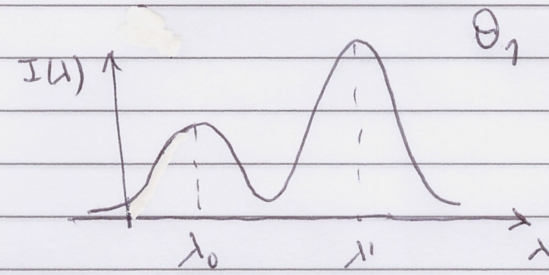
- encontra-se, no espectro da luz espalhada, uma componente com o mesmo λ_0 (sempre!).

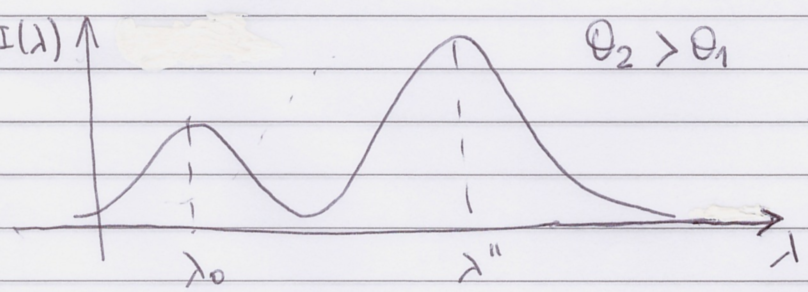
- encontra-se no espectro da luz espalhada, uma outra componente λ' para cada ângulo θ.

$\lambda' = \lambda'(\theta)$ tal que λ' cresce com θ.

Para cada ângulo θ, : $n'(\lambda'(\theta)) + n_0(\lambda_0)$
a intensidade da luz observada no detetor







--- RECORDAÇÃO ---

1) $mc^2 = E\ (\text{total})$

$$\left.\begin{aligned} mc^2 &= m_0c^2 + E_c \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0\gamma \end{aligned}\right\} \quad E_c = (\gamma - 1)\, m_0 c^2$$

2) $E\ (\text{total}) = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} \qquad p = mv$

FÓTONS : $m_0 = 0 \implies E_{fóton} = p_{fóton}\, c$

$$p_{fóton} = \lim_{\substack{m_0 \to 0 \\ v \to c}} \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = ?$$

- Mec. Quântica : $E_{fóton} = hf$
- Relatividade : $E_{fóton} = pc$

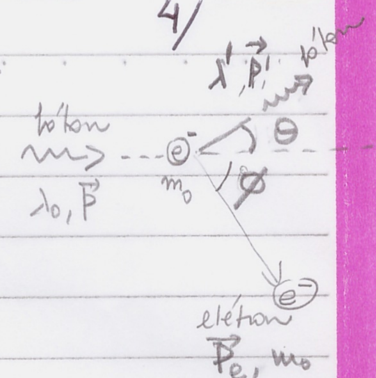
$$\left.\begin{aligned} E_{fóton} &= hf \\ E_{fóton} &= pc \end{aligned}\right\} \quad p_{fóton} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

c/λ

pc ~ 18 keV
altíssima...

Aula 13

4/



① Conservação da energia : $E_i = E_f$

$$\overbrace{pc}^{\text{incidente}} + m_0c^2 = \overbrace{p'c}^{\text{emitido}} + \underset{\text{final}}{E_{\text{elétron}}}$$

$$\left(\left[(p-p') + m_0c\right]c\right)^2 = \left(\underset{\text{final}}{E_{\text{elétron}}}\right)^2$$

$$\left[(p-p') + m_0c\right]^2 = \frac{1}{c^2}\left[(P_e c)^2 + (m_0c^2)^2\right]$$

$$\boxed{\left[(p-p') + m_0c\right]^2 = P_e^2 + m_0^2c^2} \qquad (A)$$

② Conservação do momento

$$\vec{p} + 0 = \vec{p}' + \vec{P}_e \rightarrow \begin{cases} P_x^i = P_x^f \\ P_y^i = P_y^f \end{cases}$$

CONSERVAÇÃO: MOMENTO TOTAL

$$(\vec{p}-\vec{p}')\cdot(\vec{p}-\vec{p}') = P_e^2$$

$$\boxed{p^2 + p'^2 - \underbrace{2\vec{p}\cdot\vec{p}'}_{2pp'\cos\theta} = P_e^2} \qquad (B)$$

