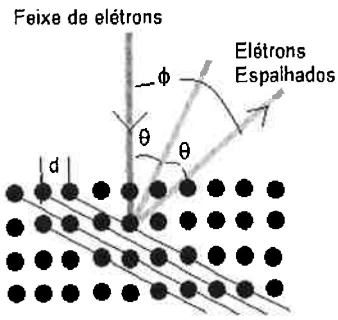
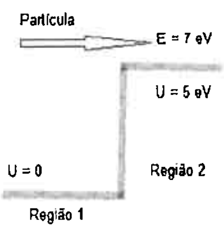
Lista de Exercícios Física IV

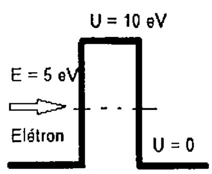
Fótons e Ondas Eletromagnéticas, Propriedades Ondulatórias das Partículas, Experiência de Dupla Fenda (partículas), Princípio da Incerteza, Mecânica Quântica, Partícula numa Caixa, Equação de Schrödinger, Partícula num Poço de Altura Finita, Tunelamento através de uma Barreira e Oscilador Harmônico Simples



1. Achar o comprimento de onda de de Broglie de uma bola de 0,15kg, movendo-se com velocidade de 20 m/s.
2. Na experiência de Davisson-Germer elétrons de 54 eV são difratados numa rede de níquel. Se o primeiro máximo da figura de difração for observado no ângulo $\phi = 50^{o}$ (figura ao lado), qual o espaçamento da rede, *d*, dos átomos de níquel?
3. Num microscópico eletrônico, os elétrons são acelerados por 40.000 V. Qual seria teoricamente a menor distância percebida no microscópio?
4. Um feixe de nêutrons, à velocidade de 0,4 m/s, passa por uma dupla fenda que tem 1 mm de separação. Um conjunto de detectores de nêutrons está colocado a 10 m da fenda. (a) Qual é o comprimento de onda de de Broglie dos nêutrons? (b) A que distância do eixo está o primeiro ponto de intensidade nula no conjunto de detectores? (c) Podemos dizer qual a fenda atravessada por um nêutron? Explique.
5. Um próton tem a energia cinética de 1 MeV. Se seu momento for medido com uma incerteza de 5%, qual a incerteza mínima na posição?
6. Um garoto deixa uma pequenina pelota cair do alto de uma escada visando a um alvo do solo. (a) Mostre que, conforme o princípio da incerteza, o afastamento em relação ao alvo deve ser pelo menos $\Delta x = \left(\frac{h}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{H}{2g}\right)^{1/4}$, onde *H* é a distância vertical inicial de cada pelota em relação ao solo e *m* a massa de cada pelota.
(b) *Se H = 2 m* e *m = 0,5 g*, qual o valor de *Δx?*
7. Um elétron tem a função de onda $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ sen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$. Achar a probabilidade de se encontrar o elétron entre *x=0* e *x=L/4*.
8. Um elétron com energia de aproximadamente 6 eV move-se entre paredes rígidas afastadas por 1 nm. (a) Achar o número quântico n do estado ocupado por este elétron. (b) Achar o valor exato da energia do elétron
9. A função de onda de uma partícula é dada por $\Psi(x) = Acos(kx) + Bsen(kx)$, onde A, B e k são constantes. Mostrar que Ψ é uma solução da Equação de Schrödinger, admitindo que a partícula seja livre (U=0), e achar a energia da partícula.
10. Numa região do espaço, uma partícula com energia nula tem a função de onda dada por $\Psi(x) = Axe^{\frac{-x^2}{L^2}}$. (a) Achar a energia potencial U em função de x. (b) Fazer o gráfico de U(x) em função de x.
11. Suponha que uma partícula esteja confinada, no seu estado fundamental, numa caixa com paredes infinitamente altas. Suponha então que a altura da barreira à esquerda seja, num certo instante, reduzida a uma altura finita. (a) Faça o gráfico qualitativo da função de onda da partícula num pequeno intervalo de tempo depois do abaixamento. (b) Se a caixa tiver uma largura L, qual o comprimento de onda da onda que penetra na barreira?



12. Uma partícula com 7 eV de energia cinética passa de uma região onde o potencial é nulo para uma outra onde U = 5 eV (figura ao lado). Classicamente espera-se que a partícula continue a se mover para a direita, embora com energia cinética menor. Conforme a mecânica quântica, a partícula tem uma probabilidade de ser transmitida e uma probabilidade de ser refletida. Quais são estas probabilidades?

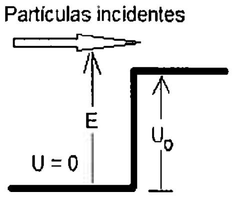


13. Um elétron de 5 eV incide sobre uma barreira que tem 0,2 nm de espessura e 10 eV de altura (figura ao lado). (a) Qual a probabilidade do elétron tunelar através da barreira? (b) Qual o probabilidade do elétron ser refletido?
14. A função de onda de um oscilador harmônico é $\Psi(x) = Axe^{-bx^2}$. (a) Mostrar que Ψ satisfaz a equação de Schrödinger. (b) Achar b e a energia total E. (c) Esta função é de um estado fundamental ou de um primeiro estado excitado?
15. Mostrar que as energias do oscilador na Equação $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{2\pi}\right)\omega$ correspondem às amplitudes clássicas
$$A_n = \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)(2n+1)/m\omega}.$$
16. Um átomo está num estado excitado 1,8 eV acima do estado fundamental e permanece neste estado excitado, em média, 2 μs antes de fazer uma transição para o estado fundamental. Achar (a) a frequência e (b) o comprimento de onda do fóton emitido. Achar a incerteza aproximada da energia do fóton.

