Paradoxo dos Gêmeos

8ª AULA

1

"Duas irmãs gêmeas, Joana e Maria, moram em São Paulo. Um dia elas vão à estação e Maria faz uma viagem de ida e volta ao Rio de Janeiro, enquanto Joana a espera em São Paulo. Após o retorno de Maria, elas notam que Joana havia envelhecido mais do que Maria, devido ao efeito da dilatação do tempo".

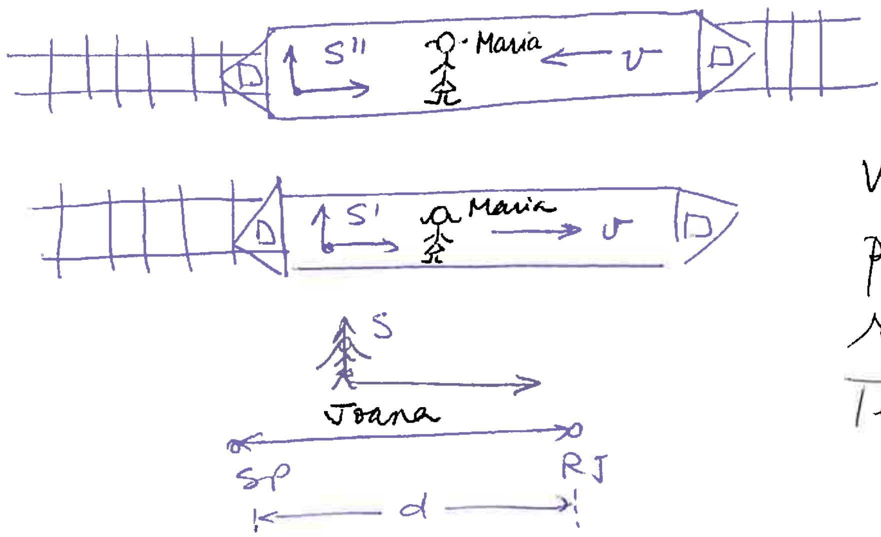
Paradoxal: Maria parece ter se movido relativamente a Joana do mesmo modo que Joana moveu-se relativamente a Maria
(simetria do problema ⇒ mesma idade)

O problema não é tão simétrico assim.

* Joana permaneceu num único referencial: SP
* Maria passa por 4 referenciais: SP, trem de ida, trem de volta, SP.

"Maria sofre acelerações, mas isso não acontece com Joana".
Teoria de Relatividade Restrita vs. Teoria de Relatividade Geral

Trens



Vista aérea do problema do referencial da Terra.

Origem do espaço tempo nos 3 referenciais iguais: Quando Maria pula para o trem que está indo para o RJ

1º evento: Maria pula da estação de SP para dentro do trem que vai p/ o RJ. ②

$$S \begin{cases} x_1 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases} \qquad S' \begin{cases} x'_1 = 0 \\ t'_1 = 0 \end{cases} \qquad S'' \begin{cases} x''_1 = 0 \\ t''_1 = 0 \end{cases}$$

2º evento: Maria chega ao Rio de Janeiro

$$S \begin{cases} x_2 = d \\ t_2 = \dfrac{d}{v} \end{cases} \qquad S' \begin{cases} x'_2 = \dfrac{d - v\frac{d}{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0 \\ t'_2 = \dfrac{\frac{d}{v} - \frac{v}{c^2}d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

(parada dentro do trem em S')

$$\Rightarrow \left\{ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right.$$

$t'_2 < t_2$ (~~contração do tempo~~) dilatação do tempo p/ ~~Joana~~

t'_2 = tempo marcado no relógio de Maria (tempo próprio)

$$t'_2 = \frac{d}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

t_2 = tempo marcado na estação do RJ (tempo dilatado)

tempo de ida $\quad \tau_{ida} = t'_2 - t'_1 = \dfrac{d}{v}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \quad (t'_2 < t_2)$

$$S'' \begin{cases} x''_2 = \dfrac{d + v\frac{d}{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{2d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t''_2 = \dfrac{\frac{d}{v} + \frac{v}{c^2}d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{d}{v}\dfrac{[1 + v^2/c^2]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

3º evento: Maria pula para o trem de volta

$$S \begin{cases} x_3 = d = x_2 \\ t_3 = \dfrac{d}{v} = t_2 \end{cases} \qquad S' \begin{cases} x'_3 = x_2 \\ t'_3 = t_2 \end{cases} \qquad S'' \begin{cases} x''_3 = x''_2 \\ t''_3 = t''_2 \end{cases}$$

