12ª AULA

1

* 2 Revoluções da Física no início do século XX
  teoria da relatividade (grandes velocidades)
  Mecânica quântica (corpos pequenos)

* Fenômenos "quânticos" que careciam de explicação
  - radiação de corpo negro
  - efeito fotoelétrico
  - emissão de raias espectrais num gás em descarga

1900 - Planck (corpo negro)
1905 - Einstein (efeito fotoelétrico)
1913 - Átomo de Bohr
1925 - Princípio da exclusão de Pauli
1926 - Equação de Schroedinger (interpretação de Copenhagen)
1927 - Princípio da incerteza de Heisenberg.

<u>Essencial</u>: "pacotes de energia", probabilidade, princípio da incerteza, observador $\leftrightarrow$ observado, escala microscópica, princípio de superposição, dualidade onda partícula.

* <u>Radiação de Corpo Negro</u> (Radiação térmica)
  abrange desde o ultra-violeta ao infravermelho (vice-v...)

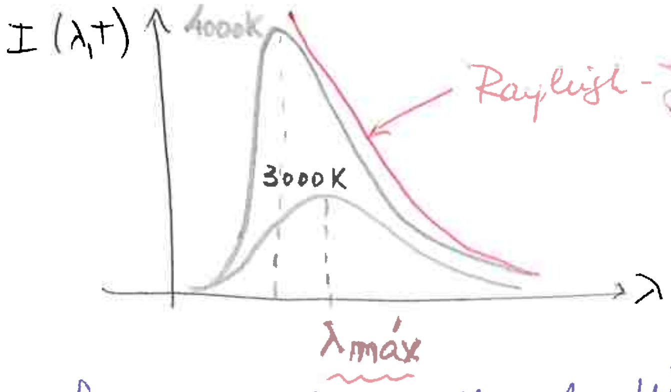
  ultra-violeta: λ menor, E maior
  infravermelho: λ maior, E menor

* A intensidade de radiação emitida pelo corpo negro, usando teoria clássica $\equiv$ Lei de Rayleigh-Jeans

$$\boxed{I(\lambda, T) = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}}$$

* Neste modelo, átomos da cavidade ≡ conjunto de osciladores que emitem radiação em todos os λ's. ②

* Experimentalmente, porém, o que se observa:



* Lei de deslocamento de Wien:

$$\boxed{\lambda_{máx} T = 0{,}2898 \times 10^{-2}\,[m\,K]}$$

* Para λ grandes (baixas energias) ⇒ Lei de Rayleigh-Jeans concorda ± bem com os resultados experimentais

* Para λ pequenos (altas energias): Catástrofe do Ultra-violeta

* Em 1900, Max Planck obteve uma curva empírica que ajustava os dados experimentais

$$\boxed{I(\lambda,T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}}$$

$K = k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\, m^2 kg\, s^{-2} K^{-1}$

A potência total irradiada por um corpo negro por unidade de área a uma temperatura

$$I \Rightarrow \int I(\lambda,T)\,d\lambda = \underbrace{\sigma T^4}_{\text{Stefan-Boltzmann}}$$

* Sendo que $\boxed{h = 6{,}63 \times 10^{-34}\, J\,s}$ ≡ constante de ~~Planck~~ foi calculada para ajustar-se aos dados experimentais

$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\, W m^{-2} K^{-4}$

* Note que para λ grandes $e^{hc/\lambda kT} \approx 1 + \dfrac{hc}{\lambda kT}$ $\left(e^x \approx 1 + \underset{x \text{ pequeno}}{x}\right)$

$$\therefore I(\lambda,T) = \frac{2\pi \cancel{h} c^{\cancel{2}}}{\lambda^5 \left(\cancel{1} + \frac{\cancel{hc}}{\lambda kT} - \cancel{1}\right)} = \frac{2\pi k T c}{\lambda^4} \Big\}\ \text{Rayleigh-Jeans}$$

* Nesta teoria Planck admite duas hipóteses:

1) Radiação emitida pelas moléculas é quantizada em energia: $\boxed{E = nhf}$ valores discretos de energia

sendo $n \equiv$ nº quântico $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ e os estados de energia permitidos $\equiv$ estados quantizados ou quânticos.

2) Moléculas emitem ou absorvem energia em "quanta", o que envolve o conceito de fóton.

