Transformações de Lorentz

7ª AULA

1

* Passar de um referencial a outro.

Evento: é algo que realmente acontece num ponto do espaço e do tempo.

* Dois observadores em referenciais diferentes nunca discordam quanto à ocorrência do evento. (acendeu uma lâmpada)

Eles podem, entretanto, discordar da descrição dessa ocorrência.

TR Descrição do evento ⇒ ponto no espaço e no tempo

Exemplo de casa

Maria e João vêem a mesma casa, mas suas visões são diferentes.

casa → evento

* As descrições dependem do observador. Impossível ver a casa como um todo.

* Cada observador, em cada referencial, descreve o mesmo evento de forma diferente. Entretanto, como o evento é o mesmo, as descrições não são arbitrárias entre si, mas guardam relações umas com as outras.

* Se Maria sabe descrever o evento E em S_M e sabe como João se move com relação a ela, ela pode descobrir como João descreve este mesmo evento em S_J

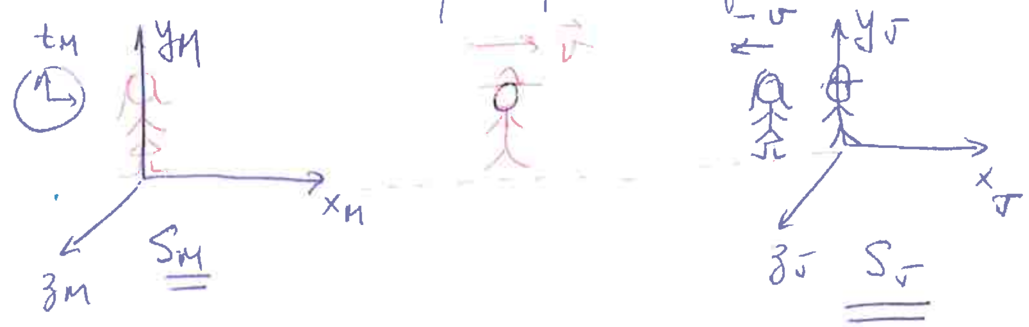
(casa → anda até a posição de João)

Teoria da mudança de referencial

TR – transformações de Lorentz: relacionam as descrições em referenciais em movimento relativo de um mesmo evento.

* Estas transformações devem obedecer os 2 princípios da Relatividade

Experimento: Maria tem uma lanterna. No instante em que João passa correndo em frente dela, ela faz a lanterna piscar. Cria-se então uma frente de onda esférica que se propaga de acordo com o 2º princípio da Relatividade, com c em qualquer referencial.



* O piscar da luz da lanterna é um evento.

Ep coincide no instante em que ele ocorre.

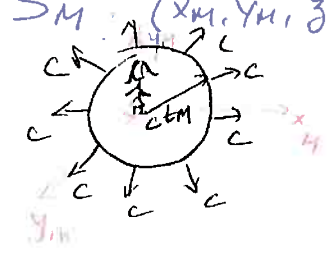
Evento P
origem

Maria $(x_M^P, y_M^P, z_M^P, t_M^P) = (0,0,0,0)$

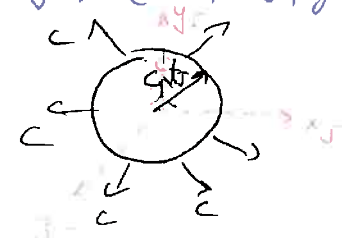
João $(x_J^P, y_J^P, z_J^P, t_J^P) = (0,0,0,0)$

* Tanto João como Maria verão depois do instante inicial uma frente de onda esférica a se propagar com velocidade c e cada ponto desta frente de onda será caracterizado por 4 números.

S_M: (x_M, y_M, z_M, t_M) e S_J: (x_J, y_J, z_J, t_J)



Compatibilizar as visões



③

* Um ponto qualquer da frente de onda: Esfera

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 t_M^2 \quad e \quad x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2 t_J^2 \qquad (1)$$

* Transformação das coordenadas.

Hipótese: transformações sejam lineares.

$$x_J = a_1 x_M + b_1 t_M$$

não lineares $x_J = x_M^2$, $x_J = e^{x_M}$, $x_J = \ln t_M \ldots$

* Transformações não lineares não mantêm a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo.

* As propriedades de um sistema fechado não se alteram quando de um deslocamento de todo o sistema no espaço e no tempo.

* Passar um sistema físico da mão esquerda para a direita ou estudá-lo amanhã ao invés $\Rightarrow$ não modifica o sistema

"Deixe para amanhã o que você pode fazer hoje".

* Os eixos dos sistemas são paralelos. A velocidade relativa é na direção x. Simplica sem restrições $\begin{cases} y_M = y_J \\ z_M = z_J \end{cases}$ (1')

* Demais coordenadas:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x_J = a_1 x_M + a_2 t_M \\ t_J = b_1 t_M + b_2 x_M \end{vmatrix}$$

temos que determinar a_1, a_2, b_1 e b_2

* Condição 1. Descrição do movimento de João, no referencial S_M. João move-se com velocidade v em relação a S_M.

A posição de João em um instante t_M^J qualquer da origem de S_M é dada por:

$$x_M^J = v t_M^J \quad e \quad x_J^J = 0 \text{ (João está fixo na origem)}$$

Acima !!

