Dinâmica Relativística - (II)

Unidades de Energia na Física Relativística : eV

1 eV ≡ energia de uma carga (elétron) acelerada através de uma ddp de 1 V.

$$\text{Energia} = \underbrace{\text{carga}}_{\text{Coulomb}} \times \underbrace{\text{ddp}}_{\text{Volt}} = \text{J (Joule)}$$

$$\text{SI}: \quad (1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C})(1\,\text{V}) = \boxed{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J} \equiv 1\,\text{eV}}$$

Múltiplos:

$\text{keV} = 10^3\,\text{eV}$ $\quad \text{MeV} = 10^6\,\text{eV}$ $\quad \text{GeV} = 10^9\,\text{eV}$ $\quad \text{TeV} = 10^{12}\,\text{eV}$

Exemplo 1 : energia de repouso de uma partícula de massa = 1 g (repouso)

$$E_0 = m_0 c^2 = (1\,\text{g}) \cdot (3 \times 10^8\,\text{m/s})^2 = (10^{-3}\,\text{kg}) \cdot (3 \times 10^8\,\text{m/s})^2$$

$$= 9 \times 10^{13}\,\text{Joule} = 5{,}61 \times 10^{32}\,\text{eV}$$

$$\uparrow$$

$$1\,\text{Joule} = \frac{1}{1{,}602} \times 10^{19}\,\text{eV}$$

Exemplo 2 : energia de repouso do elétron

$$\left(m_0^e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}\right) \quad E_0^{e^-} = m_0^{e^-} c^2 = 0{,}5\,\text{MeV} = 0{,}5 \times 10^6\,\text{eV}$$

Exemplo 3 : energia de repouso do próton

$$\left(m_0^p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}\right) \quad E_0^p = m_0^p \cdot c^2 = 938{,}3\,\text{MeV}$$

Vimos que: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \vec{v}}$

E que: $\boxed{E_c = mc^2 - m_0 c^2 = m_0(\gamma - 1)c^2}$

O que permite identificar:
- $E_{total} = mc^2 = m_0 \gamma c^2$
- $E_{repouso} = m_0 c^2$

→ Energia cinética = (aumento da massa da partícula devido ao seu movimento) × c^2

Compare:
- E_c (clássico) $= \frac{1}{2} m_0 v^2$
- E_c (relativístico) $= (m - m_0)c^2$

e não $\cancel{\frac{1}{2} m v^2}$!! NÃO !!

A expressão clássica para E_c é obtida da expressão relativística, no limite de baixas velocidades?

$\boxed{x \equiv \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}$

De fato:

$$\lim_{x \to 0} E_c^{(rel)} = \lim_{x \to 0} m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right] \simeq$$

Em torno de $x = a = 0$

$$\simeq m_0 c^2 \left[\left(\cancel{1} + \frac{(1-x)^{-3/2}}{2}\Big|_{x=0} \cdot \frac{1}{1!} \cdot x + O(x^2) \right) - \cancel{1} \right]$$

$$= m_0 c^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} m_0 c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \checkmark \; (E_c^{class})$$

Nota: Expansão em série de potências (Taylor) em torno de um pto $x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

se $\boxed{a = 0}$ → $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$

Expressão de $E_{total} = mc^2$ em termos de outra quantidade conservada = = momento linear da partícula $= |m\vec{v}| = p$

$$mc^2 = m_0 \gamma c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot c^2 .$$

Portanto $(mc^2)^2 \cdot \left(\sqrt{1-(v/c)^2}\right)^2 = (m_0 c^2)^2$

$$\underbrace{(mc^2)^2}_{E_{total}^2} - (mc^2)^2 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \underbrace{(m_0 c^2)^2}_{E_0^2}$$

$$(mc^2)^2 = m^2 \cancel{c^4}^{\,2} \cdot \frac{v^2}{\cancel{c^2}} + (m_0 c^2)^2$$

$$\underbrace{(mc^2)^2}_{E_T^2} = p^2 \cdot c^2 + \underbrace{(m_0 c^2)^2}_{E_0^2}$$

$$\boxed{E_T = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}}$$

$= mc^2$ ✓

$= m_0 \gamma c^2$ ✓

$= m_0 c^2 + E_c$ ✓

Para partículas com massa de repouso nula

$$m_0 = 0$$ (fótons, neutrinos? ν_e, ν_μ, ν_τ sabores ...)

$$\boxed{E_{total} = pc}$$ para o fóton ...