(B) em (A) para eliminar P_e^2

$$\left[(p-p') + m_0c\right]^2 = \underbrace{p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta}_{P_e^2} + m_0^2c^2$$

$$\cancel{p^2} - 2pp' + \cancel{p'^2} + 2m_0(p-p')c + \cancel{m_0^2c^2} =$$

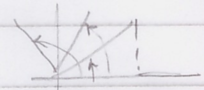
$$= \cancel{p^2} + \cancel{p'^2} - 2pp'\cos\theta + \cancel{m_0^2c^2}$$

$$2m_0cp - 2m_0cp' = 2pp'(1-\cos\theta)$$

$$\div\, pp' \Rightarrow \quad \frac{m_0 c}{p'} - \frac{m_0 c}{p} = (1-\cos\theta)$$

$$p = \frac{h}{\lambda_0} \qquad p' = \frac{h}{\lambda'}$$ *

$$\Rightarrow \quad \frac{m_0 c}{h}\left(\lambda' - \lambda_0\right) = (1-\cos\theta)$$



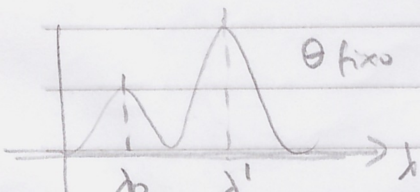
λ' cresce com θ

$$\boxed{\lambda' = \lambda_0 + \underbrace{\frac{h}{m_0 c}}_{\lambda_c}(1-\cos\theta)}$$

$\cos\theta \downarrow \; \theta \uparrow \Rightarrow \lambda' \uparrow$

= FÓRMULA DE COMPTON PARA o "DESLOCAMENTO" DE λ.

massa do centro espalhador.



devido ao espalhamento dos fótons incidentes pelos NÚCLEOS

Para $m_0 = M_0(\text{núcleo}) \Rightarrow \lambda' - \lambda_0 = \Delta\lambda = 0$

- $\lambda' - \lambda_0 \equiv$ "deslocamento Compton"
- $\frac{h}{m_0 c} = \lambda_c = 0{,}00243$ nm "comprimento de onda Compton do elétron".

Confirmação adicional: Em 1950, Cross/Ramsey observaram o "elétron de recuo" no ângulo ϕ previsto por Compton.

* Momento do Fóton

$$E_\gamma = pc \quad (m_0 = 0)$$

Planck/Einstein $E_\gamma = hf = h\frac{c}{\lambda}$

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

Exercício

Na experiência original de Compton (1923), um fóton com $\lambda_0 = 0{,}71\,\text{Å}$ colide com um elétron em repouso. Após a colisão, um fóton é detectado formando um ângulo 135° com a direção incidente.

a) Qual é o comprimento de onda λ' associado a este fóton espalhado?

$\boxed{\text{Sol}}$: $\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda$ com $\Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\theta)$

$$\frac{h}{m_0^e\,c} \longrightarrow \lambda_c$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1-\cos 135°)$$

$$= 0{,}0243\,(1+\sqrt{2}/2)$$

$$\lambda' \approx 0{,}75\,\text{Å}$$

b) Em qual ângulo ocorre a perda (relativa) MÁXIMA de energia do fóton $\Delta E/E_0$, onde E_0 é a energia do fóton antes da colisão?

$\boxed{\text{Sol}}$: $$\frac{\Delta E^{\text{fóton}}}{E_0} = \frac{hc/\lambda_0 - hc/\lambda'}{hc/\lambda_0} = 1 - \lambda_0/\lambda' > 0$$

Portanto, $\Delta E^{\text{fóton}}/E_0$ é máximo para λ' máximo, isto é:

$\Delta\lambda$ máximo ocorre em $\theta = \pi$ ($= 180°$)

Neste caso: $$\overbrace{(\Delta\lambda)_{max}}^{\lambda'-\lambda_0} = \lambda_c(1-\underbrace{\cos\pi}_{-1}) = 2\lambda_c$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda'_{max} = \lambda_0 + 2\lambda_c}$$

$$\left(\frac{\Delta E^{\text{fóton}}}{E_0}\right)_{máx} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\lambda_c} \sim 0{,}064 \quad (6{,}4\%)$$

c) Nestas condições, qual é a energia cinética Ec adquirida pelo elétron devido ao espalhamento do fóton?

$\boxed{\text{Sol}}$:

$$\left.\begin{aligned} E^{e^-}_{final} &= E_c + m_0 c^2 \\ E^{e^-}_{inicial} &= m_0 c^2 \end{aligned}\right\} \Delta E = E_c$$

Por conservação da energia, $E_c = -\Delta E^{foton}$

$$E_c = E_i^{foton} - E_f^{foton}$$

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'_{max}} = hc\left(\frac{\lambda'_{max} - \lambda_0}{\lambda'_{max}\lambda_0}\right)$$

$$E_c = hc \cdot \frac{\Delta\lambda^{max}}{\lambda'_{max} \cdot \lambda_0}$$