17. Uma partícula é descrita pela função de onda

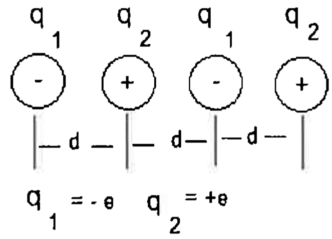
$$\Psi(x) = A cos(2\pi x/L) para -\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{4} \; e \; \Psi(x) = 0 \; para \; outros \; valores \; de \; x.$$

(a) Determinar a constante de normalização A. (b) Qual a probabilidade da partícula ser encontrada entre x = 0 e x = L/8, se a sua posição for medida?



18. Partículas que vêm da esquerda encontram um potencial degrau, como mostra a figura ao lado. O degrau tem altura U_o e as partículas têm energia $E > U_o$. Classicamente todas as partículas passariam para a região de potencial mais elevado, à direita. Porém, conforme a mecânica quântica, uma fração das partículas se reflete no degrau. A probabilidade de uma partícula ser refletida, chamada de coeficiente de reflexão R, é dada por $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$ onde $k_1=2\pi/\lambda_1$ e $k_2=2\pi/\lambda_2$, são os números de ondadas partículas incidente e transmitida, respectivamente. Se $E = 2U_o$, qual a fração das partículas incidentes é refletida? (Esta situação é análoga à da reflexão parcial e da transmissão parcial da luz que atinge a interface de dois meios diferentes).

19. Uma partícula tem a função de onda dada por $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} e^{-x/a} \; para \; x > 0 \; e \; \Psi(x) = 0 \; para \; x < 0$. (a) Achar a densidade de probabilidade e fazer o gráfico respectivo. (b) Achar a probabilidade de a partícula ser encontrada em qualquer ponto com x < 0. (c) Mostrar que Ψ está normalizada e então achar a probabilidade da partícula ser encontrada entre x = 0 e x = a.



20. Considere um "cristal" constituído por dois núcleos e dois elétrons, conforme mostra a figura ao lado (a) Tomando em conta todas as interações de pares de partículas, achar a energia potencial do sistema em função de *d*. Admitindo que os elétrons estejam confinados em uma caixa unidimensional de largura *3d*, achar a energia cinética mínima dos dois elétrons. (c) Achar o valor de *d* para o qual a energia total é mínima. (d) Comparar este valor de d ao espaçamento dos átomos no lítio, cuja densidade é 0,53 g/cm^3 e o peso atômico é 7. (este tipo de cálculo pode ser usado para estimar a densidade de cristais de certas estrelas).

21. Um elétron é representado pela função de onda independente do tempo $\Psi(x) = Ae^{-\alpha x} \; para \; x > 0 \; e \; \Psi(x) = Ae^{+\alpha x} \; para \; x < 0$. (a) Fazer o gráfico da função de onda em função de x. (b) Achar a probabilidade, e fazer o gráfico, de o elétron estar entre *x* e *x+dx*. (c) Por que você acha que esta função de onda é fisicamente razoável? (d) Normalize a função de onda. (e) Determine a probabilidade de encontrar o elétron num ponto do intervalo $x_1 = -1/2 \; \alpha$ até $x_2 = 1/2 \; \alpha$.

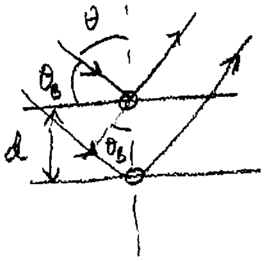
22. A função de onda normalizada do estado fundamental do átomo de hidrogênio é $\Psi(r, \theta, \phi) = 2/\sqrt{4\pi}\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2} e^{-r/a_o}$ Onde r é a coordenada radial do elétron e a_o o raio de Bohr. (a) Fazer o gráfico da função de onda contra r. (b) Mostrar que a probabilidade de se achar o elétron entre *r* e *r+dr* é dada por $|\Psi|^2 4\pi r^2 dr$. (c) Fazer o gráfico da probabilidade contra r e, pelo gráfico, achar o raio no qual é mais provável encontrar o elétron. (d) Mostrar que a função de onda dada está normalizada. (e) Achar a probabilidade de encontrar o elétron entre $x_1 = a_o/2$ e $x_2 = 3a_o/2$.

23. Um elétron está confinado num defeito da rede de um cristal. O defeito pode ser modelado como uma caixa unidimensional, de paredes rígidas, com 1 nm de largura. (a) Fazer o gráfico das funções de onda e das densidades de probabilidade dos estados n = 1 e n = 2. (b) No estado n = 1, achar a probabilidade de se encontrar o elétron entre $x_1 = 0{,}15$ nm e $x_2 = 0{,}35$ nm, estando x = 0 na parede esquerda da caixa. (c) Repetir o cálculo do item (b) no estado n = 2. (d) Calcular as energias, em eV, dos estados n = 1 e n = 2. *Sugestão*: em (b) e (c) use a integral de $|\Psi|^2 dx$ e observe que $\int sen^2 ax \; dx = \frac{x}{2} - (\frac{1}{4a}) sen 2ax$.