Então, se conhecemos p, determinamos E_{total}.
Ou, se conhecermos E, determinamos p.

Mas ... a relatividade não nos informa sobre a energia do fóton, nem ~~xx~~ como ~~xxx~~ ou se um fóton pode possuir mais energia do que outro.

Afinal: qual é a energia de um fóton??

A resposta está na Mecânica Quântica

Planck / Einstein

Pensando no momento linear ...

$$p = mv = m_0 \gamma v = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot v$$

Como, então, é possível que $p \neq 0$ para $m_0 = 0$?

Neste caso, devemos tomar o limite duplo:

$$\lim_{\substack{m_0 \to 0 \\ v \to c}} \frac{m_0 \, v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = p \quad \text{finito!}$$

Ou seja: partículas com $m_0 = 0$ viajam com a velocidade da luz!

Vale a recíproca: partículas com $v = c$ possuem $m_0 = 0$

$$\boxed{m_0 = 0 \longleftrightarrow v = c}$$

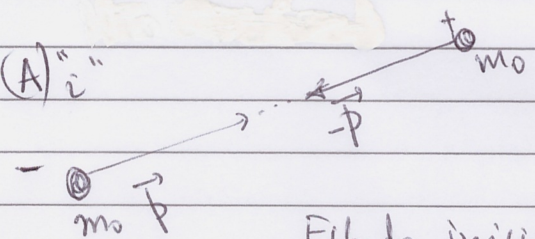
Exemplos: "reações nucleares"

["Aniquilação de pares"]

1 – Um pósitron ~~[illegible]~~ e um elétron, ambos possuindo a mesma massa de repouso m_0, sofrem uma colisão inelástica.

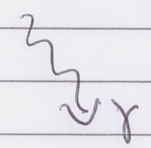
(a) Se o momento linear inicial (em valor absoluto) de cada partícula no instante da colisão, no referencial do CM, é p, discuta a possibilidade de que um ÚNICO FÓTON seja produzido como resultado desta colisão.

(A) "i"



Estado inicial

(B) "f"



Estado final?

1) Conservação do MOMENTO

$$\underbrace{\vec{P}_i}_{\vec{p}+(-\vec{p})} = \vec{P}_f = \underset{\uparrow \text{ no CM}}{0} \Rightarrow \vec{p}_\gamma = 0$$

Resposta: NÃO!

Um fóton emergente desta colisão possuiria $\vec{p}_\gamma \neq 0$ violando conservação do momento

$$p_\gamma \cdot c = E_{total}$$

2) Conservação da ENERGIA

$$E_{total\,"i"} = E_{total\,"f"} \equiv E_{total}$$

$$E^{"i"}_{total} = 2 \times \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

$$E^{"f"}_{total} = p_\gamma c$$

Como $E^{"i"} = E^{"f"} = E_{fóton} = p_\gamma c \neq 0$!!

(b) Suponha agora que a resultante da colisão seja o surgimento ("criação") de dois fótons. No referencial do CM, determine o momento de cada um destes fótons. (considere m_0 e p conhecidos).