De (2): $0 = a_1 v t_M^J + a_2 t_M^J \Rightarrow \boxed{a_2 = -v a_1}$ (3)

* Condição 2: Descrição do movimento de Maria no referencial S_J

$$x_J^M = -v t_J^M$$

$$x_M^M = 0$$

De (2): $-v t_J^M = 0 + a_2 t_M^M \Rightarrow \boxed{-v t_J^M = a_2 t_M^M}$ (4)

$t_J^M = b_1 t_M^M \Rightarrow \boxed{t_J^M = b_1 t_M^M}$ (5)

Dividindo (4) por (5) $\Rightarrow -v = \frac{a_2}{b_1} \to \boxed{-v b_1 = a_2}$

usando (3)

$\boxed{a_1 = b_1}$ (6)

* Condição 3: Grão de poeira iluminado pela frente de onda da lanterna: evento E^I

Maria $(x_M^I, y_M^I, z_M^I, t_M^I)$ e João $(x_J^I, y_J^I, z_J^I, t_J^I)$

Estes pontos estão vinculados entre si por pertencerem à frente de onda

(1) $(x_M^I)^2 + \cancel{(y_M^I)^2} + \cancel{(z_M^I)^2} - c^2 (t_M^I)^2 = (x_J^I)^2 + \cancel{(y_J^I)^2} + \cancel{(z_J^I)^2} - c^2 (t_J^I)^2$

$$(x_M^I)^2 - c^2(t_M^I)^2 = (x_J^I)^2 - c^2(t_J^I)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_J = a_1 x_M + a_2 t_M \\ t_J = b_1 t_M + b_2 x_M \end{array}\right\} (2)$$

$a_2 = -v a_1$ (3)

$b_1 = a_1$ (6)

$$(x_J^I)^2 - c^2(t_J^I)^2 = (a_1 x_M^I + a_2 t_M^I)^2 - c^2(b_1 t_M^I + b_2 x_M^I)^2$$

$$(x_M^I)^2 - c^2(t_M^I)^2 = a_1^2(x_M^I - v t_M^I)^2 - c^2(a_1 t_M^I + b_2 x_M^I)^2$$

Lado direito :

$$(a_1^2 - c^2 b_2^2)(x_H^I)^2 - 2a_1\underbrace{(v a_1 - c^2 b_2)}_{\text{zero}} x_H^I t_H^I + a_1^2 (v^2 - c^2)(t_H^I)^2 = (x_H^I)^2 - c^2 (t_H^I)^2$$

zero $\Rightarrow v a_1 - c^2 b_2 = 0 \Rightarrow \boxed{b_2 = \frac{-v}{c^2} a_1}$

$$a_1^2 - c^2 b_2^2 = 1$$

$$a_1^2 (v^2 - c^2) = -c^2 \Rightarrow a_1 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$a_1^2 - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - 1 = c^2 b_2^2 \Rightarrow \frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 b_2^2$$

$$b_2^2 = \frac{v^2}{c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \Rightarrow b_2 = \pm \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Em (2): $x_J = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_H - v \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t_H$ $\boxed{S_M \Rightarrow S_J}$

S' se move em relação a S

$$\boxed{x_J = \frac{x_M - v t_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$y_J = y_M$$
$$z_J = z_M$$

$$t_J = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_M \Rightarrow \boxed{t_J = \frac{t_M - \frac{v}{c^2} x_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$\boxed{S_J \Rightarrow S_M}$ $x_M = \frac{x_J + v t_J}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ e $t_M = \frac{t_J + \frac{v}{c^2} x_J}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

mesma coisa!!

só troca o sinal da velocidade!!

Resumindo ⇒ S' se move em relação a S

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y'$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v^2}{c^2}x\right)$$

Analogamente, se S se move em relação a S' $(-v)$

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad y = y' \quad e \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

* Limite da Mecânica Clássica $\frac{v}{c} \ll 1$

$$x' = x - vt \qquad e \qquad x = x' + vt$$

$$t' = t \qquad\qquad t = t'$$

Transformações de Galileu !!

Transformações de velocidades

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \dot{x}' = u'_x = \frac{\dfrac{\Delta x - v\Delta t}{\cancel{(1-v^2/c^2)^{1/2}}}}{\dfrac{\Delta t - v/c^2\,\Delta x}{\cancel{(1-v^2/c^2)^{1/2}}}} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} \begin{matrix}\div\Delta t\\ \div\Delta t\end{matrix} =$$

$$\boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}} \Rightarrow \text{Analogamente} \quad \boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}} \;//$$

Limite de MC $\Rightarrow \frac{v}{c} << 1 \Rightarrow u'_x = u_x - v \Rightarrow u_x = u'_x + v$ (7)

* As componentes de velocidade ⊥s à velocidade $v \Rightarrow$

$\Rightarrow$ direçõ y e z:

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \dot{y}' = u'_y = \frac{\Delta y \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}{\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} \begin{matrix}\div \Delta t \\ = \\ \div \Delta t\end{matrix} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\dot{y}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\dot{x}}$$

$$\boxed{u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$$

Analogamente:

$$\frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \dot{z}' = u'_z = \frac{\Delta z \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}{\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} \begin{matrix}\div \Delta t \\ = \\ \div \Delta t\end{matrix} \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$\boxed{u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$$