Capítulo 41 Serway Física 4 (?ª edição) 1

41.5 (1) — $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\times10^{-34}}{(0{,}15)\,20} = \boxed{2{,}21\times10^{-34}\ m}$

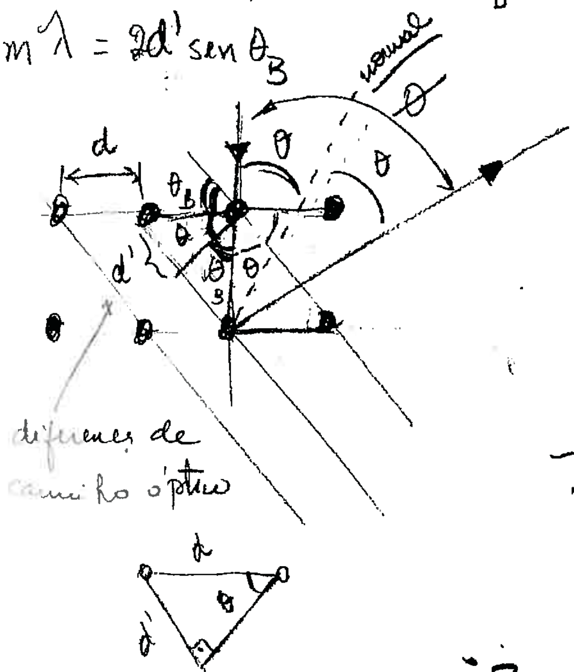
41.11 (2)



$\theta_B = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\operatorname{sen}\theta_B = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_B = \cos\theta$

$m\lambda = 2d'\operatorname{sen}\theta_B$



$\operatorname{sen}\theta = \frac{d'}{d} \Rightarrow d' = d\operatorname{sen}\theta$ (na diagonal)

$m = 1 \Rightarrow \lambda = 2(d\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$

$\lambda = d(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = d\operatorname{sen}2\theta$

$\lambda = d\operatorname{sen}\phi$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}63\times10^{-34}}{\sqrt{2mE}}$

$p = \sqrt{2\times9{,}11\times10^{-31}\times54\times1{,}6\times10^{-19}}$

$p = 39{,}67\times10^{-25}$ kg m/s

$\lambda = 0{,}167\times10^{-9} = 1{,}67$ Å

$1{,}67 = d\times\operatorname{sen}50° \Rightarrow \boxed{d = 2{,}18\text{ Å}}$

$d_{111}(Ni) = 2{,}034$ Å ?

diferença 7% (XRD)

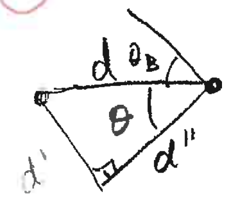
41.13 (3) $V = 40.000V \Rightarrow E = 40\,keV$ (Compare relativística $m_e c^2 = 511\,keV$) $E \ll m_e c^2$

$\frac{p^2}{2m} = 40\,keV \Rightarrow p = \sqrt{2mE} = \sqrt{2\times9{,}11\times10^{-31}\times40\times10^3\times1{,}6\times10^{-19}}$

$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{6{,}63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9{,}11\times10^{-31}\times40\times10^3\times1{,}6\times10^{-19}}}$

$\lambda = 6\times10^{-12}\,m \simeq 0{,}06$ Å (limite teórico!)

(1')



$$\cos\theta = \frac{d''}{d}$$

$$n = 1 \Rightarrow \lambda = 2d'' \operatorname{sen} \theta_B$$

$$\lambda = 2d \cos\theta \cos\theta$$

$$\lambda = 2d \cos^2\theta$$

$$\lambda = 2d \cos^2\left(\frac{50°}{2}\right)$$

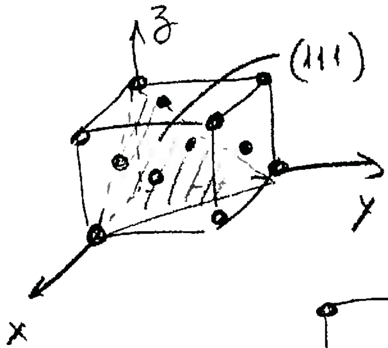
$$1{,}67 = (2d) \cdot 0{,}8214$$

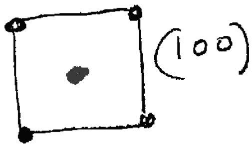
$$\boxed{2d = 2{,}033\ \text{Å}}$$

$$a = 2{,}033 \times \sqrt{3}$$
$$a = 3{,}521\ \text{Å}$$

Parâmetro de rede
$$a = 3{,}524\ \text{Å}$$

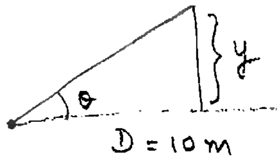
cúbica de face centrada





16 (A) a) $\lambda = \dfrac{h}{m_n v} = \dfrac{6{,}63\times10^{-34}}{(1{,}67\times10^{-27})\times 9{,}4} = \boxed{9{,}93\times10^{-9}\,m}$ (9)