③

4º evento: Maria chega a SP

$$S \begin{cases} x_4 = 0 \\ t_4 = \dfrac{2d}{v} \end{cases}$$

$$S' \begin{cases} x'_4 = \dfrac{0 - v\dfrac{2d}{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{-2d}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\[2ex] t'_4 = \dfrac{\dfrac{2d}{v} - \dfrac{v}{c^2}\cdot 0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{2d}{v}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$S'' \begin{cases} x''_4 = \dfrac{0 + v\dfrac{2d}{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{2d}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\[2ex] t''_4 = \dfrac{\dfrac{2d}{v} + \dfrac{v}{c^2}\cdot 0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{2d}{v}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$x''_4 = x''_3 = x''_2$ (Maria não se move em S'' na viagem de volta

tempo de volta $\quad \tau_{volta} = t''_4 - t''_2 = \dfrac{2d}{v}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - \dfrac{d}{v}\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right]}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} =$

$$= \frac{d}{v}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(2 - 1 - \frac{v^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{d}{v}\frac{(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\tau_{volta} = \frac{d}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \boxed{\tau_{volta} = \tau_{ida}}$$

O tempo total para a viagem de Maria:

$$\tau_{Maria} = \frac{2d}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\tau_{Joana} = \frac{2d}{v}$$

$$\tau_{Maria} < \tau_{Joana}$$

Joana ficou mais velha que Maria.

Comemorar aniversário em dias diferentes.

Maria efetivamente viveu menos que Joana.

Ex: Diferença de 1 dia numa viagem de 1 mês

$$\tau_J - \tau_M = 1 = \frac{2d}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \Rightarrow \underbrace{30 \text{ dias}}_{\left(\frac{2d}{v}\right)}$$

$$1 = 30\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$\frac{1}{30} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left[1 - \left(\frac{1}{30}\right)\right]^2 = \left(\frac{29}{30}\right)^2$$

$$1 - \left(\frac{29}{30}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{29}{30}\right)^2}\, c$$

$$\boxed{v = 0{,}256\, c}$$

Relatividade - 1ª Lista de Exercícios

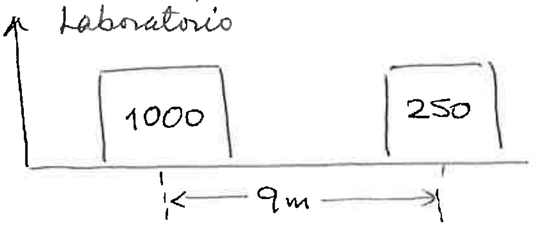
1) Um feixe de mésons que se move com velocidade $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ em relação ao laboratório passa diante de dois contadores separados por uma distância de 9 m no laboratório. As partículas não experimentam perda alguma, seja em velocidade ou em energia, ao passarem diante dos contadores. Observa-se que o primeiro contador registra 1000 mésons e o segundo contador assinala somente 250. Admitindo-se que a diminuição no número de mésons é devida à desintegração destes em vôo, pergunta-se qual é a vida média dessas partículas no seu sistema próprio. Deve ser admitido como conhecido que os mésons desintegram-se segundo a lei $N(t) = N(t=0)\cdot 2^{-t/\tau}$ onde τ é a vida média dos mésons.

2) Dilatação do tempo: Existem duas bombas idênticas, com pavios de igual tamanho, que levam 0,5 seg para explodir. João em São Paulo acende os pavios das duas bombas ao mesmo tempo. Maria toma a bomba número 2 e a leva com uma velocidade v = (4/5) c para um ponto a 400.000 km de São Paulo.
a) No referencial de João, as duas bombas explodem ao mesmo tempo?
b) Qual é a posição de Maria, no referencial de João, no instante em que a bomba de João explode?
c) Qual é o instante, no referencial de João, em que a bomba de Maria explode?
d) Qual a posição de Maria, no referencial de João, no instante em que a bomba dela explode?
e) A dilatação do tempo é real?

3) Contração do espaço: Suponha que João está num trem que se move com velocidade v = (4/5) c para a direita em relação à Terra, e segure uma régua de 1 metro de comprimento, paralelamente à direção de sua velocidade. Maria encontra-se na plataforma de uma estação, onde ela tinha uma série de máquinas fotográficas ligadas por fios de mesmo comprimento a um único disparador. As fotos são simultâneas no referencial de Maria e capazes de abranger o trem inteiro.
a) Qual é o comprimento da régua observado por Maria?
b) Em que instante João observa o "flash" da extremidade final da régua?
c) Qual deveria ser a velocidade do trem para que a régua encolhesse 1% do seu tamanho?