Energia de um fóton $= hf$ { na verdade foi Einstein quem propôs essa equação ao estudar o efeito fotoelétrico

* Efeito fotoelétrico: $K_{máx} = hf - \phi$ ↳ função trabalho
(voltaremos à frente)

Daí resulta $E_f = hf$

energia mínima de ligação de um e^- ao metal

* Alguns aspectos interessantes

1) Radiação térmica do corpo humano
$T = 35°C$ (temperatura da pele)
Qual é o comprimento de onda emitido pela pele?

Lei de Wien: $\lambda_{máx} T = 0{,}2898 \times 10^{-2}\ [m\,K]$

$$\lambda_{máx} = \frac{0{,}2898 \times 10^{-2}}{308\ [K]} [mK] = \underbrace{9{,}40\ \mu m}_{\text{infravermelho}}$$

2) Limite clássico vs. quântico

Sistema massa-mola
$m = 2\,kg$
$k = 25\ N/m$
$A = 0{,}40\ m\ (40\ cm)$

$E_{clássica} = \frac{1}{2} k A^2 = 2{,}0\ J$

$f \equiv$ frequência de oscilação $= 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$

$f = 0{,}56\ Hz$

E quantizada $\Rightarrow$ $E = nhf = n(6{,}626 \times 10^{-34})(0{,}56) = 2J$ (4)

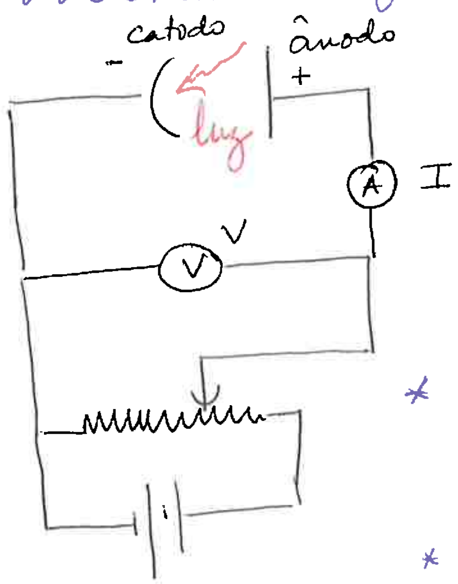
$n = 5{,}4 \times 10^{33}$ (nº quântico)

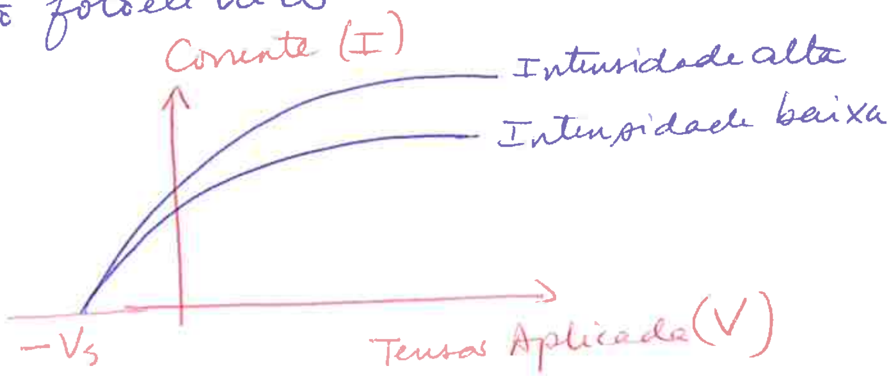
$E = hf = 6{,}626 \times 10^{-34} \times 0{,}56 = \underbrace{3{,}7 \times 10^{-34} J}_{\text{fração de energia transportada por um quantum}}$

muito pequena, não pode ser observada $\Longrightarrow$ contínuo

Luz como partícula

* Voltemos ao efeito fotoelétrico





* Os elétrons saem do catodo iluminado e atingem A.
* Na saturação (V aplicada alta) todos os elétrons são coletados em A.

* Quando a polaridade da bateria for invertida V_s = potencial frenador nenhum fotoelétron atingirá A.

$$K_{máx} = e V_s \quad (\text{independe de } I)$$

Efeitos importantes

(Clássico vs. Quântico)

* Há um limiar de frequência, característico do material iluminado, que somente para $f > f_{limiar}$ haverá emissão de e^-.