$d\,sen\theta = (m+\frac{1}{2})\lambda$ $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

b) 

$\boxed{tg\,\theta = \dfrac{y}{D}}$

$\lambda = 2d\,sen\theta \Rightarrow \boxed{\dfrac{\lambda}{2} = d\,sen\theta}$

$\theta = arc\,sen\left(\dfrac{\lambda}{2d}\right)$

$\theta = arcsen\left(\dfrac{9{,}93\times10^{-7}}{2\times1\times10^{-3}}\right)$

$\phi = \pi\,(37.8)$

interferência destrutiva

$\theta = 0{,}0284°$

$y = D\,tg\theta = 10\times tg(0{,}0284°) = (4{,}96\times10^{-3}) = \boxed{4{,}96\,mm}$

c) Não, só podemos dizer que o nêutron passou por uma fenda: "Passou pelas fendas".

11.2 (5) $K = \underbrace{\dfrac{mv^2}{2}}_{1\,MeV} = \dfrac{p^2}{2m} \Rightarrow 1\times10^{6}\times1{,}6\times10^{-19} = \dfrac{p^2}{2\times(1{,}67\times10^{-27})}$

$p = 2{,}312\times10^{-20}\,kg\,m/s$

$\Delta p = 0{,}05\,p = 1{,}160\times10^{-21}\,kg\,m/s$

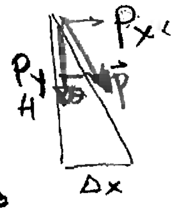
$\underbrace{\Delta x\,\Delta p = \hbar}_{mínimo} \Rightarrow \Delta x = \dfrac{h}{2\pi\,\Delta p} = \dfrac{6{,}63\times10^{-34}}{2\times\pi\times1{,}160\times10^{-21}}$

$m_p c^2 = (1{,}67\times10^{-27})\times(3\times10^{8})^2$

$E_{o_p} = 939\,MeV$

$\boxed{\Delta x = 9{,}08\times10^{-14}\,m}$

23 (6) $\Delta x\,\Delta p = \hbar$ (mínimo) $\Rightarrow$ $\Delta x = \dfrac{\hbar}{m\Delta v_x}$



$m\Delta v_x = \underbrace{p\,sen\theta}_{P_x} = mv\dfrac{\Delta x}{H} = \Delta p$

$\Delta x = \dfrac{\hbar}{mv\,\Delta x/H} \Rightarrow (\Delta x)^2 = \dfrac{\hbar H}{mv}$

Torricelli

$$\boxed{\Delta x = \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{H}{2g}\right)^{1/4}} \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{6,63\times10^{-34}}{2\pi \times 0,5\times10^{-23}}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{20}\right)^{1/4}$$

$$\Delta x = 4,59\times10^{-16} \times 0,56 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 2,58\times10^{-16}\ m}$$

desprezível !

11.25 (7)

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$du = \left(\frac{2\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$P = \int_0^{L/4} \frac{2}{L}\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4} \underbrace{\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}_{u}\underbrace{\left(\text{sen}\frac{2\pi x}{L}\right)dx}_{dv}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\frac{L}{2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi x}{L}\right]\Bigg|_0^{L/4} - \quad v = \left(\frac{L}{2\pi}\right)\left[-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

$$+\int_0^{L/4}\left(\frac{L}{\cancel{2\pi}}\right)\left[-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(\frac{\cancel{2\pi}}{L}\right)dx =$$

$$\cancel{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{L}\frac{L}{4}\right)\left(-\cos\frac{2\pi L}{L\,4}\right)}^{\,0} + \int_0^{L/4}\cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \int_0^{L/4}\left[1-\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$\int_0^{L/4}\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \int_0^{L/4}dx - \int_0^{L/4}\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$2\int_0^{L/4}\text{sen}^2\frac{2\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{4} \Rightarrow \int_0^{L/4}\text{sen}^2\frac{2\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{8}$$

$$\therefore\ P = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{8}\right) \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4}}\quad 25\%$$

$1\,eV = 1,6\times10^{-19}\,J$

11.30 (8)

$E = 6eV$

$L = 1\ nm = 1\times10^{-9}\,m$

a) $$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6,63\times10^{-34})^2}{8\times9,11\times10^{-31}\times(1\times10^{-9})^2} = 6,03\times10^{-20}\,J$$

$$\boxed{E_1 = 0,377\ eV}$$

$$6 = 0{,}377\, n^2 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{6}{0{,}377}} \approx 4 \quad \boxed{n=4}$$

b) $E_4 = 16 \times E_1 = \underline{6{,}032\,\text{eV}}$

11.37 $\int_0^L A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1 = A^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A^2\left(\frac{L}{2}\right)$

feito em sala de aula $\Rightarrow 1 = A^2\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}$

11.39 (9)

$\psi(x) = A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx)$

$\frac{d\psi}{dx} = -kA\operatorname{sen} kx + kB\cos kx$

$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 A\cos kx - k^2 B\operatorname{sen} kx$