Exercícios

1



$\longrightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

$$S = vt$$

$$9 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\times10^{8} \times t$$

$$t = \frac{9 \times 2}{\sqrt{3} \times 3\times10^{8}}$$

$$t = \frac{\cancel{9}\sqrt{3} \times 2}{\cancel{3\times3}\times10^{8}} = 2\sqrt{3} \times 10^{-8}\,s$$

$$N(t) = N(t=0)\,2^{-t/\tau}$$

$$250 = 1000 \times 2^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^{-2} = 2^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{t}{\tau} = 2$$

$$\tau = \frac{t}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{3}\times10^{-8}\,s$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

T_0 é o tempo próprio, medido no referencial do méson.

T é o tempo encontrado no referencial do laboratório $\equiv \tau$.

$$\tau = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{T_0}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2T_0$$

$$T_0 = \frac{\tau}{2} \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\times10^{-8}\,s}$$

2

a) Não.

b) A bomba de João explode em $\boxed{0,5\,s}$.

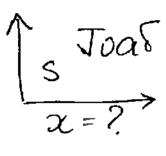
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$$

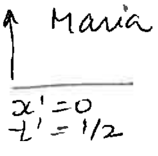
$$S_J^{M} = v_J^{M}\, t_J = \frac{4}{5} \times 3\times10^{8} \times \frac{1}{2} = \boxed{1,2\times10^{8}\,m}$$

c) $$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1/2}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{1/2}{\sqrt{9/25}} = \frac{1}{2}\,\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{T = 0,833\,s}$$

T_0 é o tempo de explosão da bomba se ele ficasse parad

d)





$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + \frac{4}{5}c \times \frac{1}{2}}{3/5}$$

$$x = \frac{24/5}{3/5} = \frac{2c}{3} = \frac{2\times3\times10^8}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2\times10^8\,m}$$ 6

João, que permaneceu parado mede o tempo dilatado
Para João ~~L_0~~ $= 1{,}2\times10^8$ (comprimido) pois $L_0 = 2\times10^8 \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{2\times3\times10^8}{5} = 1{,}2\times1$

<u>Outra forma de resolver c)</u>

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}c\,\frac{0}{c^2}}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{1}{2}\times\frac{5}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}833\,s$$

e) Sim

3 a) $L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,L_0$ onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3} \therefore \frac{1}{\gamma} = \frac{3}{5}$

$$L = \frac{3}{5}\times1 \Rightarrow \boxed{L = 0{,}6\,m}$$

b)

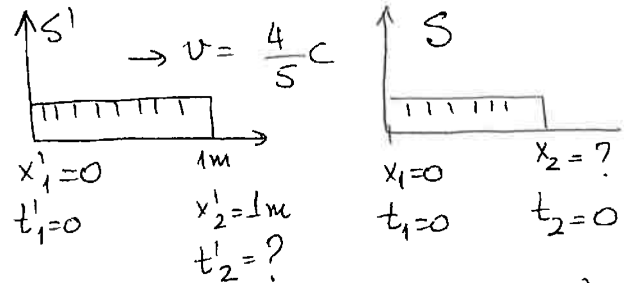


Foto do extremo esquerdo como origem dos 2 sistemas de coordenadas

$S_M = (0,0)$ $x_M=0;\ t_M=0$

$S_J = (0,0)$ $x_J=0;\ t_J=0$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 0{,}6\,m$ (1ª parte)

$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 1{,}0\,m$

$\Delta t' = ?$ $\quad \Delta t = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(\cancel{x'_1}^{\,0} + \cancel{vt'_1}^{\,0}) = 0 \\ x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2) = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{4}{5}c\,t'_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \gamma\left(\cancel{t'_1}^{\,0} + \frac{v}{c^2}\cancel{x'_1}^{\,0}\right) = 0 \\ t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) \Rightarrow 0 = \frac{5}{3}\left(t'_2 + \frac{4\cancel{c}}{5c^{\cancel{2}}}\cdot1\right) \Rightarrow t'_2 = -\frac{4}{5c} = \frac{-4}{15}\times10^{-8}\,s \end{cases}$$

vê a extremidade da direita antes

Confirmando

$$x_2 = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\times\frac{-4}{15}\times10^{-8}\times3\times10^8\right)$$

$$x_2 = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{16}{25}\right) = \frac{5}{3}\times\frac{9}{25} = \frac{3}{5} = \underline{\underline{0{,}6\,m}}$$

c) 1% de 1m = 0,99m

$L = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow 0,99 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$(0,99)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - (0,99)^2 = 1 - 0,9801$

$v^2 = c^2 \times 0,0199 \Rightarrow v = \sqrt{c^2 \times 0,0199} \Rightarrow$

$v = c\sqrt{0,0199} \Rightarrow \boxed{v = 0,1411c}$

$\sim 14\%\ c$