(frequência vs. intensidade)

qual é a energia dos fótons que chegam $E = hf$

e não a quantidade destes

a energia do fóton tem que ser maior que a função trabalho

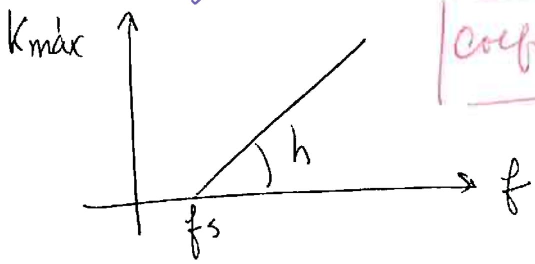
* $f > f_{limiar}$ ⇒ # fótons ∝ Intensidade da luz, mas a energia cinética máxima independe da intensidade da luz ⇒ $K_{máx} = hf - \phi$

Troca fóton ⟷ elétron ⇒ aumenta fótons ∝ aumenta e^-

* A energia cinética máxima aumenta com a frequência da luz

$$K_{max} = hf - \phi$$

* Os elétrons são emitidos quase instantaneamente, mesmo que I for baixa ⇒ Interação de 1 fóton com 1 e^- é instantânea.



$\boxed{\text{coeficiente angular} = h}$ $\quad f_s = \dfrac{c}{\lambda_c}$

$K_{máx} = 0 \rightarrow hf_s = \phi \Rightarrow \boxed{\phi = \dfrac{hc}{\lambda_c}}$

Exemplo

Efeito fotoelétrico no Na:

luz : $\lambda = 300\,nm$

$\phi_{Na} = 2{,}46\,eV$

a) energia dos e^- ejetados?

b) $\lambda_c = ?$

c) velocidade dos fotoelétrons

a) $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{6{,}63\times10^{-34} \times 3\times10^{8}}{300\times10^{-9}}$

$E = 4{,}14\,eV$ $\quad (1\,eV = 1{,}6\times10^{-19}\,J)$

$K_{máx} = 4{,}14 - 2{,}46 = 1{,}88\,eV$

b) $\lambda_c = \dfrac{hc}{\phi} = 505\,nm$ (verde!)

c) $\underbrace{K_{máx} = \frac{1}{2} m v^2}_{\text{sem correção relativística}} \Rightarrow v = 7{,}68\times10^{5}\,m/s$

A correção relativística é desnecessária

$$\frac{v}{c} = \frac{7{,}68\times10^{5}}{3\times10^{8}} \cong 2\times10^{-3} \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 4\times10^{-6}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4\times10^{-6}}} \simeq 1$$

* Efeito Compton

Espalhamento de fótons de raios X por elétrons (1923)

Fóton: partícula puntiforme com energia hf

$$E^2 = (pc)^2 + \underbrace{E_0^2}_{m_0 \to 0} \Rightarrow E = pc$$

$$p = \frac{E}{c} \longrightarrow \text{momento } \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