$-\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = -\frac{2m}{\hbar^2}E\,(A\cos kx + B\operatorname{sen}$

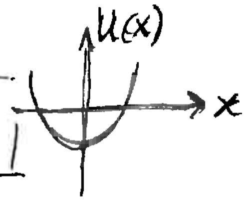
$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi$, $U=0$

$$-k^2(A\cos kx + \cancel{B\operatorname{sen} kx}) = -\frac{2mE}{\hbar^2}(A\cos kx \cancel{+ B\operatorname{sen} kx})$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \Rightarrow E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

11.40 (10)

$\psi(x) = Ax\, e^{-x^2/L^2} \quad E=0 \Rightarrow \boxed{U = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2}}$



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(4Ax^3 - 6AxL^2\right)\frac{e^{-x^2/L^2}}{L^4} \Rightarrow \boxed{U(x) = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{4x^2}{L^2} - 6\right)}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = Ae^{-x^2/L^2} + Ax\left(\frac{-2x}{L^2}\right)e^{-x^2/L^2} = Ae^{-x^2/L^2} - \frac{2Ax^2}{L^2}e^{-x^2/L^2}$$

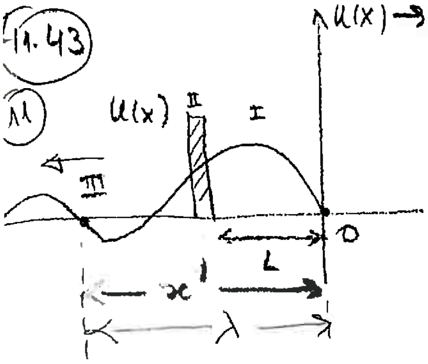
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \cancel{A\left(\frac{-2x}{L^2}\right)e^{-x^2/L^2}} = -\frac{2x}{L^2}Ae^{-x^2/L^2} - \frac{4Ax}{L^2}e^{-x^2/L^2} + \frac{4Ax^3}{L^4}e^{-x^2/L^2}$$

$$\underbrace{\qquad}_{-\frac{6xAe^{-x^2/L^2}}{L^2}}$$

(5)

(11.43)

(11)



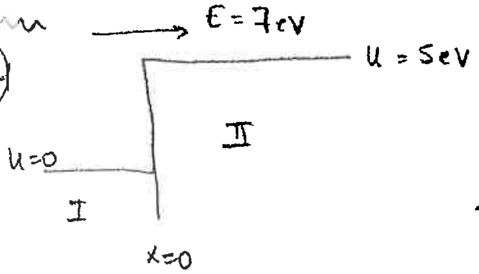
$\psi_{III}(x') = 0$

$\operatorname{sen} \frac{\pi n x'}{L} = 0 \Rightarrow x' = L \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi n) = 0$

Com relação ao zero $\boxed{x' = 2L}$

(11.44)

(12)



$E = 7eV$

$U = 5eV$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi$$

$$\psi_I = \underbrace{Ae^{ikx}}_{ida} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{volta} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{7}$$

$$\psi_{II} = \underbrace{Ce^{i\alpha x}}_{ida} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m}\sqrt{2}}{\hbar}$$

Condições de Contorno:

$$(\psi_I)_0 = (\psi_{II})_0 \Rightarrow A + B = C$$

$$\left(\frac{\partial \psi_I}{dx}\right)_0 = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_0 \Rightarrow ik(A-B) = i\alpha C \Rightarrow k(A-B) = \alpha C$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B = C \\ A - B = \frac{\alpha}{k} C \end{array}\right\} \quad 2A = \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)C \Rightarrow \boxed{C = \frac{2A}{1 + \alpha/k}}$$

$$B = C - A = \frac{2A}{1+\frac{\alpha}{k}} - A = \left(\frac{2 - 1 - \alpha/k}{1 + \alpha/k}\right)A \Rightarrow \boxed{B = \frac{(1-\alpha/k)}{1+\alpha/k}}$$

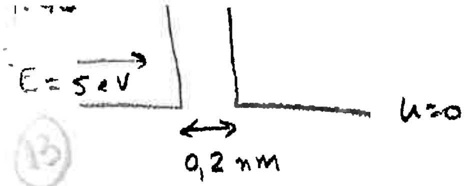
A onda incidente é $Ae^{ikx} \Rightarrow$ a onda refletida é Be^{-ikx}

Probabilidade de reflexão $R = \frac{B^2}{A^2} = \frac{(1-\alpha/k)^2}{(1+\alpha/k)^2} = \frac{(1-\sqrt{2}/\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{2}/\sqrt{7})^2} = 0{,}09$

$\boxed{R = 0{,}092}$

Probabilidade de transmissão $T = 1 - R \Rightarrow \boxed{T = 0{,}908}$

1.45



13

$T = e^{-2kL}$

$$2kL = 2\,\frac{\sqrt{2\times 9{,}11\times10^{-31}\times 5\times 1{,}6\times10^{-19}}}{1{,}054\times10^{-34}}\,2\times10^{-10} = 4{,}6$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$T = e^{-4{,}6} = 0{,}01 \quad (T = 1\%)$$

$$R = 1 - T = 0{,}99 \quad (R = 99\%)$$

1.46

14

$$\psi = A x e^{-bx^2}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = A e^{-bx^2} - 2bx^2 A e^{-bx^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -2bx\,\underbrace{A e^{-bx^2}}_{\psi} - 4bx\,\underbrace{A e^{-bx^2}}_{\psi} + 4b^2x^3\,\underbrace{A e^{-bx^2}}_{\psi} = -6b\psi + 4b^2x^2\psi$$