1) Conservação do MOMENTO:

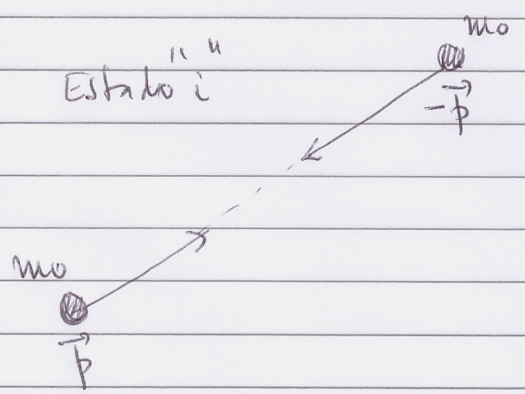
$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\vec{P}_i}_{\vec{p} + (-\vec{p}) = 0} = \vec{P}_f = 0 \end{array}\right\} \quad \vec{P}_f = \vec{p}_\gamma + (-\vec{p}_\gamma) = 0$$

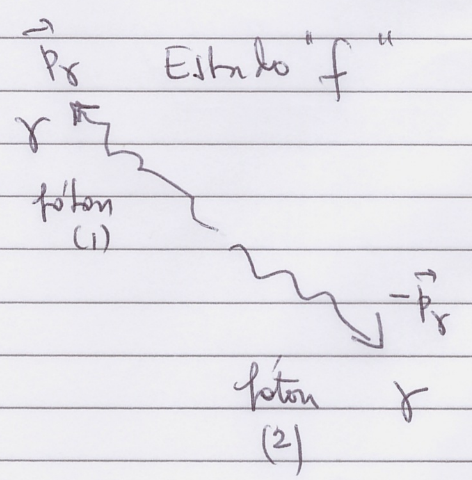
Mas $\vec{p}_\gamma \neq 0$!!

2) Conservação da ENERGIA:

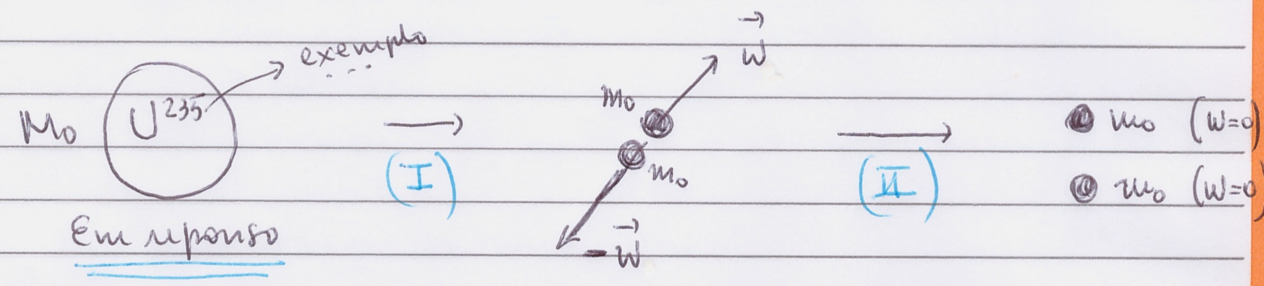
$$E_i = E_f$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{"}i\text{"}\ \text{total}} = 2\sqrt{(pc)^2 + m_0^2c^4} \\ \\ E_{\text{"}f\text{"}\ \text{total}} = 2p_\gamma c \end{array}\right\} \quad \boxed{p_\gamma = \frac{1}{c}\sqrt{(pc)^2 + m_0^2c^4}}$$





2 – (Fissão nuclear)



Estado "inicial" — Estado "final" — Após interação com o meio

1 – Conservação do MOMENTO:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$\vec{P}_i = 0$ ✓

$\vec{P}_f = m(\vec{w} + (-\vec{w})) = 0$ ✓

2 – Conservação da ENERGIA:

$$E_i = E_f$$

$$\left.\begin{aligned} E_i &= M_0 c^2 \\ E_f &= 2mc^2 = 2 \cdot \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(w/c)^2}} \end{aligned}\right\} \downarrow \quad M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(w/c)^2}} > 2m_0$$

Energia liberada para o meio (após as partículas do "estado final" atingirem repouso)

$E_i - E_{repouso} =$

$M_0 c^2 - 2m_0 c^2 = (M_0 - 2m_0)\, c^2$

Se $M_0 >> 2m_0$, a energia liberada para o meio! pode ser muito grande ...