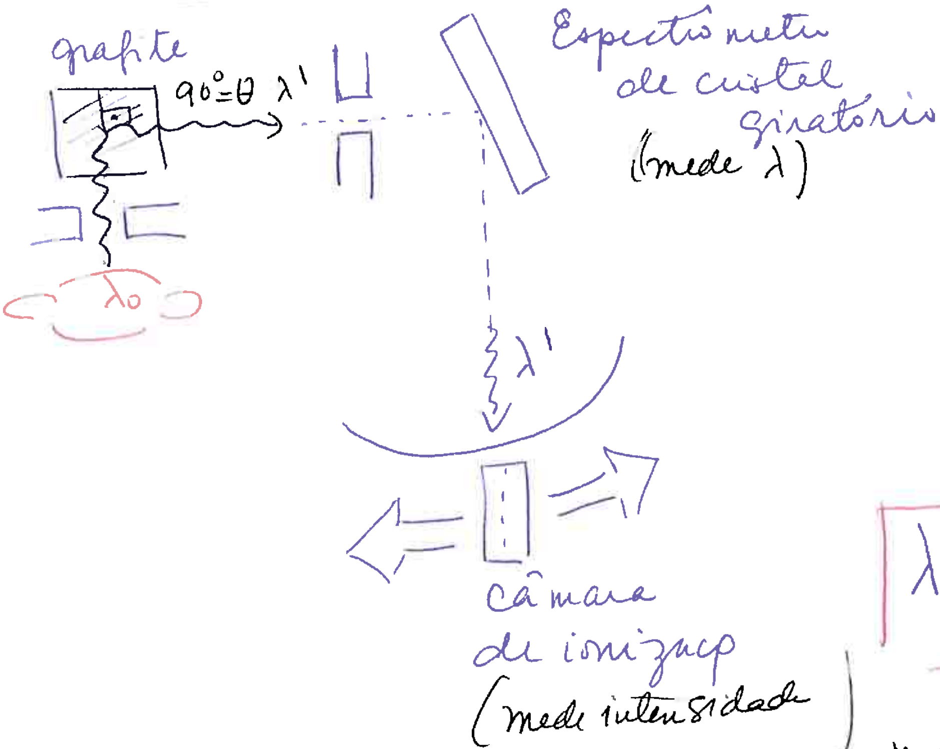
$c = \lambda f$

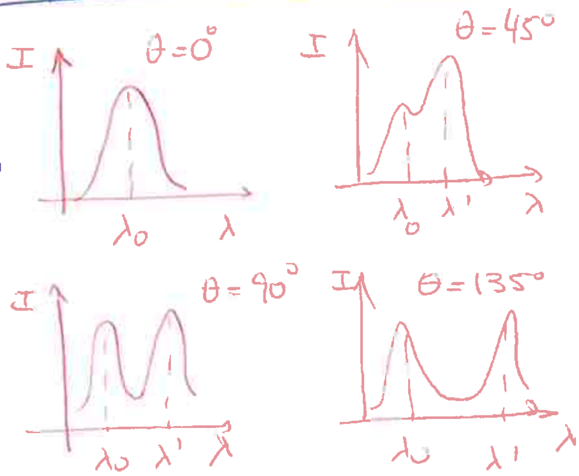
Clássico: a onda incidente com frequência f_0 aceleraria os e^- que emitiriam com $f < f_0$.

resultado experimental: f só dependia do ângulo de espalhamento.

f ou λ deveriam depender do tempo de exposição e da intensidade da radiação incidente.

resultado experimental: não depende destes parâmetros





$$\boxed{\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)}$$

m = massa do elétron

$$\frac{h}{mc} = \lambda_c \equiv \text{comprimento de onda Compton} = 0{,}00243\ nm$$

$$\frac{[h]}{[m][c]} = \frac{J\,s}{kg\,m/s} = \frac{\cancel{kg}\, m^{\cancel{2}}\, \cancel{s^{-2}}\, \cancel{s}}{\cancel{kg}\, \cancel{m}\, \cancel{s^{-1}}} = \underset{\text{comprimento}}{m}$$

* Dedução da equação do deslocamento Compton

  * Fóton tratado como uma partícula.
  * Aplica-se conservação de energia e momento.

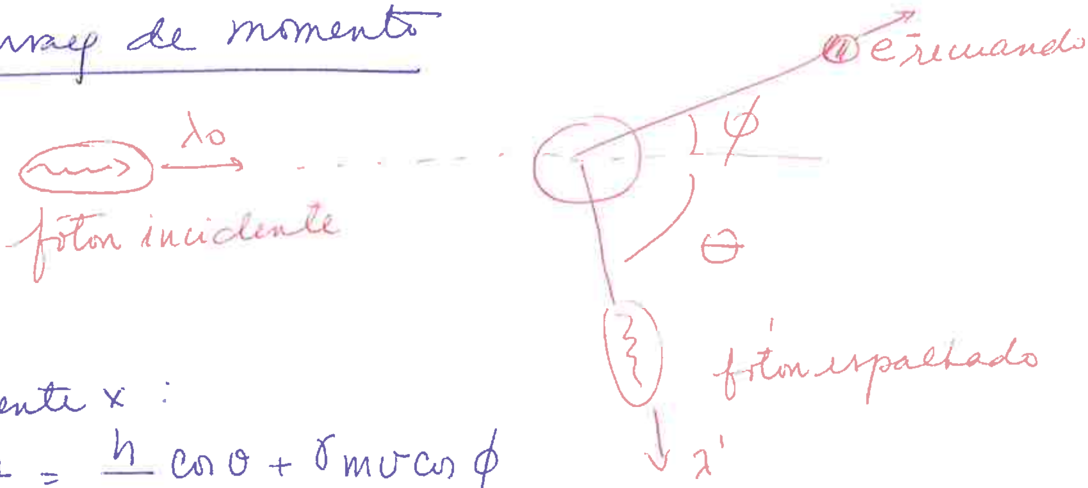
* Conservação de energia: $\underbrace{\frac{hc}{\lambda_0}}_{\text{energia do fóton incidente}} = \underbrace{\frac{hc}{\lambda'}}_{\text{energia do fóton espalhado}} + \underbrace{K_e}_{\text{energia do elétron que recua}}$

e^- relativístico: $K_e = \gamma mc^2 - mc^2$ com $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\therefore \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 - mc^2$$

↳ massa de repouso do elétron

* Conservação de momento



Componente x:

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + \gamma mv\cos\phi$$

Componente Y

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta - \gamma mv\sin\phi$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda_0} &= \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 - mc^2 \\ \frac{h}{\lambda_0} &= \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + \gamma mv\cos\phi \\ 0 &= \frac{h}{\lambda'}\sin\theta - \gamma mv\sin\phi \end{aligned}\right\}$$

Elimina v e ϕ

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)}$$

energia diminui

λ aumenta

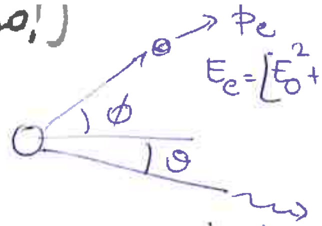
→

Dedução (se der tempo!)

Conservação de momento:

$E_1 = hf_1$

$|\vec{p}_1| = \frac{h}{\lambda_0}$



$E_e = [E_0^2 + p_e^2 c^2]^{1/2}$

(8)

$|\vec{p}_2| = \frac{h}{\lambda'}$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_e + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_e = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \Rightarrow \boxed{p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\theta} \quad (A)$$

$E_2 = hf_2$

Conservação de energia:

($E_0 = mc^2$ = energia de repouso do elétron)

$E_{Ro} >> E_{lig}$ e⁻ carbono
17 keV   11 eV
elétron livre

$$p_1 c + E_0 = p_2 c + (E_0^2 + p_e^2 c^2)^{1/2}$$

$$(p_1 - p_2)c + E_0 = (E_0^2 + p_e^2 c^2)^{1/2} \quad \text{(quadrando)}$$

$$[(p_1 - p_2)c]^2 + \cancel{E_0^2} + 2E_0(p_1 - p_2)c = \cancel{E_0^2} + p_e^2 c^2 \quad (\div c^2)$$

$$\boxed{p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 + \frac{2E_0(p_1 - p_2)}{c}} \quad (B)$$

Igualando (A) e (B)

$$-\cancel{2}p_1 p_2 + \frac{\cancel{2}E_0(p_1 - p_2)}{c} = -\cancel{2}p_1 p_2 \cos\theta$$

$$\frac{E_0(p_1 - p_2)}{c} = p_1 p_2 (1 - \cos\theta) \quad \times \frac{hc}{p_1 p_2 E_0}$$

$$\frac{h\cancel{c}}{p_1 p_2 \cancel{E_0}} \cdot \frac{\cancel{E_0}(p_1 - p_2)}{\cancel{c}} = \frac{\cancel{p_1 p_2}\, hc}{\cancel{p_1 p_2}\, E_0}(1 - \cos\theta)$$

$p_1 = \frac{h}{\lambda_0}$

$p_2 = \frac{h}{\lambda'}$

$E_0 = mc^2$

$$\frac{\cancel{h}}{\frac{\cancel{h}}{\lambda_0}\frac{h}{\lambda'}}\left(\frac{\cancel{h}}{\lambda_0} - \frac{\cancel{h}}{\lambda'}\right) = \frac{hc}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_0 \lambda' \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \Rightarrow \boxed{\lambda'_{\text{final}} - \lambda_{0\,\text{inicial}} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)}$$

Exemplo: Um feixe de raios X de comprimento de onda $\lambda_0 = 0{,}20\,nm$ é espalhado por um alvo. Os raios X espalhados são observados sob um ângulo de $45°$ em relação ao feixe incidente. Calcule o comprimento de onda dos raios X espalhados sob este ângulo.

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{6{,}626\times10^{-34}}{9{,}11\times10^{-31}\times3\times10^{8}}(1-\cos 45°) = 7{,}10\times10^{-13}\,m$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 \Rightarrow \lambda' = \Delta\lambda + \lambda_0$$

$$\lambda' = (7{,}10\times10^{-4} + 0{,}2)\,nm = \underline{0{,}200710\,nm}$$

Ache a energia perdida pelo fóton nesta colisão.

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} \quad e \quad E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\frac{E_0 - E'}{E_0} = \frac{1}{hc/\lambda_0}\cdot\left(\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'}\right) = \lambda_0\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

$$\frac{E_0 - E'}{E_0} = \lambda_0\left(\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0\lambda'}\right) = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'} = 0{,}00354$$

$$\underline{E_0 - E' = 0{,}00354\,E_0}$$

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12{,}4}{\lambda[Å]}[keV] = \frac{12{,}4}{2} = \underline{6{,}2\,keV}$$

$$0{,}2\,nm = 2Å$$