Equação de Schrödinger do oscilador harmónico (41.30)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\psi$$

$$-6b\psi + 4b^2x^2\psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\psi$$

$$-6b = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad e \quad 4b^2 = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2$$

$$\boxed{E = \frac{3b\hbar^2}{m}}$$

$$\boxed{b = \frac{m\omega}{2\hbar}} \qquad E = \frac{3}{2}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\hbar^2}{m} = \boxed{\frac{3}{2}\hbar\omega}$$

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$n = 1$ a energia corresponde ao 1º estado excitado

1.47 $E = \frac{1}{2}kA^2$ (clássico) $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\hbar\omega$

15

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A_n^2 = \frac{2n+1}{2}\hbar\omega \Rightarrow A_n^2 = (2n+1)\frac{\hbar}{m\omega} \Rightarrow A_n = \sqrt{(2n+1)\frac{\hbar}{m\omega}}$$

41.52 (16) $E = 1{,}8\ eV$ $\Rightarrow$ a) $E = hf$ $\quad 1{,}8 \times 1{,}6 \times 10^{-19} = 6{,}63\times10^{-34} f$ (7)

$$\boxed{f = 4{,}34 \times 10^{14}\ Hz} \qquad f = \frac{c}{\lambda}$$

b) $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^{8}}{4{,}34\times10^{14}} = 6{,}91\times10^{-7}\ m = \boxed{691\ nm}$$

$0{,}69\ \mu m$ $\qquad$ vermelho

c) $$\Delta E \Delta t = \hbar \Rightarrow \Delta E = \frac{1{,}054\times10^{-34}}{2\times10^{-6}} = 5{,}27\times10^{-29}\ J$$

$$\boxed{\Delta E = 3{,}29\times10^{-10}\ eV}$$

1.56 (17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-L/4}^{L/4} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{A^2 L}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{\sqrt{L}}}$$

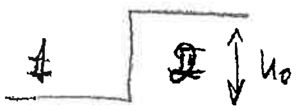
$$\int_0^{L/8} |\psi|^2 dx = A^2 \int_0^{L/8} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \cong 0{,}41$$

1.59 (18)

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{(1 - k_2/k_1)^2}{(1+k_2/k_1)^2}$$

região I $\Rightarrow \dfrac{\hbar^2 k_1^2}{2m} = E$

região II $\Rightarrow \dfrac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = E - U$

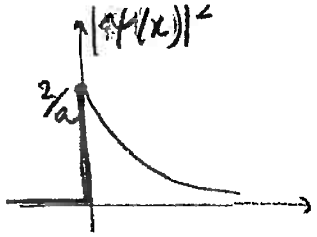


$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{2m(E-u_0)}/\hbar}{\sqrt{2mE}/\hbar} = \sqrt{1 - \frac{u_0}{E}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = ,$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{(1 - 1/\sqrt{2})^2}{(1 + 1/\sqrt{2})^2} = 0{,}0294 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2}$$

41.60 (4º)



a) $|\Psi(x)|^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2 e^{-2x/a} = \frac{2}{a} e^{-2x/a}$ p/ $x>0$

b) $|\Psi(x)|^2 = 0$ para $x<0$

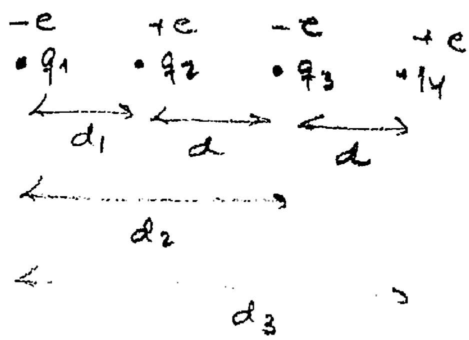
c) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right) e^{-2x/a} dx = -e^{-2x/a}\Big|_0^{\infty} =$

$= -\frac{1}{e^{2x/a}}\Big|_0^{\infty} = -[0-1] = \boxed{1}$

$\int_0^a \frac{2}{a} e^{-2x/a} dx = -e^{-2x/a}\Big|_0^a = 1 - e^{-2} = \boxed{0,865}$

1.64 a) (2º)

$U = -\frac{\overbrace{q_1 q_2}^{e^2}}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{\overbrace{q_1 q_3}^{e^2}}{4\pi\epsilon_0 2d} - \frac{\overbrace{q_1 q_4}^{e^2}}{4\pi\epsilon_0 3d} - \frac{\overbrace{q_2 q_3}^{e^2}}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{\overbrace{q_2 q_4}^{e^2}}{4\pi\epsilon_0 2d} - \frac{\overbrace{q_3 q_4}^{e^2}}{4\pi\epsilon_0 d}$



$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}\left[-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} - 1\right] \Rightarrow U = \frac{-7e^2}{(4\pi\epsilon_0)d\,3}$

$$\boxed{U = -\frac{7k_0 e^2}{3d}}$$

b) $E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$

como são 2 e's $\Rightarrow \underbrace{K_{min}}_{\text{energia mínima}} = 2\left(\frac{h^2}{8m(3d)^2}\right) = \frac{2h^2}{8m9d^2} = \frac{h^2}{36md^2}$

c) $E = U + K \Rightarrow \frac{dE}{dd} = 0 \Rightarrow \frac{7k_0e^2}{3d^2} - \frac{h^2}{18md^3} = 0 \Rightarrow d = \frac{3h^2}{7(18k_0e^2m)} = \frac{h^2}{42\ldots}$

$$d = \frac{(6{,}63\times10^{-34})^2}{42\times 9{,}11\times10^{-31}\times 9\times10^{9}\times(1{,}6\times10^{-19})^2} = 0{,}050\ nm = 5\times10^{-2}\ nm = 0{,}5\ \text{Å}$$

9

#Avogadro (átomos em 1 mol) → # atômico

$N = \frac{N_0 Z \rho}{A}$, A = peso atômico

-) $Na^3 = V \Rightarrow a^3 = V/N$ N ≡ nº de elétrons (por cm^3)

$\rho = 0{,}53\ g/cm^3 = 530\ kg/m^3$

$\rho = \frac{Nm}{V} \Rightarrow$ onde m = massa de 1 átomo

$$\rho = \frac{m}{V/N} = \frac{m}{a^3} \Rightarrow a = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{1/3} = \left(\frac{1{,}66\times10^{-27}\times 7}{530}\right)^{1/3} = 2{,}8\times10^{-10}\ m$$

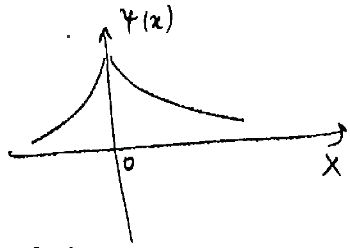
7 uma

$a = 2{,}8\ \text{Å}$

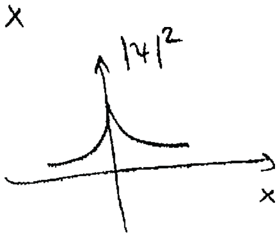
$\frac{a}{d} = \frac{2{,}8}{0{,}5} = \frac{28}{5} \Rightarrow$ 5,6 vezes maior a que $d_{//}$ (NaS é Li)

11.65 – a) $\psi(x)$ $\begin{cases} Ae^{-\alpha x} & p/\ x>0 \\ Ae^{+\alpha x} & p/\ x<0 \end{cases}$

21



b) $P_{x\to x+dx} = \psi\,\psi^* dx$ $\begin{cases} A^2e^{-2\alpha x}dx & p/\ x>0 \\ A^2e^{+2\alpha x}dx & p\ x<0 \end{cases}$



c) Contínua em $x=0$ e $\psi\to0$ p/ $x=\pm\infty$.
$\psi(x)$ é finita em todo o intervalo considerado.

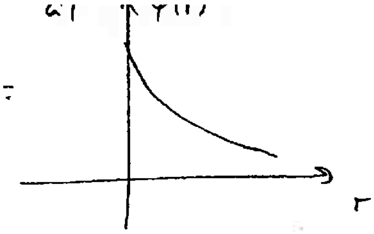
d) $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx = 2\int_{0}^{\infty}\psi^*\psi\,dx = 1 \Rightarrow 2A^2\int_0^{\infty}e^{-2\alpha x}dx = 1$

ψ é simétrica

$$\frac{2A^2}{(-2\alpha)}e^{-2\alpha x}\Big|_0^{\infty} = 1 \quad \frac{\cancel{2}A^2}{-\cancel{2}\alpha} = -1 \Rightarrow \boxed{A=\sqrt{\alpha}}$$

e) $$P_{-\frac{1}{2\alpha}\to\frac{1}{2\alpha}} = 2\int_0^{1/2\alpha}(\sqrt{\alpha})^2e^{-2\alpha x}dx = \frac{2\alpha}{(-2\alpha)}\left[e^{-\frac{2\alpha}{2\alpha}}-1\right] = \left(1-\frac{1}{e}\right) = \boxed{0{,}632}$$

66 $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$

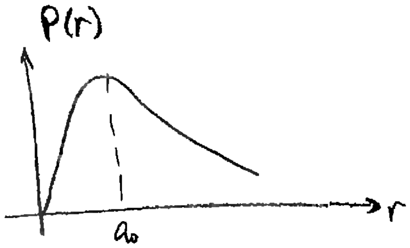


22

b) $P = |\psi|^2 dV = \underbrace{|\psi|^2 4\pi r^2 dr}$

funç é esferossimétrica, só depende de $\underline{\underline{r}}$

c)



d) $\int_0^\infty |\psi(r)|^2 dV = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{a_0}\right)^3 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr = \frac{4\times \cancel{4\pi}}{\cancel{4\pi} a_0^3} \underbrace{\int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr}$

integraç por partes

$\int_0^\infty |\psi(r)|^2 dV = \frac{4}{a_0^3}\left[\frac{2}{(2/a_0)^3}\right] = \underline{\underline{1}}$

$$\begin{cases} u = r^2 \\ dv = e^{-2r/a_0} \\ du = 2r dr \\ v = -\frac{a_0}{2} e^{-2r/a_0} \end{cases}$$

e) $P_{\frac{a_0}{2}\to 3a_0/2} = \int_{a_0/2}^{3a_0/2} \left(\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{a_0}\right)^3 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr =$

$= \frac{\cancel{4\pi}\times 4}{\cancel{4\pi} a_0^3} \int_{a_0/2}^{3a_0/2} e^{-2r/a_0} r^2 dr = \frac{4}{a_0^3}\left[-\frac{r^2 a_0}{2} e^{-2r/a_0}\Big|_{a_0/2}^{3a_0/2} + \int_{a_0/2}^{3a_0/2} \frac{a_0}{\cancel{2}} e^{-2r/a_0} \cancel{2} r dr \right] =$

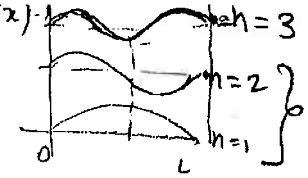
$\frac{4}{a_0^3}\left[-\frac{9a_0^3}{8} e^{-3} + \frac{a_0^3}{8} e^{-1} + r\cdot\left(-\frac{a_0^2}{2}\right) e^{-2r/a_0}\Big|_{a_0/2}^{3a_0/2} + \int_{a_0/2}^{3a_0/2} \frac{a_0^2}{2} e^{-2r/a_0} dr \right]$

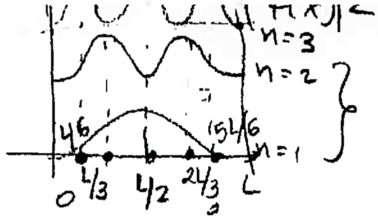
$u = r$
$du = dr$
$dv = e^{-2r/a_0}$
$v = \left(-\frac{a_0}{2}\right) e^{-2r/a_0}$

$= \left\{ \frac{a_0^3}{8}\left[\left(\frac{-9}{e^3}\right) + \frac{1}{e}\right] - \frac{3a_0^3}{4} e^{-3} + \frac{a_0^3}{4} e^{-1} + \frac{a_0^2}{2}\left(-\frac{a_0}{2}\right) e^{-2r/a_0}\Big|_{a_0/2}^{3a_0/2} \right\} = -\frac{17}{2}\frac{1}{e^3} + \frac{5}{2e}$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{e^3} + \frac{1}{e}\right) + \left[\frac{a_0^2}{\cancel{4}}\left(-\frac{3}{e^3} + \frac{1}{e}\right) - \frac{a_0^3}{\cancel{4}}\left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e}\right)\right]\frac{\cancel{4}}{\cancel{a_0^3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{-9}{e^3} + \frac{1}{e}\right) + 1 + \left(\frac{-4}{e^3} + \frac{2}{e}\right)$

41.70





23

11

figura 4.13 (livro)

$\boxed{L = 1\,nm = 10\,Å}$

b) $P = \int_{1,5Å}^{3,5Å} |\psi|^2 dx = \left(\frac{2}{10Å}\right) \int_{1,5Å}^{3,5Å} sen^2\left(\frac{\pi x}{10}\right) dx$ $\psi = A\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$

$P = \frac{1}{5}\left[\frac{x}{2}\Big|_{1,5}^{3,5} - \frac{10}{4\pi}\, sen\frac{\pi x}{5}\Big|_{1,5}^{3,5} \right] = \boxed{0,200}$

usando

$\int sen^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} sen 2ax$

c) $P_2 = \int_{1,5}^{3,5} \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^2 sen^2\left(\frac{\pi x}{5}\right) dx = \boxed{0,351}$ ($n=2$) idem anterior.

d) $E_n = \frac{n^2 h^2}{8 m L^2} \rightarrow E_1 = 0,377\, eV$

$E_2 = 1,51\, eV$

$$\int_a^b \cos^2(kx)\,dx = \int_a^b \left[\frac{1+\cos(2kx)}{2}\right]dx = \frac{1}{2}x\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos(2kx)}{2}$$

$$\begin{cases} \cos(2kx) = \cos^2(2kx) - \operatorname{sen}^2(2kx) = 2\cos^2(2kx) - 1 \\ \cos^2(2kx) = \dfrac{1+\cos(2kx)}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4k}\operatorname{sen} 2kx\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4k}\left(\operatorname{sen} 2kb - \operatorname{sen} 2ka\right)$$

$$b = \frac{L}{4} \qquad a = -\frac{L}{4} \qquad k = \frac{2\pi}{L}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{4}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}L}{4} = \frac{L}{4} \\ \frac{L}{8\pi}\left[\operatorname{sen}\cancel{2\left(\frac{2\pi}{L}\right)\cdot\frac{L}{4}} - \operatorname{sen}\cancel{2\cdot\frac{2\pi}{L}\left(-\frac{L}{4}\right)}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{L/8} \cos^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{8} - 0\right) + \frac{L}{8\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{L}\cdot\frac{L}{8}\right)$$

$$A^2\left(\frac{L}{16} + \frac{L}{8\pi}\right) = \frac{4}{\cancel{L}}\left(\frac{\cancel{L}}{16} + \frac{\cancel{L}}{8\pi}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$